Réduction I : éléments propres, diagonalisation, polynômes d'endomorphisme

Éléments propres, polynôme caractéristique

♠ **Exercice 1.** *Homothéties locales.*

Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

On suppose que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \exists \lambda \in \mathbb{K}, u(x) = \lambda x.$$

Montrer que u est une homothétie.

♠ **Exercice 2.** *Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.*

Soit $n \geq 2$ et $\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. On appelle *matrice compagnon* de P la matrice

$$\mathrm{C}(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que $\chi_{\mathrm{C}(\mathrm{P})} = \pi_{\mathrm{C}(\mathrm{P})} = \mathrm{P}$.
2. Déterminer une CNS de diagonalisabilité et de trigonalisabilité de $\mathrm{C}(\mathrm{P})$.

Exercice 3. *Matrice antisymétrique réelle d'ordre* 3.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ non nul et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.
2. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathrm{M}_3(\mathbb{C})$?

Δ **Exercice 4.** *Matrice à la Attila.*

Soient $n \geq 2$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et

$$A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser.
2. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}$, A^k.
3. Déterminer une CNS sur a, b pour que A soit inversible et calculer A^{-1} dans ce cas.

Δ **Exercice 5.** *Éléments propres de la comatrice.*

Soit $n \geq 2$, $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $B = \mathrm{Com}(A)^\top$ la transposée de la comatrice de A.

1. Déterminer le rang de B en fonction de celui de A.
2. Montrer que tout vecteur propre de A est vecteur propre de B.
3. On suppose maintenant que A est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (comptées avec multiplicité). Montrer que B est diagonalisable. Quelles sont ses valeurs propres ?
4. Déterminer les racines de $\chi_{\mathrm{Com}(A)}$ en fonction de celles de χ_A.

Exercice 6. *Sous-espaces de $\mathscr{L}(E)$ dont tout élément non nul est inversible.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et V un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ tel que $V \setminus \{0\} \subseteq \mathrm{GL}(E)$.

1. Montrer que $\dim(V) \leq n$.
2. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que $\dim(V) \leq 1$.
3. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n impair. Montrer que $\dim(V) \leq 1$.
4. Donner un exemple, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n pair, d'un tel espace V avec $\dim(V) > 1$.

♠ **Exercice 7.** *Coefficients du polynôme caractéristique.*

Soit $n \geq 2$, $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et

$$\chi_A = \det(XI_n - A) = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1 X + c_0.$$

1. Montrer que $c_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$ et $c_0 = (-1)^n \det(A)$.
2. On suppose A inversible. Exprimer $\chi_{A^{-1}}$ en fonction de χ_A.
3. Montrer que
$$c_1 = (-1)^{n-1} \operatorname{tr}(\mathrm{Com}(A)).$$
4. Montrer que $c_{n-2} = \dfrac{(\operatorname{tr}(A))^2 - \operatorname{tr}(A^2)}{2} = \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_{i,i}a_{j,j} - a_{i,j}a_{j,i})$.

♠ **Exercice 8.** *Réduction d'un endomorphisme de rang 1.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 1.

Discuter la réduction de u selon la valeur de $\operatorname{tr}(u)$.

Exercice 9. *Endomorphisme de rang 2 : réduction et traces.* *Centrale*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ de rang 2.
On note $t = \mathrm{tr}(u)$ et $s = \mathrm{tr}(u^2)$.

1. Exprimer χ_u en fonction de t et s.
2. À quelle condition sur t et s l'endomorphisme u est-il trigonalisable ?
3. Montrer que si $2s > t^2$ et $s \neq t^2$, alors u est diagonalisable, et que si $2s < t^2$ ou $s = t^2$, alors u n'est pas diagonalisable.
4. Montrer que, lorsque $2s = t^2 \neq 0$, la diagonalisabilité de u ne dépend pas seulement de t et s.
5. Résumer le tout par un schéma.

♠ **Exercice 10.** *Traces des puissances et polynôme caractéristique.*

1. Montrer que $A \in M_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(A^k) = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, 2n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.
3. (⋆) Montrer que $\chi_A = \chi_B$ si et seulement si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$.

Exercice 11. *Variations autour de nilpotence et traces des puissances.* *X*

1. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{tr}(M^{pj}) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. Montrer que M est nilpotente.
2. Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\mathrm{tr}(M^j) = n$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ si et seulement si 1 est l'unique valeur propre de M.
3. Soient A et B dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que toute matrice de $\mathrm{Vect}(A, B)$ soit nilpotente. Montrer que $\mathrm{tr}(A^k B) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
4. Pour $n \geq 3$, trouver deux matrices nilpotentes A et B de $M_n(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{tr}(A^k B) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, mais telles qu'il existe une matrice non nilpotente dans $\mathrm{Vect}(A, B)$.

Exercice 12. *Invariance de* χ_{AM+B}. *X*

1. Soient $U, V \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\chi_U = \chi_V$. Montrer que $\mathrm{tr}(U^2) = \mathrm{tr}(V^2)$.
2. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer

$$(\forall M \in M_n(\mathbb{C}), \chi_{AM+B} = \chi_{AM}) \Leftrightarrow (B \text{ nilpotente et } BA = 0).$$

Exercice 13. *Identités de Newton et coefficients du polynôme caractéristique.* *Centrale*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\chi_A = \sum_{i=0}^{n} a_i X^{n-i}$, et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A comptées avec multiplicité.
On pose de plus pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S_k = \mathrm{tr}(A^k)$.

1. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathrm{Sp}(A)$,

$$\frac{\chi_A'(z)}{\chi_A(z)} = \mathrm{tr}((zI_n - A)^{-1}).$$

2. Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose $Q(z) = \sum_{j=1}^{n} z^{n-j} \sum_{i=0}^{j-1} a_i A^{j-1-i}$. Montrer que $Q(z)(zI_n - A) = \chi_A(z) I_n$ et que $\mathrm{tr}(Q(z)) = \chi_A'(z)$.

3. Montrer que, pour tout $j \in [\![0, n-1]\!]$,
$$\sum_{i=0}^{j} a_i S_{j-i} = (n-j)a_j.$$
4. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,
$$a_k = \frac{(-1)^k}{k!} \begin{vmatrix} \mathrm{tr}(A) & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \mathrm{tr}(A^{k-2}) & \cdots & \mathrm{tr}(A) & k-1 \\ \mathrm{tr}(A^k) & \mathrm{tr}(A^{k-1}) & \cdots & \mathrm{tr}(A^2) & \mathrm{tr}(A) \end{vmatrix}.$$

♠ **Exercice 14.** *Polynômes caractéristiques de* AB *et* BA *: plusieurs preuves.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. L'objectif de cet exercice est de démontrer de plusieurs façons différentes l'égalité
$$\chi_{AB} = \chi_{BA}.$$

1. *Cas inversible.*
On suppose $A \in GL_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA sont semblables et en déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
Donner un exemple, avec A non inversible, où AB et BA ne sont pas semblables.
2. *Par blocs.*
Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, calculer
$$\det\left(\begin{pmatrix} \lambda I_n & A \\ B & I_n \end{pmatrix}\right).$$
En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
3. *Par densité.*
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer par densité que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
4. *Par l'inverse de* $I_n - BA$ *?*
Montrer que $I_n - AB$ est inversible si et seulement si $I_n - BA$ l'est, et exprimer son inverse dans ce cas.
En déduire $\mathrm{Sp}(AB) \setminus \{0\} = \mathrm{Sp}(BA) \setminus \{0\}$. Peut-on en déduire que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$?
5. *Par les noyaux itérés.*
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $x \mapsto Bx$ induit une injection de $\mathrm{Ker}((AB - \lambda I_n)^k)$ dans $\mathrm{Ker}((BA - \lambda I_n)^k)$. En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
6. *Par les traces de puissances.*
On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{tr}((AB)^k) = \mathrm{tr}((BA)^k)$. En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
7. *Par forme matricielle du théorème du rang.*
Déterminer une matrice $C \in M_n(\mathbb{K})$, et un entier $r \in [\![0, n]\!]$, tels que AB soit semblable à $J_r C$ et BA à CJ_r (où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$). En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
8. *En passant par* $\mathbb{K}[X, Y]$ *(Hors programme).*
Donner un sens et démontrer que
$$\det(YI_n - (A - XI_n)B) = \det(YI_n - B(A - XI_n)).$$
En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
9. *Par similitude par blocs.*
Montrer que les matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ sont semblables. En déduire $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 15. *Éléments propres de* AB *et* BA*, cas rectangulaire.*

Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$.

Déterminer le lien entre χ_{AB} et χ_{BA}.

Exercice 16. *Encore autour du lien entre* AB *et* BA. *Mines*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{K}^*, \dim(E_\lambda(f \circ g)) = \dim(E_\lambda(g \circ f))$.
2. On suppose $\mathrm{rg}(g \circ f) = \mathrm{rg}(f \circ g)$. Montrer que $f \circ g$ est diagonalisable si et seulement si $g \circ f$ est diagonalisable.
3. Donner un contre-exemple si l'on ne suppose pas l'égalité des rangs.

Soient $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ telles que AB soit diagonalisable.

4. Montrer que $X\pi_{AB}(X)$ annule BA.
   En déduire que **si** AB est de plus inversible, **alors** BA est diagonalisable.
5. Montrer que $(BA)^2$ est diagonalisable, et que BA est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}((BA)^2)$.

♠ **Exercice 17.** *Disques de Geršgorin et applications.*

Pour tous $\omega \in \mathbb{C}$ et $R \geq 0$, on note $B(\omega, R) = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z - \omega| \leq R\} \subseteq \mathbb{C}$ le disque fermé de centre ω et de rayon R.

Soit $A = (a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2} \in M_n(\mathbb{C})$.

1. On suppose que A est à *diagonale dominante* (par lignes) c'est à dire,
$$\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} |a_{i,j}|.$$
   Montrer que A est inversible.
2. Montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_{i,i}, \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{i\}} |a_{i,j}|\right).$$
3. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$ on note
$$L_k = \sum_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} |a_{k,j}| \quad \text{et} \quad C_k = \sum_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}} |a_{i,k}|.$$
   Montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) \subseteq \left(\bigcup_{k=1}^{n} B(a_{k,k}, L_k)\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} B(a_{k,k}, C_k)\right).$$
4. Soit $n \geq 2$ et $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire.
   Montrer que toute racine z de P vérifie
$$|z| \leq 1 + \max_{0\leq k\leq n-1} |a_k| \quad \text{et} \quad |z| \leq \max(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|).$$
5. On suppose que $A \in M_n(\mathbb{R})$ et que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $a_{k,k} > L_k$.
   Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 18. *Variations autour des diagonales dominantes : à la Ostrowski.* *Mines*

Soit $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{C})$. On pose pour tous $i \in [\![1,n]\!]$, $L_i = \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|$ et pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $C_j = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

Soit λ une valeur propre de A. Montrer que $|\lambda| \leq \max_{k\in[\![1,n]\!]} \left(\sqrt{L_k C_k}\right)$.

Exercice 19. *Variations autour des diagonales dominantes : minoration du rang.*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$. Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, on pose $S_j = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$.

1. On suppose que pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $S_j \leq 1$.
   Montrer que pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda| \leq 1$ puis que $|\mathrm{tr}(A)| \leq \mathrm{rg}(A)$.
2. On note J l'ensemble des j tels que la j-ième colonne de A est non nulle.
   Montrer que le rang de A est minoré par
   $$\mathrm{rg}(A) \geq \sum_{j\in J} \frac{|a_{j,j}|}{S_j}.$$
3. Soit $\varepsilon \geq 0$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont les coefficients diagonaux sont de module 1 et les autres de module au plus ε. Montrer que
   $$\mathrm{rg}(A) \geq \frac{n}{1+(n-1)\varepsilon}.$$

Exercice 20. *Spectre et valeurs propres.*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$. Le *spectre* de u est l'ensemble

$$\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid u - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ non bijectif}\}.$$

1. Montrer que toute valeur propre de u appartient à $\mathrm{Sp}(u)$, et qu'en dimension finie $\mathrm{Sp}(u)$ est l'ensemble des valeurs propres de u.
2. Déterminer les valeurs propres et le spectre de l'endomorphisme de dérivation $D : f \mapsto f'$ sur $E = \mathscr{C}^\infty([0,1],\mathbb{C})$.
3. Sur $E = \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{C})$, on considère *l'opérateur de Volterra* $V : E \to E$ défini par $Vf : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
   Déterminer les valeurs propres et le spectre de V.
4. Montrer que pour tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{Sp}(P(u)) = P(\mathrm{Sp}(u))$.

Exercice 21. *Polynômes en la dérivation.*

Soit $D \in \mathscr{L}(\mathbb{K}[X])$ l'opérateur de dérivation défini par

$$D : \begin{cases} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ Q \mapsto Q'. \end{cases}$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que $P(D) \in \mathrm{GL}(\mathbb{K}[X])$ si et seulement si $P(0) \neq 0$.

On suppose $P \neq 0$. Montrer que $P(D)$ est surjectif et déterminer son noyau, puis ses valeurs propres et ses sous-espaces propres.

Exercice 22. *Éléments propres de l'opérateur de Cesàro.* *X*

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et T l'endomorphisme de E qui à $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u_k.$$

1. Déterminer les éléments propres de T.
2. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, déterminer $\mathrm{Ker}((\mathrm{T} - \lambda \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^k)$, pour tout $k \geq 2$.

Exercice 23. *Opérateurs de moyenne sur les fonctions continues.* *Mines*

On pose $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Soit $p \in \mathbb{N}$.

Soit $f \in \mathrm{E}$. On pose $u(f) \in \mathrm{E}$ défini par :

$$\forall x > 0, \quad u(f)(x) = \frac{1}{x^{p+1}}\int_0^x t^p f(t)\mathrm{d}t,$$

prolongée par continuité en 0.

1. Vérifier la bonne définition de $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice 24. *Opérateur intégral de Green du laplacien.* *Centrale*

Soit $\mathrm{K} : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ défini par $\mathrm{K}(x,y) = x(1-y)$ si $x \leq y$, $\mathrm{K}(x,y) = y(1-x)$ sinon. On munit l'espace $\mathrm{E} = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$ et, pour $f \in \mathrm{E}$, on pose

$$\mathrm{T}(f) : x \in [0,1] \mapsto \int_0^1 \mathrm{K}(x,y)f(y)\mathrm{d}y.$$

1. Montrer que T est un endomorphisme continu. Est-il injectif ? surjectif ?
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice 25. *Vecteurs propres en position générale.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $x_1, \ldots, x_{n+1}$ des vecteurs propres de u tels que, pour toute partie I de cardinal n de $[\![1, n+1]\!]$, la famille $(x_i)_{i\in\mathrm{I}}$ soit libre. Que dire de u ?

Exercice 26. *Espace propre d'une sous-matrice.*

Soit $n \geq 2$ et $\mathbb{K}$ un corps. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i \in [\![1, n]\!]$.

1. Soit $\widetilde{\mathrm{A}} \in \mathrm{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en enlevant à A sa i-ème ligne et sa i-ème colonne. Montrer que
$$\dim(\mathrm{E}_\lambda(\widetilde{\mathrm{A}})) \geq \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})) - 1.$$
2. Le résultat subsiste-t-il si l'on enlève la i-ème ligne et la j-ème colonne, avec $j \neq i$?

Exercice 27. *Une application du lien entre* AB *et* BA. *Mines*

Soient $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{3,4}(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice AB est-elle diagonalisable ?

Exercice 28. *Sous-espace affine stable ne contenant pas* 0.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ et V un sous-espace affine de E ne contenant pas 0 et stable par u. Montrer que 1 est valeur propre de u.
2. Soit $E = \mathbb{K}[X]$, $H = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(1) = 1\}$ et $u : E \to E, P \mapsto XP$. Montrer que H est un hyperplan affine de E ne contenant pas 0, stable par u, et que 1 n'est pas valeur propre de u.

Exercice 29. *Endomorphisme permutant cycliquement des sous-espaces.*

Soient $m \in \mathbb{N}^*$, V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, u un endomorphisme de V et $V_1, \dots, V_m$ des sous-espaces de V tels que

$$V = \bigoplus_{i=1}^{m} V_i.$$

On suppose que u envoie V_1 dans V_2, V_2 dans V_3, ..., V_{m-1} dans V_m et V_m dans V_1. Montrer que, si λ est valeur propre de u, il en est de même de $\omega\lambda$ pour tout $\omega \in \mathbb{U}_m$.

Exercice 30. *Matrices dont l'image est un sous-espace propre.*

Décrire les matrices $M \in M_n(\mathbb{K})$ telles que l'image de M soit un sous-espace propre de M, c'est à dire telles qu'il existe une valeur propre λ de M vérifiant $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Ker}(M - \lambda I_n)$.

Exercice 31. *Somme de deux matrices à spectre positif.* *ENS (PC)*

Soient A et B dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subseteq \mathbb{R}_+^*$ et $\mathrm{Sp}(B) \subseteq \mathbb{R}_+^*$. A-t-on nécessairement $\mathrm{Sp}(A + B) \subseteq \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 32. *Inversion de Sherman-Morrison.* *Mines*

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $H \in M_n(\mathbb{K})$ de rang 1. Montrer que $A + H$ est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}(A^{-1}H) \neq -1$, et déterminer alors $(A + H)^{-1}$.

Exercice 33. *Un déterminant quaternionique.* *X*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On note $\overline{A}$ la matrice des conjugués des coefficients de A.

1. Montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}$.
2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\sigma : E \to E$ une application antilinéaire, c'est à dire telle que pour tous $x, y \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a $\sigma(\lambda x + \mu y) = \overline{\lambda}\sigma(x) + \overline{\mu}\sigma(y)$. Montrer que $\det(\sigma^2) \geq 0$.
3. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A\overline{A})$ tel que $\lambda < 0$. Montrer que la dimension de $E_\lambda(A\overline{A})$ est paire.
4. Conclure que $\det(I_n + A\overline{A}) \in \mathbb{R}^+$.
5. Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que $\det\left(\begin{pmatrix} X & Y \\ -\overline{Y} & \overline{X} \end{pmatrix}\right) \geq 0$.

Exercice 34. *Des valeurs propres d'une matrice à paramètre.* *Mines*

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

1. Prouver qu'il existe $\alpha(t) \in]-\infty, 0[$, $\beta(t) \in]0, 2[$ et $\gamma(t) \in]2, +\infty[$ tels que $M(t)$ soit semblable à $\mathrm{diag}(\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$.
2. Trouver des équivalents de $\alpha(t)$, $\beta(t)$ et $\gamma(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Exercice 35. *Matrices presque diagonales.* *Mines*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & n \\ 1 & 2 & \cdots & n-1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer $\det(A + kI_n)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
2. Montrer que A a n valeurs propres réelles distinctes.
3. Montrer que pour toute valeur propre λ de A, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1$.

⋆ **Exercice 36.** *Polynôme caractéristique et somme.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{C}[X]$ trois polynômes unitaires de degré n.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe A_1 et A_2 dans $M_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\chi_{A_1} = P_1, \quad \chi_{A_2} = P_2, \quad \chi_{A_1+A_2} = P_3.$$

⋆ **Exercice 37.** *Polynômes caractéristiques de* $A - MX$ *et* $B - XM$. *X*

Soient $A, B, M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $\chi_A = \chi_B$ et $AM = MB$.

1. Montrer que, pour tous $k \in \mathbb{N}$ et $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{tr}((A - MC)^k) = \operatorname{tr}((B - CM)^k)$.
2. En déduire que, pour tout $C \in M_n(\mathbb{R})$, $\chi_{A-MC} = \chi_{B-CM}$, puis que $\det(A - MC) = \det(B - CM)$.

Exercice 38. *Identités de Newton par une matrice compagnon.*

Soit $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses racines complexes comptées avec multiplicité, et on pose $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

la matrice compagnon de P et, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $H_k = a_{n-k} + X(a_{n-k+1} + X(\dots + X(a_{n-1} + X)))$.

1. Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $S_j = \operatorname{tr}(C(P)^j)$.
2. Montrer que, pour tout $k \geq n$, $S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_0 S_{k-n} = 0$.
3. Soient $j \in [\![1, n-1]\!]$ et $k \in [\![j, n-1]\!]$. Montrer que $\operatorname{tr}(C(P)^j) = \operatorname{tr}(C(H_k)^j)$.
4. En déduire que, pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$,

$$S_k + a_{n-1}S_{k-1} + \cdots + a_{n-k+1}S_1 + k a_{n-k} = 0.$$

Exercice 39. *Peut contenir des traces de médisance.* *X (PC)*

En 2016, le jury de l'École polytechnique (filière PC) a posé les trois exercices suivants.

(i) Soient $S, P \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $P^2 = P$, $S^2 = I_n$ et $(S-P)(S+P) = 0$. Montrer $P = I_n$.

(ii) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. Peut-on écrire M comme somme de matrices nilpotentes ?

(iii) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ antisymétrique, $k \in \mathbb{N}^*$, $P_1, \dots, P_k \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $\forall j \in [\![1,k]\!], P_j^2 = P_j$ et $A = \sum_{j=1}^{k} P_j$. Montrer que $A = 0$.

Résoudre ces exercices, puis méditer la citation du philosophe Alain (1868-1951) : *« Rien n'est plus dangereux qu'une idée, quand on n'a qu'une idée. »*

Exercice 40. *Valeurs propres d'un opérateur de translation.*

Soit $\tau > 0$ et E l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ admettant une limite finie en $+\infty$. Pour f dans E, soit

$$T(f) : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto f(x+\tau).$$

Montrer que T est un endomorphisme de E et trouver ses valeurs propres.

Exercice 41. *Un automorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par une série.* *Mines*

On identifie les polynômes à coefficients complexes et les fonctions polynomiales associées. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on pose

$$u(P) : z \mapsto e^{-z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P(n)}{n!} z^n.$$

1. Montrer que cela définit bien un endomorphisme u de $\mathbb{C}[X]$.
2. Déterminer les éléments propres de u.
3. Soit Δ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad u(P)(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Delta^n(P)(0)}{n!} z^n.$$

Exercice 42. *Mini-Perron continu.* *X*

Soit $K \in \mathscr{C}^0([0,1]^2, \mathbb{R}_+^*)$ strictement positive et $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$.

1. Pour $f \in E$, soit $T_K(f)$ la fonction de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y) f(y) \mathrm{d}y.$$

   Montrer que $T_K \in \mathscr{L}(E)$.
2. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}_+)$ positive telle que f est vecteur propre de T_K et $\lambda \in \mathbb{R}$ sa valeur propre associée. Montrer que $\lambda > 0$, que f est strictement positive, et que $E_\lambda(T_K) = \mathrm{Vect}(f)$.

Exercice 43. *Opérateur intégral de noyau $\min(x,t)$.* *Mines*

Soient $E = \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ et u l'application définie par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \quad u(f)(x) = \int_0^1 \min(x,t) f(t) \mathrm{d}t.$$

Vérifier que u est un endomorphisme de E. Déterminer ses éléments propres.

Diagonalisation

♠ **Exercice 44.** *Matrices bidiagonales.* *X*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$. À quelle condition la matrice
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \lambda_{n-1} & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$
est-elle diagonalisable ?
2. Plus généralement, soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ et $b_1, \dots, b_{n-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. À quelle condition la matrice
$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$
est-elle diagonalisable ?

Exercice 45. *Diagonalisabilité d'une matrice antidiagonale.*

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{K})^n$ et
$$M = \begin{pmatrix} & & & & \alpha_1 \\ & & & \alpha_2 & \\ & & \iddots & & \\ & \alpha_{n-1} & & & \\ \alpha_n & & & & \end{pmatrix}.$$
Donner une condition nécessaire et suffisante sur les α_i pour que M soit diagonalisable.

♠ **Exercice 46.** *Diagonalisation des matrices circulantes.*

Pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on définit la matrice circulante
$$\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$
dans $M_n(\mathbb{C})$. On pose $J = \Gamma(0, 1, 0, \dots, 0)$.

1. Diagonaliser J, puis diagonaliser $\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1})$.
2. L'ensemble des matrices $\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1})$, pour $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, est-il une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{C})$? Si oui, est-elle commutative, et quelle est sa dimension ?
3. À quelle condition la matrice $\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1})$ est-elle inversible ? Si c'est le cas, montrer que son inverse est de la forme $\Gamma(b_0, \dots, b_{n-1})$.
4. On pose $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ et on note $\Phi : Q \mapsto (AQ)\%(X^n - 1)$ l'endomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ qui à Q associe le reste de la division euclidienne de AQ par $X^n - 1$.
Déterminer la matrice de Φ dans la base $(X^{n-1}, \dots, X, 1)$, puis dans une base de polynômes de Lagrange bien choisie. Retrouver ainsi la diagonalisation de $\Gamma(a_0, \dots, a_{n-1})$.

Δ **Exercice 47.** *Matrices de permutation.*

Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma = (\delta_{i,\sigma(j)})_{1\le i,j\le n} \in M_n(\mathbb{C})$. Par exemple, pour $n=3$ et $\sigma = (1\,2\,3)$, $P_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $\sigma \mapsto P_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_n dans $GL_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que P_σ est diagonalisable.
3. Quel est le polynôme caractéristique de P_σ ?
4. Déterminer les permutations σ telles que P_σ soit diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
5. Calculer $\dim(E_1(P_\sigma))$.
6. En déduire le nombre minimum de transpositions dont σ est un produit.

Δ **Exercice 48.** *Matrices tridiagonales de Toeplitz.*

Soit $n \ge 1$. Pour $a, b, c \in \mathbb{C}$ on note

$$T_{a,b,c} = \begin{pmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}),$$

en particulier

$$T = T_{0,1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. On suppose que $bc = 0$. Que dire de $T_{a,b,c}$?
2. On suppose $bc \neq 0$. Montrer qu'il existe $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $T_{a,b,c}$ soit semblable à $T_{a,\delta,\delta}$.
3. Montrer que T est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres.
4. Déterminer les valeurs propres, vecteurs propres et polynôme caractéristique de $T_{a,b,c}$.
5. À quelle condition sur (a,b,c), $T_{a,b,c}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 49. *Diagonalisabilité d'une matrice flèche.* *Mines (PSI)*

Soient $n \ge 2$, $(a_1, \dots, a_{n-1})$ et $(b_1, \dots, b_{n-1})$ dans $\mathbb{K}^{n-1}$, $d \in \mathbb{K}$. On pose

$$M = \left(\begin{array}{ccc|c} & 0_{n-1} & & b_1 \\ & & & \vdots \\ & & & b_{n-1} \\ \hline a_1 & \cdots & a_{n-1} & d \end{array}\right) \in M_n(\mathbb{K}).$$

1. Calculer χ_M.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que M soit diagonalisable.
3. On suppose de plus que $M = M^\top$. Montrer que si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, M est diagonalisable. Donner un exemple pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ où M n'est pas diagonalisable.
4. Diagonaliser explicitement M dans $M_n(\mathbb{R})$ lorsque $d = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i = b_i = 1$.

♠ **Exercice 50.** *Matrices diagonales par blocs et réduction.*

Soient $(A, B) \in M_p(\mathbb{K}) \times M_q(\mathbb{K})$. On pose

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{K}).$$

Démontrer que M est diagonalisable (resp. trigonalisable) si et seulement si A et B le sont.

Δ **Exercice 51.** *Quelques diagonalisabilités par blocs classiques.*

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n \geq 1$.

1. Soient $X, Y \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix} \quad \text{est semblable à} \quad \begin{pmatrix} X+Y & 0 \\ 0 & X-Y \end{pmatrix}.$$

Dans la suite, $A \in M_n(\mathbb{K})$.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.
3. Même question pour $\begin{pmatrix} I_n & A \\ A & I_n \end{pmatrix}$.

Δ **Exercice 52.** *Diagonalisabilité de* $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$. *Mines*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. À quelle condition la matrice $M = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & A \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 53. *Diagonalisabilité de* $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et de* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Soient $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{K}).$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$.

2. Soient $B \in M_{p,n}(\mathbb{K})$ et

$$N = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{K}).$$

À quelle condition la matrice N est-elle diagonalisable ?

Exercice 54. *Diagonalisabilité d'une matrice triangulaire par blocs.*

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in M_n(\mathbb{C})$, $B \in M_p(\mathbb{C})$, $C \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in M_{n+p}(\mathbb{C}).$$

1. Montrer que si M est diagonalisable, alors A et B le sont.
2. Montrer que si A et B sont diagonalisables et qu'il existe $U \in M_{n,p}(\mathbb{C})$ telle que $C = AU - UB$, alors M est diagonalisable.

3. En déduire que si A et B sont diagonalisables et $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \emptyset$ alors M est diagonalisable.
4. Donner un exemple où A et B sont diagonalisables, et M n'est pas diagonalisable.
5. ($\star$) Montrer que

$$\text{M diagonalisable} \iff \text{A et B diagonalisables et } \exists U \in \mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{C}),\quad C = AU - UB.$$

♠ **Exercice 55.** *Diagonalisabilité, trigonalisabilité et extension du corps.*

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps et $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{L}}(A)$ le spectre de A vue comme matrice de $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$.

Montrer que A est diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elle est diagonalisable (resp. trigonalisable) dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{L})$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{L}}(A) \subseteq \mathbb{K}$.

♠ **Exercice 56.** *Endomorphismes d'ordre fini.*

1. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. Montrer que tout élément de G est diagonalisable.
2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, X une partie génératrice finie de E et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u(X) = X$. Montrer que u est diagonalisable.

♠ **Exercice 57.** *Diagonalisabilité et supplémentaires stables.*

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.
2. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace vectoriel de E admet un supplémentaire stable par u.

Exercice 58. *Un critère de non-diagonalisabilité.*

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^n)$. Montrer que u n'est pas diagonalisable si et seulement si il existe un plan stable sur lequel u induit un endomorphisme représenté par la matrice

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que l'équivalence de la question précédente subsiste si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, mais pas sans cette hypothèse.
3. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer que u n'est pas diagonalisable si et seulement si il existe un plan stable sur lequel u induit un endomorphisme représenté par l'une des matrices

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad r\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$, $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 59. *Condition polynomiale de diagonalisabilité.* *Centrale*

1. Soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^2 - 2A$ soit diagonalisable et $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$.
Montrer que A est diagonalisable.
2. Plus généralement, soit $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q(A)$ soit diagonalisable et $Q'(A)$ inversible.
Montrer que A est diagonalisable.
3. Le résultat précédent est-il vrai sans l'hypothèse « $Q'(A)$ inversible » ?
4. Le résultat précédent est-il vrai si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Δ **Exercice 60.** *Diagonalisabilité de* A *et de* A^p.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. On suppose A inversible. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^p l'est.
2. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A^p est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)$.
3. Montrer que si A^p est diagonalisable, alors A^{p+1} l'est aussi.
4. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que B est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si B^2 est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, à valeurs propres positives, et $\mathrm{Ker}(B) = \mathrm{Ker}(B^2)$.

Exercice 61. *Diagonalisabilité et valeurs propres semi-simples.*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que si u est diagonalisable, alors on a $E = \mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si

$$\forall P \in \mathbb{C}[X], \quad E = \mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Im}(P(u)).$$

Exercice 62. *Un critère de diagonalisabilité.* *Mines*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si 0_n est le seul élément nilpotent de $\mathbb{C}[A]$.
2. Que dire du résultat précédent si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ si et seulement si 0_n est le seul élément nilpotent de $\mathbb{R}[A]$.

Exercice 63. *Réductions explicites de matrices* 3×3.

Réduire explicitement les matrices suivantes

$$\text{(i)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{(ii)} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 6 & 7 & -6 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{(iii)} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{(iv)} \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -5 & -5 & -7 \\ -2 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{(v)} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{(vi)} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 64. *Matrice à bordure a et intérieur b.* *Mines*

Soient $n \geq 3$ un entier, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et

$$M = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a & a \\ a & b & \cdots & b & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & b & a \\ a & a & \cdots & a & a \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M.
2. Cette matrice est-elle diagonalisable ?

Exercice 65. *Matrices circulantes et symétriques.* *Mines*

Soit $n \geq 3$. On appelle matrice circulante symétrique réelle toute matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 & \ddots & & a_2 \\ a_2 & a_1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a_1 & a_2 \\ a_2 & & \ddots & a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

où $(a_0, \dots, a_{\lfloor n/2 \rfloor}) \in \mathbb{R}^{\lfloor n/2 \rfloor + 1}$.

On pose $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ 1 & & & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On pose $\mathrm{S} = \mathrm{J} + \mathrm{J}^\top$.
   Déterminer les valeurs propres de S et une base de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de S.
2. Montrer que les matrices circulantes réelles symétriques sont exactement les polynômes réels en S.

Exercice 66. *Matrices c-circulantes.*

Soient $n \geq 2$ un entier, $c \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. On pose

$$\mathrm{M}_c(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{n-1} \\ c\alpha_{n-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \ddots & \vdots \\ c\alpha_{n-2} & c\alpha_{n-1} & \ddots & \ddots & \alpha_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \alpha_0 & \alpha_1 \\ c\alpha_1 & \cdots & c\alpha_{n-2} & c\alpha_{n-1} & \alpha_0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

Diagonaliser $\mathrm{M}_c(\alpha)$.

Exercice 67. *Un spectre à la Hurwitz.* *Mines*

Soient $n \geq 2$ un entier, $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & a & \cdots & a \\ b & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. Étudier la réduction de A dans les cas $ab = 0$ et $a = b$.

On suppose désormais $ab \neq 0$ et $a \neq b$.

2. Déterminer χ_{A}.
3. Déterminer $\mathrm{Sp}(\mathrm{A})$. La matrice A est-elle diagonalisable ?
4. Déterminer les sous-espaces propres de A.

Exercice 68. *Une ligne avec un zéro inséré.* *Mines*

Soit $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0 & a_n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et χ_A.
2. Donner une condition suffisante sur $(a_1, \dots, a_n)$ pour que A soit diagonalisable. Est-elle nécessaire ?

Exercice 69. *Une matrice tridiagonale réelle.* *Centrale*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha\beta & \alpha+\beta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \alpha\beta & \alpha+\beta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. La matrice A_n est-elle inversible ?
2. À quelle condition est-elle diagonalisable dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 70. *Matrices de Jacobi : valeurs propres simples.* *Mines*

Soient $(a_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels et $(b_k)_{k\geq 1}$ une suite de réels non nuls. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$M_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$$

et χ_n le polynôme caractéristique de M_n ; on pose $\chi_0 = 1$.

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$,
$$\chi_n = (X - a_n)\chi_{n-1} - b_{n-1}^2 \chi_{n-2}.$$
2. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, χ_n possède n racines réelles distinctes et, si $n \geq 2$, les racines de χ_n sont entrelacées avec les racines de χ_{n-1}, c'est à dire que chacun des intervalles ouverts délimités par deux racines consécutives de χ_n contient exactement une racine de χ_{n-1}. Que peut-on en déduire pour M_n ?
3. Soit $n \geq 2$. Montrer que $\mathrm{rg}(M_n - \lambda I_n) \geq n - 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Que peut-on en déduire pour les sous-espaces propres de M_n ?

Exercice 71. *Une diagonalisation un peu technique.*

Soit $n \geq 2$ et

$$A = \begin{pmatrix} i & & & & \\ & -i & & (1) & \\ & & \ddots & & \\ & (1) & & i & \\ & & & & -i \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Déterminer le spectre de A et si cette matrice est diagonalisable.

Exercice 72. *Renversement des polynômes et dérivation.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $S : P(X) \mapsto X^n P(1/X)$ est un endomorphisme diagonalisable de E, et le diagonaliser.
2. On note $D : P \mapsto P'$ l'endomorphisme de dérivation de E. Déterminer les valeurs propres de $D \circ S$.

Exercice 73. *Matrice de Kac.* *Centrale*

Soit $n \geq 2$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & (0) \\ n-1 & 0 & 2 & & \\ & n-2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 0 & n-1 \\ (0) & & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer l'endomorphisme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dont M est la matrice dans la base canonique.
2. Déterminer le rang de M et son spectre.

Δ **Exercice 74.** *Multiplication par* A *modulo* B.

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On suppose B scindé à racines simples et on note $n = \deg(B)$.

1. Montrer qu'en notant $u(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B, on définit un endomorphisme u de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$.
2. Déterminer le spectre de u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

On suppose désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, mais plus nécessairement que les racines de B sont simples.

4. Montrer que u est inversible si et seulement si A et B sont premiers entre eux.
5. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, déterminer $Q(u)(P)$.
   En déduire les valeurs propres de u.
6. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si toute racine α de B, de multiplicité m, est racine de $A - A(\alpha)$ de multiplicité au moins m.

Exercice 75. *Seize matrices par blocs.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Parmi toutes les matrices

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

dont les blocs A, B, C et $D \in M_n(\mathbb{R})$ sont soit la matrice nulle, soit l'identité, lesquelles sont diagonalisables ?

Exercice 76. *Diagonalisabilité de* $\begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. *Mines*

Soient $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et

$$B = \begin{pmatrix} A & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{K}).$$

Étudier la diagonalisabilité de B.

Exercice 77. *Diagonalisabilité de* $\begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix}$. *Centrale*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et
$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R}).$$
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si B l'est.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice
$$\begin{pmatrix} A & A \\ -A & 3A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$$
soit diagonalisable.

Exercice 78. *Matrices de Hadamard-Sylvester.*

On définit par récurrence une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $A_n \in M_{2^n}(\mathbb{R})$, par :

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_{n+1} = \begin{pmatrix} A_n & A_n \\ A_n & -A_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et calculer son polynôme caractéristique.

Exercice 79. *Diagonalisabilité de* $\begin{pmatrix} 0 & A \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$. *Mines*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et

$$M = \begin{pmatrix} 0_n & A \\ I_n & 0_n \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{C}).$$

Montrer que M est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable et inversible.

Exercice 80. *Cas particulier du théorème de Roth.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B \in M_p(\mathbb{R})$. On suppose que A et B n'ont qu'une valeur propre réelle (λ et μ, respectivement). Soit $C \in M_{n,p}(\mathbb{R})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

soit diagonalisable dans $M_{n+p}(\mathbb{R})$.

Δ **Exercice 81.** *Généralisation de plein d'exercices par blocs : produit de Kronecker.*

Pour $A = (a_{i,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$, on pose

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}B & \cdots & a_{m,n}B \end{pmatrix} \in M_{mp,nq}(\mathbb{K}).$$

1. Soient $A_1 \in M_{m_1,n_1}(\mathbb{K})$, $A_2 \in M_{m_2,n_2}(\mathbb{K})$, $B_1 \in M_{p_1,q_1}(\mathbb{K})$ et $B_2 \in M_{p_2,q_2}(\mathbb{K})$, avec $n_1 = m_2$ et $q_1 = p_2$. Montrer que $(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1A_2) \otimes (B_1B_2)$.

On considère désormais deux matrices carrées $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $B \in M_p(\mathbb{K})$.

2. Montrer que si A est semblable à $\widetilde{A}$ et B à $\widetilde{B}$, alors $A \otimes B$ est semblable à $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$.
3. On suppose A et B diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable, et déterminer les valeurs propres, les dimensions des sous-espaces propres et une base de vecteurs propres à partir des éléments propres de A et de B.
4. Que dire si A et B sont trigonalisables ?
5. Exprimer $\mathrm{tr}(A \otimes B)$ et $\mathrm{dét}(A \otimes B)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{dét}(A)$, $\mathrm{tr}(B)$ et $\mathrm{dét}(B)$.
6. On suppose A diagonalisable et non nulle. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
7. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et A non diagonalisable. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable si et seulement si B est nulle.
8. Le résultat précédent est-il vrai pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Exercice 82. *Diagonalisation et familles de projecteurs.*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe des projecteurs $p_1, \dots, p_r$ de E et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que

$$u = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i p_i \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in [\![1,r]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = 0.$$

2. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe des endomorphismes $v_1, \dots, v_r$ de E et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que

$$\forall k \in [\![0,r]\!], \quad u^k = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i^k v_i.$$

Montrer que dans ce cas, la famille $((\lambda_i, v_i))_{1 \leq i \leq r}$ est unique à permutation et ajout/retrait de couples $(\lambda, 0_{\mathscr{L}(E)})$ près.

Exercice 83. *Matrices vérifiant* $A^2 = (\mathrm{tr}(A))A + I_n$. *Mines*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2 = (\mathrm{tr}(A))A + I_n$.

1. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$.
2. Pour quels entiers n existe-t-il de telles matrices A ?

Exercice 84. *Dilatations et transvections.* *Mines*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$ et H un hyperplan de E. On note

$$\begin{aligned} G_H &= \{f \in GL(E) \mid \forall x \in H,\, f(x) = x\}, \\ D_H &= \{f \in G_H \mid f \text{ est diagonalisable}\}, \\ T_H &= (G_H \setminus D_H) \cup \{Id_E\}. \end{aligned}$$

1. Soit $u \in G_H \setminus \{Id_E\}$. Montrer l'équivalence des conditions suivantes :
   (i) $u \in D_H$,
   (ii) il existe un supplémentaire S de H dans E stable par u,
   (iii) u admet une valeur propre autre que 1,
   (iv) $\det(u) \neq 1$,
   (v) l'image de $u - Id_E$ n'est pas contenue dans H,
   (vi) il existe $\lambda \neq 1$ et une base de E dans laquelle la matrice de u est $\mathrm{diag}(\lambda, 1, \dots, 1)$.
2. Soit $f \in T_H$. Montrer que $\mathrm{Im}(f - Id_E) \subseteq H \subseteq \mathrm{Ker}(f - Id_E)$, puis calculer $(f - Id_E)^2$.
3. Montrer que T_H est un sous-groupe de GL(E) isomorphe au groupe $(H, +)$.
4. L'ensemble $D_H \cup \{Id_E\}$ est-il un sous-groupe de GL(E) ?

Exercice 85. *Matrices envoyant toute matrice sur une matrice diagonalisable.* *Mines*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ telles que, quelle que soit $B \in M_n(\mathbb{K})$, AB soit diagonalisable.
2. On suppose $n \geq 2$. Trouver les matrices $A \in M_n(\mathbb{K})$ telles que, pour toute $P \in GL_n(\mathbb{K})$, la matrice PA soit diagonalisable.

Exercice 86. *Diagonalisabilité de* $A - A^{-1}$.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ si et seulement si $A - A^{-1}$ l'est.

Que dire pour $A \in GL_n(\mathbb{C})$?

Exercice 87. *Diagonalisabilité et intersection des images.*

Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie non nulle. Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ deux à deux distincts tels que

$$\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Im}(u - \lambda_i Id_E) = \{0\}.$$

Exercice 88. *Diagonalisabilité et dualité.* *Mines*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que u est diagonalisable si et seulement si il existe n hyperplans $H_1, \dots, H_n$ stables sous u tels que $\bigcap_{i=1}^{n} H_i = \{0\}$.

Trigonalisation, nilpotents

Exercice 89. *Diagonaliser ou trigonaliser une matrice à paramètre.* *Mines*

Pour $c \in \mathbb{R}$, on note

$$A(c) = \begin{pmatrix} -c & -1 & c \\ -1 & 1-c & 1 \\ c & -1 & -c \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1. Pour quelles valeurs de c la matrice $A(c)$ est-elle diagonalisable ?
2. Pour chacune des autres valeurs de c, trouver $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}A(c)P$ soit triangulaire supérieure.

Exercice 90. *Polynôme caractéristique des puissances d'une matrice réelle.* *Centrale*

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que, si χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, alors χ_{A^k} l'est aussi.
2. On suppose $k \geq 2$. Trouver un contre-exemple à la réciproque.
3. On suppose χ_{A^2} scindé sur $\mathbb{R}$, à racines dans $\mathbb{R}^+$. Montrer que χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 91. *Matrice inversible dont les puissances sont triangulaires.*

Soient $n \geq 2$ et $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geq 2$, A^k est triangulaire supérieure.
2. Décrire les parties $K \subseteq \mathbb{N}$ telles que, pour toute $A \in GL_n(\mathbb{C})$, A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \in K$, A^k est triangulaire supérieure.
3. Le résultat de la première question subsiste-t-il si A n'est pas inversible ?

Exercice 92. *Analogue réel de la trigonalisation.*

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On veut montrer qu'il existe une base e de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure par blocs,

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} T_1 & * & \cdots & * \\ 0 & T_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & T_m \end{pmatrix},$$

où chaque bloc diagonal T_k est soit un réel λ_k (bloc de taille 1), soit un bloc de taille 2 de la forme

$$\begin{pmatrix} a_k & b_k \\ -b_k & a_k \end{pmatrix}, \quad (a_k, b_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*.$$

1. Soient $A \in M_n(\mathbb{R}) \subseteq M_n(\mathbb{C})$, $\lambda = a + ib \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ avec $b \neq 0$, et $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre associé, avec $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Montrer que (X, Y) est libre dans $\mathbb{R}^n$, que $AX = aX - bY$ et $AY = bX + aY$. En déduire que u possède une droite stable ou un plan stable.
2. Démontrer le résultat annoncé.
3. Exprimer χ_u en fonction des λ_k et des $a_k \pm ib_k$.

Exercice 93. *Perturbation nilpotente commutante du déterminant.* *Mines*

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente.

1. Montrer que $\det(M+N) = \det(M)$ pour toute matrice $M \in M_n(\mathbb{C})$ commutant avec N.
2. Ce résultat subsiste-t-il si M et N ne commutent pas ?
3. Réciproquement, soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\det(A+M) = \det(M)$ pour toute matrice $M \in GL_n(\mathbb{C})$ commutant avec A. Montrer que A est nilpotente.

♠⋆ **Exercice 94.** *Réduction de Jordan des nilpotents.*

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note

$$J_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{K}).$$

Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente.

1. Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{N}^*$ tels que N soit semblable à la matrice diagonale par blocs
$$\begin{pmatrix} J_{k_1} & & \\ & \ddots & \\ & & J_{k_s} \end{pmatrix}.$$
2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, exprimer le nombre de blocs de taille k dans une telle matrice à l'aide des entiers $\dim(\mathrm{Ker}(N^j))$, $j \in \mathbb{N}$. Que peut-on en conclure ?

Δ **Exercice 95.** *Matrices de carré nul, de cube nul : rang et similitude.* *Mines*

1. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $A^2 = B^2 = 0$. Montrer que A et B sont semblables si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.
2. Trouver deux matrices $A, B \in M_7(\mathbb{K})$ non semblables telles que $A^3 = B^3 = 0$, $A^2 \neq 0$, $B^2 \neq 0$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B)$.

Exercice 96. *Produits de matrices diagonalisables.*

Montrer que :

1. toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est produit de matrices diagonalisables,
2. toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est produit de matrices diagonalisables,
3. toute matrice de $GL_n(\mathbb{C})$ est produit de *deux* matrices diagonalisables.
4. (⋆) toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est produit de *deux* matrices diagonalisables.

♠ **Exercice 97.** *Trigonalisabilité d'un endomorphisme induit.*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et V un sous-espace de E stable par u. Montrer que si u est trigonalisable, il en est de même de l'endomorphisme u_V induit par u sur V.

Exercice 98. *Matrices réelles* A *telles que* PA *soit toujours trigonalisable.* *Mines*

Quelles sont les $A \in M_n(\mathbb{R})$ telles que, pour toute $P \in GL_n(\mathbb{R})$, PA soit trigonalisable (dans $M_n(\mathbb{R})$) ?

Exercice 99. *Racines r-ièmes d'une matrice triangulaire à spectre simple.* *X*

Soient $r \geq 2$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux $a_1, \dots, a_n$ sont deux à deux distincts.

1. Montrer que toute matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $T^r = A$ est triangulaire supérieure.
2. Combien y a-t-il de telles matrices ?
3. Donner une matrice $B \in M_2(\mathbb{C})$ triangulaire telle que pour tout $r \geq 2$, l'équation $C^r = B$ admette des solutions non triangulaires dans $M_2(\mathbb{C})$.
4. Donner une matrice $B \in M_2(\mathbb{C})$ telle que, pour tout $r \geq 2$, l'équation $C^r = B$ n'ait aucune solution dans $M_2(\mathbb{C})$.

Exercice 100. *Deux matrices rendues triangulaires par une même équivalence.* *Mines*

Soient $n \geq 1$ et $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer qu'il existe $X \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que la famille (AX, BX) soit liée.
2. Montrer qu'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telles que $Q^{-1}AP$ et $Q^{-1}BP$ soient triangulaires supérieures.

⋆ **Exercice 101.** *Deux endomorphismes triangulaires dans une même base, à l'ordre près.* *ENS*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, a et b deux endomorphismes de E trigonalisables.

Montrer qu'il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E et une permutation $\sigma \in S_n$ telles que la matrice de a dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ et la matrice de b dans la base $(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 102. *Endomorphisme à une seule valeur propre.*

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$. On suppose que $\mathrm{Sp}(f)$ est un singleton $\{\lambda\}$.

1. Calculer le polynôme caractéristique de f.
2. À quelle condition l'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
3. Justifier que l'endomorphisme $f - \lambda \mathrm{Id}_E$ est nilpotent.
4. Réciproquement, soit $g \in \mathscr{L}(E)$ et $\mu \in \mathbb{C}$ tels que $g - \mu \mathrm{Id}_E$ soit nilpotent. Montrer que μ est l'unique valeur propre de g.

Exercice 103. *Matrice de Pascal triangulaire.* *X*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \binom{2}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \binom{2}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \binom{2}{2} & \cdots & \binom{n}{2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix} \in M_{n+1}(\mathbb{R}).$$

1. La matrice M est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que le sous-groupe de $GL_{n+1}(\mathbb{R})$ engendré par M est isomorphe à $\mathbb{Z}$ et expliciter M^{-1}.
3. Déterminer π_M.

Exercice 104. *Matrices* $P - \lambda M$ *toutes inversibles.* *Mines*

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer que M est non inversible si et seulement si il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad P + \lambda M \in GL_n(\mathbb{C}).$$

Le résultat tient-il si l'on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 105. *Nilpotence de* AB *et de* BA. *Mines*

Soient $n \geq 2$ et $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ non inversibles telles que $(AB)^n = 0$.

1. Montrer que $(BA)^n = 0$.
2. On suppose que $(AB)^{n-1} \neq 0$ et $(BA)^{n-1} \neq 0$. Montrer que $\dim(\mathrm{Ker}((AB)^k)) = k$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.
3. En déduire que dans ce cas $\mathrm{Ker}(AB) = \mathrm{Ker}(B)$ et $\mathrm{Ker}(BA) = \mathrm{Ker}(A)$.
4. Conclure que $(AB)^{n-1} = 0$ ou $(BA)^{n-1} = 0$.

Exercice 106. *Matrices telles que* $A^3 - 4A^2 + 4A = 0$ *et* $\mathrm{tr}(A) = 8$.

Soit $n \geq 4$. Trouver le nombre de classes de similitude des matrices $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$A^3 - 4A^2 + 4A = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{tr}(A) = 8.$$

⋆ **Exercice 107.** *Classes de similitude des matrices de cube nul.* *ENS*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien y a-t-il de classes de similitude de $M_n(\mathbb{R})$ constituées de matrices M telles que $M^3 = 0$?

⋆ **Exercice 108.** *Matrices dont tous les mineurs principaux sont nuls.*

Pour $\sigma \in S_n$, on note $P_\sigma \in GL_n(\mathbb{K})$ la matrice de permutation définie par $P_\sigma e_j = e_{\sigma(j)}$, où $(e_1, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Soit $M \in M_n(\mathbb{K})$.

Montrer qu'il existe $\sigma \in S_n$ telle que $P_\sigma M P_\sigma^{-1}$ soit triangulaire supérieure stricte si et seulement si, pour toute partie non vide I de $[\![1, n]\!]$, la matrice $(M_{i,j})_{(i,j)\in I^2}$ n'est pas inversible.

Exercice 109. *Sous-espace engendré par les matrices nilpotentes.* *Mines*

Dans $M_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 2$, soient $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes et $\mathcal{H}$ celui des matrices de trace nulle.

1. Montrer que $\mathcal{H} = \mathrm{Vect}(\mathcal{N})$.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C}))$ tel que $\mathrm{tr}(f(I_n)) = 0$ et $f(N) = 0$ pour toute $N \in \mathcal{N}$. Montrer que $f^2 = 0$.

Exercice 110. *Nilpotence le long d'une droite de matrices.* *X*

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts tels que, pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, $A + \lambda_i B$ soit nilpotente. Montrer que A et B sont nilpotentes.

Polynômes d'endomorphisme, polynôme minimal, polynômes annulateurs

Δ **Exercice 111.** *Quatre identités polynomiales tombant aux Mines.*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$. Montrer que $\det(A) > 0$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A - I_n$. Montrer que n est pair et que $\det(A) = 1$.
3. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 - A$. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.
4. Soit $\mathscr{C} = \left\{A \in M_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, A^3 + A = 10I_n\right\}$. Déterminer $\{\det(A) \mid A \in \mathscr{C}\}$.

Exercice 112. *Endomorphismes vérifiant $f^3 + f = 0$.* *Mines*

Soit f un endomorphisme non nul de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^3 + f = 0$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})) \geq 1$.
2. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$. Montrer que $(x, f(x))$ est libre. En déduire que $\dim(\mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})) = 2$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Montrer que $\left\{g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3) \,\middle|\, g \circ f = f \circ g\right\} = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2)$.
4. Trouver les $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ tels que $u^2 = f$. (On remarquera qu'un tel u commute avec f.)
5. Déterminer les sous-espaces de $\mathbb{R}^3$ stables par f.
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $g^3 + g = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de g est diagonale par blocs, de la forme
$$\mathrm{diag}(0, \dots, 0, J, \dots, J), \quad \text{où} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
En déduire que le rang de g est pair.

Exercice 113. *Noyaux et images du pgcd et du ppcm.* *X*

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $f \in \mathscr{L}(E)$, P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, $D = P \wedge Q$ leur pgcd et $M = P \vee Q$ leur ppcm.

1. Montrer que
$$\mathrm{Ker}(D(f)) = \mathrm{Ker}(P(f)) \cap \mathrm{Ker}(Q(f)), \quad \mathrm{Ker}(M(f)) = \mathrm{Ker}(P(f)) + \mathrm{Ker}(Q(f)),$$
$$\mathrm{Im}(D(f)) = \mathrm{Im}(P(f)) + \mathrm{Im}(Q(f)), \quad \mathrm{Im}(M(f)) = \mathrm{Im}(P(f)) \cap \mathrm{Im}(Q(f)).$$
2. On suppose E de dimension finie. Simplifier la preuve précédente.

Exercice 114. *Une condition de trace rationnelle.* *Mines*

1. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 - A = 2I_n$ et $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Q}$.
2. Calculer $\det(A)$ pour une telle matrice.
3. Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $A \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $I_n + A + A^2 + A^3 + A^4 = 0$ et $\mathrm{tr}(A) \in \mathbb{Q}$. Que vaut $\det(A)$ pour une telle matrice ?

Exercice 115. *Vecteurs tous périodiques.* *Centrale*

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, \quad \exists p \in \mathbb{N}^*, \quad A^p X = X.$$

Montrer que A est diagonalisable.

♠ **Exercice 116.** *Version forte de Cayley-Hamilton.*

Soient $\mathbb{K}$ un corps et $M \in M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que π_M et χ_M ont les mêmes facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 117. *Minimal d'un endomorphisme de rang r.* *Mines*

Soit u un endomorphisme de rang r d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

1. Montrer que $\deg(\pi_u) \leq \min(n, r+1)$.
2. Pour $r \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![2, \min(n, r+1)]\!]$, donner une matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$ de rang r telle que $\deg(\pi_M) = j$.
3. Plus généralement, montrer que pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$ non nul, $\deg(\pi_u) \leq \mathrm{rg}(Q(u)) + \deg(Q)$.
4. On suppose que $\deg(\pi_u) = n$. Montrer que les sous-espaces propres de u sont des droites.

Exercice 118. *Éléments nilpotents de* $\mathbb{K}[A]$. *Mines*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(A)$ soit nilpotente.
2. Soit $\mathbb{K}$ un corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(A)$ soit nilpotente.

Exercice 119. *Matrices engendrant un corps.* *X*

Soient $\mathbb{K}$ un corps, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Quels sont les $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) \in GL(E)$? Montrer qu'alors $P(u)^{-1} \in \mathbb{K}[u]$.
2. À quelle condition sur u est-il vrai que $\mathbb{K}[u] \subseteq GL(E) \cup \{0\}$?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $M \in M_n(\mathbb{C})$ pour que $\mathbb{C}[M] \subseteq GL_n(\mathbb{C}) \cup \{0\}$.
4. Même question en remplaçant partout $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$.

Exercice 120. AB *est un polynôme en* A. *Mines*

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(0) \neq 0$ et $AB = P(A)$.

Montrer que A est inversible, puis que A et B commutent.

Exercice 121. *Annulateur à deux racines simples et projecteurs spectraux.* *Mines*

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ distincts et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $(u - a\mathrm{Id}) \circ (u - b\mathrm{Id}) = 0$. On pose

$$p = \frac{1}{b-a}(u - a\mathrm{Id}) \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{a-b}(u - b\mathrm{Id}).$$

   Déterminer p^2, q^2, $p \circ q$, $q \circ p$ et $p + q$, puis montrer que $E = \mathrm{Ker}(p) \oplus \mathrm{Ker}(q)$.
2. Identifier $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(q)$, exprimer u à l'aide de p et q et en déduire que u est diagonalisable.

Δ **Exercice 122.** *Semi-simplicité de* 0. *Mines*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si f admet un polynôme annulateur P tel que $X \mid P$ et $X^2 \nmid P$.
2. En déduire que, pour $M \in M_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Ker}(M) \oplus \mathrm{Im}(M) = \mathbb{K}^n$ si et seulement si $M \in \mathrm{Vect}\left\{M^k \,\middle|\, k \geq 2\right\}$.

Exercice 123. *Matrices n'ayant qu'un nombre fini de puissances.* *Mines*

1. Quelles sont les $M \in M_n(\mathbb{C})$ telles que l'ensemble $\left\{M^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ soit fini ?
2. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Déterminer l'ensemble des $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\left\{f^k(x) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$ soit fini. Montrer en particulier que, si un tel f est inversible, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k = \mathrm{Id}$.

Exercice 124. *Matrices annulées par* $1 + X + X^2 + X^3 + X^4$. *Centrale*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $M^4 + M^3 + M^2 + M + I_n = 0$.

1. Montrer que $|\mathrm{tr}(M)| \leq n$.
2. Étudier le cas d'égalité.
3. Étudier le cas $M \in M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 125. *Polynômes annulateurs forçant la trace nulle.* *X*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{C})$ l'on ait

$$P(A) = 0 \Longrightarrow \mathrm{tr}(A) = 0.$$

Exercice 126. *Polynômes annulateurs imposant* $\det(A) > 0$.

Soit $n \geq 2$. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall A \in M_n(\mathbb{R}), \quad P(A) = 0 \Rightarrow \det(A) > 0.$$

Exercice 127. *Polynôme minimal de l'inverse.* *Mines*

Soit $A \in GL_n(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme minimal de A^{-1} en fonction du polynôme minimal de A.

Exercice 128. *Polynôme minimal et extension du corps.* *X*

Soient $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$ deux corps et $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que le polynôme minimal de A vue dans $M_n(\mathbb{K})$ est égal à celui de A vue dans $M_n(\mathbb{L})$.

Exercice 129. *Relation de liaison entre translations.* *Mines*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \quad P(X + n) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X + k).$$

Expliciter les a_k.

Exercice 130. *Polynôme minimal d'une matrice triangulaire par blocs.*

Soient $A \in M_p(\mathbb{K})$, $D \in M_q(\mathbb{K})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{K})$ et

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \in M_{p+q}(\mathbb{K}).$$

1. Montrer que $\pi_A \vee \pi_D$ divise π_M, et que π_M divise $\pi_A \pi_D$. Que dire si $\pi_A \wedge \pi_D = 1$?
2. Donner un exemple où π_M n'est égal ni à $\pi_A \vee \pi_D$ ni à $\pi_A \pi_D$.

Exercice 131. *Polynôme minimal d'un polynôme en la dérivation.*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, D l'endomorphisme de dérivation de $\mathbb{C}_n[X]$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Déterminer le polynôme minimal de P(D).

Exercice 132. *Existence de matrices annulées par un polynôme donné.* *Centrale*

Soient $\mathbb{K}$ un corps, $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant. On cherche à quelle condition il existe $M \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P(M) = 0$.

1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $P(M) = 0$.
2. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $P(M) = 0$ si et seulement si P a une racine réelle ou n est pair.
   Application : pour quels n existe-t-il $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + 2A + 5I_n = 0$?
3. On suppose P irréductible sur $\mathbb{K}$. Montrer qu'il existe $M \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P(M) = 0$ si et seulement si $\deg(P)$ divise n.
   Application : pour quels n existe-t-il $A \in M_n(\mathbb{Q})$ telle que $A^3 - A - I_n = 0$?
4. Généraliser au cas d'un polynôme P quelconque.

Exercice 133. *Couples (polynôme minimal, polynôme caractéristique).*

Soient P et Q deux polynômes unitaires non constants de $\mathbb{K}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $\pi_M = P$ et $\chi_M = Q$.

⋆ **Exercice 134.** *Itérés égaux de deux vecteurs.* *ENS*

Soient $n \geq 2$ un entier, A et B dans $GL_n(\mathbb{C})$, X et Y dans $\mathbb{C}^n$.

1. On suppose que $A^k X = B^k Y$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X = Y$.
2. Déterminer le plus petit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour toutes matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$ et tous vecteurs X, Y de $\mathbb{C}^n$, la condition $A^k X = B^k Y$ pour tout $k \in [\![1, N]\!]$ implique $X = Y$.

Exercice 135. *Inverse polynomial en dimension finie et infinie.* *Centrale*

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $\mathbb{K}[f]$ est de dimension $\deg(\pi_f)$.
2. Dans le même cadre, montrer que si f est bijective, alors $f^{-1} \in \mathbb{K}[f]$.
3. Donner un exemple d'endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension infinie dont le seul polynôme annulateur est le polynôme nul.
4. Donner un exemple d'automorphisme f d'un espace vectoriel de dimension infinie tel que $f^{-1} \notin \mathbb{K}[f]$.

Exercice 136. *Polynômes unipotents en un nilpotent.* *Mines*

Soit $N \in M_n(\mathbb{C})$ nilpotente. Montrer que $G = \{P(N) \mid P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } P(0) = 1\}$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$.

Δ **Exercice 137.** *Calcul fonctionnel (version diagonalisable).* *Mines*

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A = P(A^3)$.
2. Soient A et B $\in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables telles que $A^3 = B^3$. Montrer que $A = B$. Les hypothèses « A et B réelles » et « A et B diagonalisables » sont-elles nécessaires ? Pour $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisables, montrer que la conclusion subsiste si l'on suppose de plus $A^2 = B^2$.
3. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est injective sur $\mathbb{R}$, et $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisables vérifiant $P(A) = P(B)$. Montrer que $A = B$. Le résultat subsiste-t-il pour des matrices complexes diagonalisables, avec $P = X^3 + X + 1$?
4. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, avec B diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$, telles que $AB^3 = B^3A$. Montrer que $AB = BA$. Proposer une généralisation. Le résultat subsiste-t-il si B est seulement supposée diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$?

Exercice 138. *Diagonalisabilité et structure de l'algèbre $\mathbb{K}[f]$.* *Mines*

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in \mathscr{L}(E)$. On munit $\mathbb{K}^r$ ($r \in \mathbb{N}^*$) de sa structure de $\mathbb{K}$-algèbre produit (opérations terme à terme). Le but est de démontrer que $\mathbb{K}[f]$ est isomorphe, en tant que $\mathbb{K}$-algèbre, à $\mathbb{K}^r$ pour un certain $r \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si f est diagonalisable, et que dans ce cas $r = |\mathrm{Sp}(f)|$.

1. On suppose f diagonalisable, de valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Montrer que $\Phi : \mathbb{K}[f] \to \mathbb{K}^r, P(f) \mapsto (P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_r))$ est bien définie et est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.
2. Réciproquement, soit $\psi : \mathbb{K}[f] \to \mathbb{K}^r$ un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. Montrer que f est diagonalisable et que $r = |\mathrm{Sp}(f)|$.

Indications

Exercice 1. Remarquer qu'en notant pour tout x, λ_x qui convient (et est unique si $x \neq 0_E$) il suffit de montrer que pour tous x, y, $\lambda_x = \lambda_y$.

Par exemple faire une disjonction de cas entre libre et liée.

Exercice 2.

1. Pour calculer $Q(C(P))$ on peut travailler sur la base canonique. Pour calculer $\chi_{C(P)}$ soit Cayley-Hamilton une fois $\pi_{C(P)}$ connu, ou bien développer et récurrence (méthode de Horner).
2. Cela dépend donc des racines de P et de leurs multiplicités.

Exercice 3.

1. On peut calculer à la main $\chi_A = X(X^2 + (a^2 + b^2 + c^2))$ puis résoudre une équation aux valeurs propres ou plus simplement remarquer qu'il s'agit de la matrice dans la base canonique de
$$X \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge X,$$
et conclure à partir de la géométrie.
2. Compter les valeurs propres dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$.

Exercice 4.

1. Poser $H = (1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ bien connue car de rang 1, puis $A = (a-b)I_n + bH$.
2. Utiliser la diagonalisation, ou bien $H^2 = nH$ et le binôme.
3. L'inversibilité se lit sur les valeurs propres. Chercher A^{-1} sous la forme $\alpha I_n + \beta H$.

Exercice 5.

1. Disjonction de cas selon le rang de A : pour n et $n-1$ utiliser $A\,Com(A)^\top = dét(A)I_n$, pour $\leq n-2$ que dire des mineurs d'ordre $n-1$ de A ?
2. Remarquer que $A\,Com(A)^\top = Com(A)^\top A = dét(A)I_n$.
3. Le cas de $rg(A) \leq n-2$ n'est pas très compliqué, idem pour le cas inversible. Pour le dernier cas il faut une unique valeur. Dans tous les cas on obtient $\prod_{j\neq i} \lambda_j$.
4. Par densité des matrices diagonalisables et la question précédente, ou par trigonalisation en remarquant que $Com(MN) = Com(M)\,Com(N)$.

Exercice 6.

1. On a alors pour x non nul $u \mapsto u(x)$ injective sur V.
2. Montrer que pour $u, v \in V \setminus \{0\}$, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $v^{-1} \circ u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas inversible, donc $u - \lambda v \in V$ non plus, d'où $u = \lambda v$.
3. Même argument.
4. Penser à $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-sev de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$, ou alors les quaternions.

Remarque culturelle : la borne optimale dans $\mathbb{R}$ est le nombre de « Radon-Hurwitz », $\rho(n) = 8(v_2(n)//4) + 2^{v_2(n)\%4}$ où v_2 est la valuation 2-adique et // le quotient entier, mais c'est beaucoup plus compliqué.

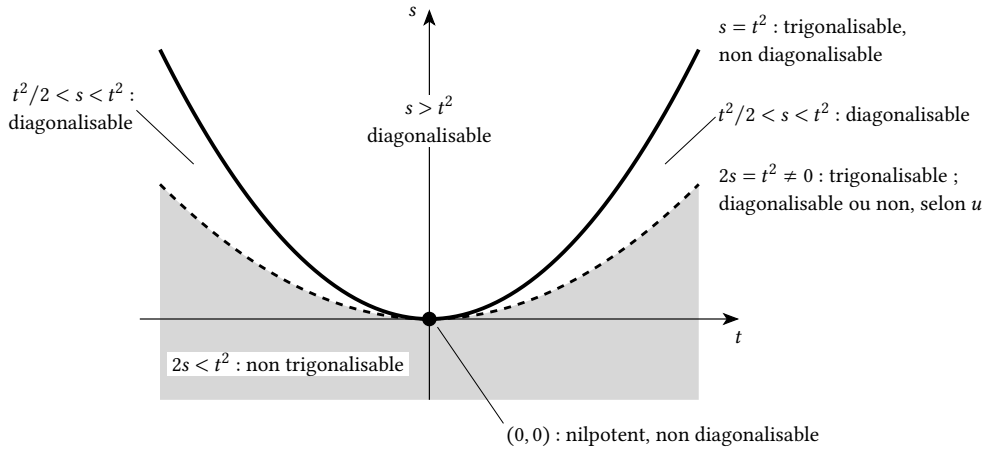
Exercice 7.

1. Cours.
2. Remarquer que dans $M_n(\mathbb{K}(X))$ on a $XI_n - A^{-1} = -XA^{-1}(X^{-1}I_n - A)$, et en déduire que $\chi_{A^{-1}}(X) = \frac{(-1)^n}{\det(A)} X^n \chi_A(1/X)$, c'est à dire $\sum_{k=0}^{n} \frac{c_{n-k}}{c_0} X^k$ avec $c_n = 1$.
3. Ou bien utiliser la question précédente et la densité. Alternativement remarquer que cela revient à calculer $\chi_A'(0)$ et qu'on sait dériver une expression de la forme $t \mapsto \det(C_1(t), \dots, C_n(t))$.
4. Plusieurs options : trigonaliser (dans $\mathbb{C}$) et utiliser la petite somme de Newton. Ou bien dans la formule explicite récupérer tous les coefficients donnant X^{n-2}.

Exercice 8. Cf. cours, la disjonction de cas est (droite et hyperplan) $\mathrm{Im}(u) \subseteq \mathrm{Ker}(u)$ ou $\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$. Deux cas : $\mathrm{tr}(u) = 0$ et $\mathrm{tr}(u) \neq 0$.

Exercice 9.

1. Par rang on cherche seulement deux coefficients. Par exemple trigonaliser sur $\mathbb{C}$. On obtient finalement $X^{n-2}\left(X^2 - tX + \frac{t^2 - s}{2}\right)$.
2. Se lit sur χ_u, c'est donc ssi $2s - t^2 \geq 0$.
3. La condition sur $2s - t^2$ correspond au caractère scindé ou non dans $\mathbb{R}$, la condition sur $s - t^2$ correspond à la multiplicité de 0 dans χ_u (et à l'adéquation avec la dimension du noyau).
4. Regarder $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
5. On obtient



Exercice 10.

1. Une matrice nilpotente est trigonalisable avec des zéros sur la diagonale. Dans l'autre sens trigonaliser et utiliser Vandermonde, pour montrer que si $r \geq 1$, les λ_i sont distincts et non nuls et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{i=1}^{r} m_i \lambda_i^k = 0$ alors tous les m_i sont nuls.
2. Faire de même un Vandermonde avec comme λ les éléments de $(\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)) \setminus \{0\}$ et comme m les différences des multiplicités.
3. Cela revient à montrer que $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ est entièrement déterminé à permutation près par les $S_k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$. Il s'agit des **identités de Newton**. Une façon de faire est alors de :
   - Remarquer que la série $\sum_k S_{k+1} X^k$ correspond à $-\frac{Q'}{Q}$ où $Q(X) = \prod_{i=1}^{n}(1 - \lambda_i X)$, c'est à dire le polynôme réciproque,
   - Réécrire cela en $Q' = -Q \sum S_{k+1} X^k \pmod{X^n}$.

- Obtenir une relation de récurrence sur les coefficients de Q à partir des S_k.

Ou alors remarquer qu'avec $P = \prod_i (X - \lambda_i)$ on a $P' = \sum_i \frac{P(X) - P(\lambda_i)}{X - \lambda_i}$.

Ou alors (pour les 5/2), remarquer que, pour $|t|$ assez petit, on a $\det(I_n - tA) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{tr}(A^k)}{k} t^k\right)$ (en dérivant un produit).

Exercice 11.

1. Par exercice classique M^p est nilpotente, conclure.
2. Trigonaliser dans un sens. Montrer par les traces de puissances que $I_n - M$ est nilpotente.
3. Développer $\mathrm{tr}((A + tB)^{k+1})$ en polynôme en t et regarder le coefficient en t.
4. Par exemple décomposer la matrice de permutation $P_{(1\ 2\ 3)}$ en somme de deux nilpotentes (attention à l'ordre de A et B).

Exercice 12.

1. Le coefficient de X^{n-2} dans χ_M est $\frac{1}{2}((\mathrm{tr}(M))^2 - \mathrm{tr}(M^2))$ (par exemple passer par une trigonalisation ou regarder les autres sur le même thème).
2. Sens direct : $M = 0$ pour la nilpotence puis utiliser la question précédente pour montrer que pour tout M, $\mathrm{tr}(MBA) = 0$.
   Sens réciproque : factoriser par $I_n - \lambda^{-1}B$, c'est à dire $AM + B - \lambda I_n = (I_n - \lambda^{-1}B)(AM - \lambda I_n)$.

Exercice 13.

1. Trigonaliser A et reconnaître la dérivée logarithmique de χ_A.
2. La première égalité est un télescopage, à conclure par Cayley-Hamilton. Pour la seconde, utiliser la question 1 hors du spectre puis un argument polynomial.
3. Identifier les coefficients des deux expressions de $\mathrm{tr}(Q(z))$.
4. Voir les relations de la question précédente (et Cayley-Hamilton pour $k = n$) comme un système triangulaire en $(a_1, \dots, a_k)$ et utiliser les formules de Cramer.

Exercice 14.

1. On a $BA = A^{-1}(AB)A$.
2. Complément de Schur d'un côté ou de l'autre. Pour récupérer $\lambda = 0$ ok si le corps est infini (sinon, on peut faire le calcul dans $\mathbb{K}(X)$).
3. C'est vrai si inversible et continue en les coefficients de A.
4. Formule classique, on obtient $(I_n - BA)^{-1} = I_n + B(I_n - AB)^{-1}A$. Tel quel on ne peut pas conclure il faut ensuite des multiplicités.
5. Remarquer que $\dim(\mathrm{Ker}((M - \lambda I_n)^k))$ pour k assez grand est l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine de χ_M. Pour récupérer 0 faire par degré.
6. On a $\mathrm{tr}((AB)^k) = \mathrm{tr}(A(BA)^{k-1}B) = \mathrm{tr}((BA)^{k-1}BA)$. Montrer que χ_M est entièrement déterminé par les $\mathrm{tr}(M^k)$, par exemple trigonaliser et Vandermonde.
7. Avec $A = PJ_rQ^{-1}$, que penser de $C = Q^{-1}BP$? Et pour $A = J_r$ un calcul par blocs montre que c'est un déterminant triangulaire par blocs.
8. Au pire travailler dans $\mathbb{K}(X)[Y]$. Pour « évaluer » en $X = 0$ il faut faire attention à ce qu'il s'agisse finalement de polynômes et pas de fractions rationnelles et constater que $P(X, Y) \mapsto P(0, Y)$ est un morphisme d'algèbres.
9. Regarder le produit à gauche/à droite avec $\begin{pmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$. Puis déterminant triangulaire par blocs.

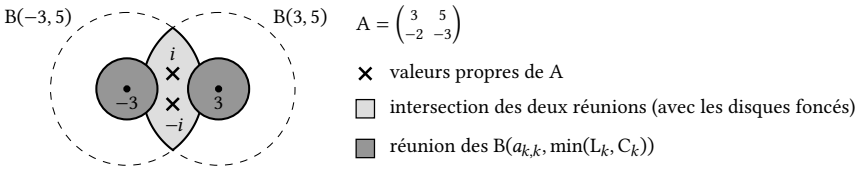
Exercice 15. Regarder l'exercice sur le cas carré d'abord puis adapter. Le seul enjeu est la valeur propre 0. On obtient d'ailleurs $X^p\chi_{AB} = X^n\chi_{BA}$.

Exercice 16.

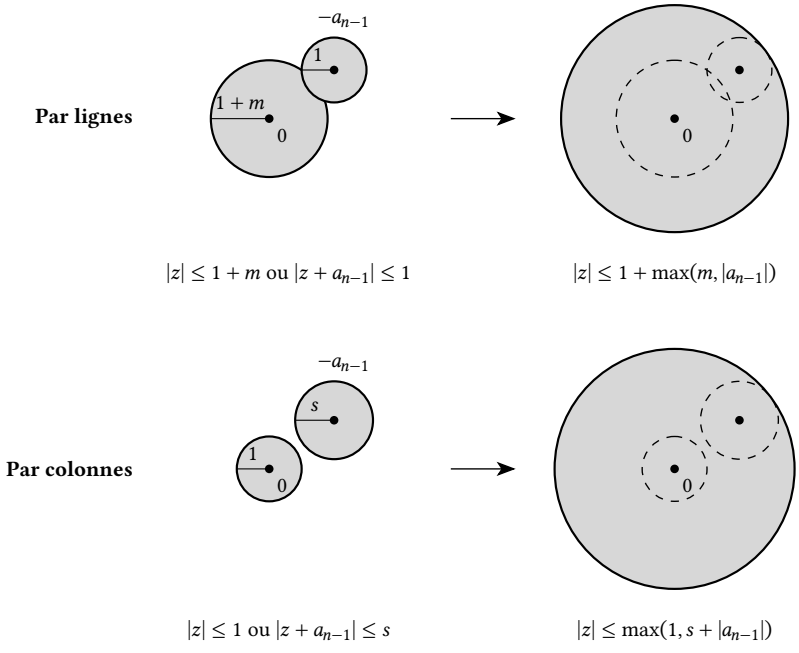
1. Si $f(g(x)) = \lambda x$ alors $g(f(g(x))) = \lambda g(x)$, donc g envoie $E_\lambda(f \circ g)$ dans $E_\lambda(g \circ f)$ injectivement.
2. Critère par somme des dimensions.
3. Prendre par exemple un produit nilpotent et l'autre nul.
4. Remarquer que $BA(BA)^k = B(AB)^kA$. Pour la CS il suffit de faire par critère de polynôme annulateur scindé à racines simples.
5. Si AB n'est pas inversible, écrire $X\pi_{AB} = X^2Q$ et appliquer le lemme des noyaux. Sur $\mathrm{Ker}((BA)^2)$, l'induit du carré est nul, et un endomorphisme nilpotent est diagonalisable si et seulement si il est nul.

Exercice 17.

1. Partir de $AX = 0_{\mathbb{C}^n}$, écrire chaque ligne sous la forme $a_{i,i}x_i = -\sum_{j\neq i} a_{i,j}x_j$ et choisir un i pertinent.
2. Étudier l'inversibilité de $A - \lambda I_n$.
3. Pour passer des lignes aux colonnes, transposer peut être intéressant.
   Attention : on ne peut pas remplacer cette intersection d'unions par une union d'intersections, comme le montre le schéma suivant.



4. Appliquer les questions précédentes à la matrice compagnon de P.



5. Les valeurs propres réelles sont strictement positives, grouper deux par deux les autres.

Exercice 18. Partir comme Geršgorin en écrivant $AX = \lambda X$. Puis faire C-S sur (le carré) d'une ligne, diviser par L_i et sommer sur les lignes.

Exercice 19.

1. Disques de Geršgorin, puis trigonaliser.
2. Par pivot et homogénéité on peut se ramener au cas de la première question avec de plus les coefficients diagonaux positifs.
3. Application directe de la question précédente.

Exercice 20.

1. Une valeur propre est un défaut d'injectivité et en dimension finie non bijectif ssi non injectif.
2. Pour tout λ, $D - \lambda Id_E$ est non injectif et surjectif.
3. Pas de valeur propre (car problème de Cauchy) mais un défaut de surjectivité et le spectre est $\{0\}$.
4. Remarquer que si v et w commutent et vw est bijectif, alors v et w le sont (et que c'est faux sans la commutativité). Dans un sens écrire $P(u) - P(\lambda)Id_E = (u - \lambda Id_E)Q(u)$. Dans l'autre scinder $P - \mu$.

Exercice 21. Remarquer que, si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $P(D) = P(0)Id_{\mathbb{K}[X]} + \sum_{k=1}^{n} a_k D^k$.

Si $P(0) = 0$ alors les polynômes constants sont dans le noyau.

Si $P(0) \neq 0$ montrer au choix que l'image d'une famille échelonnée est échelonnée ou expliciter l'inverse par nilpotence de D sur chaque $\mathbb{K}_n[X]$ et car X et P premiers entre eux.

Pour la suite, écrire $P = X^m Q$ avec $Q(0) \neq 0$, de sorte que $P(D) = D^m \circ Q(D)$. Pour les éléments propres, appliquer ce qui précède à $P - \lambda$.

Exercice 22.

1. Remarquer que T est bijectif et que $u = T^{-1}v$ est donné par $u_0 = v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n+1)v_n - nv_{n-1}$. Il suffit donc de déterminer le premier terme non nul d'un éventuel vecteur propre. On obtient que les valeurs propres sont les $\frac{1}{m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, et que les espaces propres associés sont des droites.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}((T - \lambda Id_E)^2) = \mathrm{Ker}(T - \lambda Id_E)$ puis en déduire la stationnarité.

Exercice 23.

1. Montrer en majorant la différence (écrire une constante comme une intégrale bien choisie) que $\frac{1}{x^{p+1}} \int_0^x t^p f(t)\mathrm{d}t \to \frac{1}{p+1} f(0)$ quand $x \to 0$.
2. Écrire l'équation aux valeurs propres, la mettre sous une forme plus simple et obtenir une EDO. On obtient que les valeurs propres sont exactement les éléments de $\left]0, \frac{1}{p+1}\right]$.

Exercice 24.

1. Pour la continuité couper et majorer. Remarquer que $T(f)'' = -f$ et $T(f)(0) = T(f)(1) = 0$ d'où l'injectivité et la non surjectivité.
2. Résoudre $\lambda f'' = -f$ avec conditions nulles aux bords.

Exercice 25. Montrer que toutes les valeurs propres sont égales (et donc que u est une homothétie). Pour cela écrire x_{n+1} comme CL (les coefficients sont non nuls) des autres et appliquer u.

Exercice 26.

1. Noter $H = \mathrm{Ker}(e_i^*)$ et déterminer une application injective de $E_\lambda(A) \cap H$ dans $E_\lambda(\widetilde{A})$ (retirer la i-ème coordonnée).
2. Non, regarder par exemple l'identité.

Exercice 27. Cas particulier d'un exercice précédent, remarquer que $X\pi_{BA}$ est annulateur de AB.

Exercice 28.

1. La question 2 montre qu'il faudra trouver un défaut d'injectivité de $u - \mathrm{Id}_E$. Faire un schéma ou écrire $V = a + \widetilde{V}$, pour montrer que $(u - \mathrm{Id}_E)(\mathrm{Vect}(V)) \subseteq \widetilde{V}$ d'où la non surjectivité d'un induit.
2. Tout se vérifie bien, et par degré u n'a pas de valeur propre.

Exercice 29. Remarquer que dans le cas scalaire, on peut montrer que pour $\omega \in \mathbb{U}_m$, on a

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_m \\ a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & \omega a_m \\ \omega a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \omega a_2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \omega a_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et de manière générale montrer qu'avec A une matrice dans une base adaptée on a $A \sim \omega A$.

Exercice 30. Traiter le cas $\lambda = 0$ d'abord.

Si $\lambda \neq 0$ se ramener à un projecteur.

Exercice 31. Si $n \geq 2$ que dire de $A = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}$ pour t et s grands et de même signe ?

Exercice 32. Remarquer que $A^{-1}H$ est de rang 1 et donc bien connue. On obtient finalement $\left(I_n - \dfrac{1}{1 + \mathrm{tr}(A^{-1}H)} A^{-1}H\right) A^{-1}$.

Exercice 33.

1. Plusieurs façons de procéder pour montrer que $\det(I_n + A\overline{A}) = \det(I_n + \overline{A}A)$, qui reviennent souvent à montrer $\chi_{AB} = \chi_{BA}$: par blocs malins (cf. dernière question), par densité, etc.
2. Montrer que dans une base σ s'écrit $X \mapsto C\overline{X}$ et donc σ^2 s'écrit $C\overline{C}$.
3. Introduire $\sigma : x \mapsto A\overline{x}$ (attention ce n'est pas linéaire mais antilinéaire), ainsi, informellement, $\sigma^2 = A\overline{A}$. Remarquer que $E_\lambda(A\overline{A})$ est stable par σ et utiliser la question précédente.
4. Grouper les valeurs propres de $A\overline{A}$ entre elles :
   - les réelles positives sont ok,
   - par le même argument qu'en question 1, $\chi_{A\overline{A}} \in \mathbb{R}[X]$ donc les valeurs propres complexes non réelles sont par paires conjuguées de même multiplicité,
   - pour les négatives, il faut montrer que la multiplicité *algébrique* (et non la géométrique de la question précédente) est paire. Faire de même que précédemment mais sur $\mathrm{Ker}((A\overline{A} - \lambda I_n)^k)$.

   Alternativement (et ce sont les questions intermédiaires d'un oral Centrale sur le même résultat final) le faire dans le cas $\chi_{A\overline{A}}$ scindé à racines simples. Reste à faire un argument de densité, prendre D tel que $\chi_{D\overline{D}}$ est scindé à racines simples, et avec un discriminant (c'est à dire résultant de P et P′) montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de t tels que $\chi_{((1-t)A+tD)\overline{((1-t)A+tD)}}$ n'est pas scindé à racines simples.
5. Plusieurs options :
   - faire pour X inversible à partir de $X = I_n$ et comme $\det\left(\begin{pmatrix} X & 0_n \\ 0_n & \overline{X} \end{pmatrix}\right) \geq 0$, puis conclure par densité,

- adapter directement les questions 2 et 4 avec $Z \mapsto \begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix} \overline{Z}$, qui commute avec $\begin{pmatrix} X & Y \\ -\overline{Y} & \overline{X} \end{pmatrix}$.

Remarque : la deuxième question n'était pas dans l'oral X original, ce qui le rend bien plus dur…

Exercice 34.

1. Calculer $\chi_{M(t)}$ et regarder les valeurs en 0 et 2 avant de faire un TVI.
2. Cela revient à trouver un équivalent de fonctions implicites.
   - Pour β par caractère borné et valeur d'adhérence unique (avec $\beta(t) > 1$ pour $t > 1$) on obtient 2
   - Pour γ et α après un « rescaling » on obtient de nouveau un caractère borné et donc respectivement $1 \times t$ et $-\frac{1}{2} \times t^{-1}$.

   Alternativement par trace/déterminant dès qu'on en a deux on a le troisième.

Exercice 35.

1. Dans $A + kI_n$ utiliser la k-ième colonne pour rendre toutes les autres colonnes « diagonales ». On obtient alors $(-1)^{n-k}k(k-1)!(n-k)!$.
2. À l'aide de la question précédente, montrer que χ_A change de signe suffisamment de fois.
3. Cela ressemble fortement à une DÉS. Par exemple que dire de $\dfrac{\chi_A(X)}{\prod_{k=1}^{n}(X+k)}$?

Exercice 36. Une condition nécessaire est celle issue de la trace.

Réciproquement, il faut fournir une construction pour montrer qu'elle est suffisante.

Une possibilité est de prendre $A_1 \in T_n^+$ et $A_2 \in T_n^-$ pour s'assurer de χ_{A_1} et χ_{A_2} sans trop compromettre $\chi_{A_1+A_2}$.

On cherche ensuite une matrice dont seule la diagonale est prescrite mais avec un χ prescrit.

Commencer par expérimenter pour $n = 2$ puis $n = 3$.

Une option serait (il y en a d'autres) d'avoir une matrice « à la compagnon » c'est à dire de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & * \\ 1 & \lambda_2 & & & * \\ & 1 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \lambda_{n-1} & * \\ & & & 1 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et pour s'assurer que le polynôme caractéristique est P_3, ce serait bien (cf. classiques sur les matrices compagnons) que ce soit la matrice de $Q \mapsto (XQ)\%P_3$.

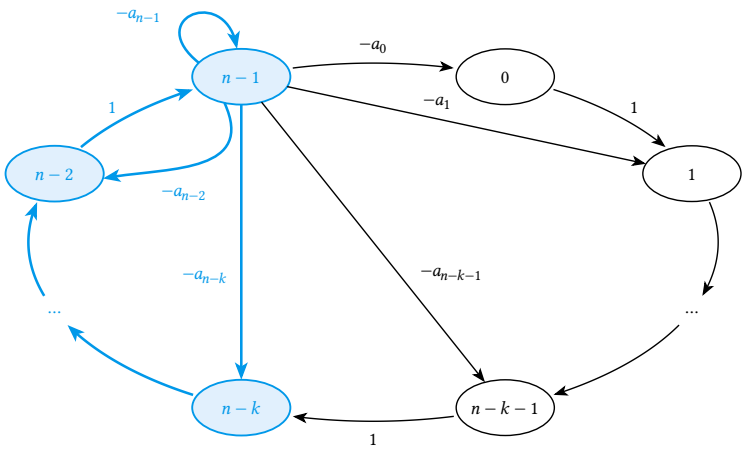
Cela fixe alors la base, et la base de Newton $(1, X-\lambda_1, \dots, (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{n-2}), (X-\lambda_1)\cdots(X-\lambda_{n-2})(X-\lambda_{n-1}))$ convient bien.

Exercice 37.

1. Remarquer que $A^iM = MB^i$ et que $\mathrm{tr}(A^k) = \mathrm{tr}(B^k)$. Développer ensuite $(A - MC)^k$ en mots en A et MC et comparer les traces mot à mot, par permutation circulaire.
2. Critère des traces.

Exercice 38.

1. Trigonaliser C(P).
2. C'est juste une somme des $(X^{k-n}P)(\lambda_i) = 0$.
3. On pourra remarquer que
$$C(H_k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-k} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-k+1} \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$
est la sous-matrice $k \times k$ en bas à droite de C(P).
Une façon de faire est de regarder le graphe suivant



Et remarquer qu'un cycle de longueur j ne passe que par des sommets d'indice au moins $n-j$ (sommets numérotés de 0 à $n-1$) : tous ces cycles restent dans le bloc $C(H_k)$.
4. Appliquer la deuxième question à H_k au rang k.

Exercice 39. L'idée est la trace : « le rang d'un projecteur est sa trace » et la trace d'une nilpotente est nulle.

Exercice 40. Par la limite si λ est une valeur propre on a nécessairement $\lambda \in]-1, 1]$ et dans l'autre sens construire intervalle par intervalle.

Exercice 41.

1. Calculer u sur la base des $X(X-1)\cdots(X-k+1)$.
2. Sur chaque $\mathbb{C}_d[X]$, u est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Regarder ensuite le coefficient de X^{d-1} dans $u(P) - P$.
3. Écrire $P(n) = ((\mathrm{Id} + \Delta)^n(P))(0)$ et développer par le binôme.

Exercice 42.

1. Le point clef est la continuité de $T_K(f)$, utiliser par exemple l'uniforme continuité de K.
2. Remarquer que $T_K(f)$ est strictement positive, puis que $f = \frac{1}{\lambda} T_K(f)$.
De manière générale tout élément positif non nul de $E_\lambda(T_K)$ est strictement positif, mais dans ce cas que dire de $g - \max\left(\frac{g}{f}\right) f$?

Exercice 43. Vérifier que $u(f)$ est caractérisé par $u(f)'' = -f$, $u(f)(0) = 0$, $u(f)'(1) = 0$.
En déduire que les vecteurs propres sont, à un scalaire près, les fonctions $x \mapsto \sin\left(\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi x\right)$, $k \in \mathbb{N}$, et que les valeurs propres sont les $\lambda_k = \dfrac{1}{\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 44.

1. La CNS est bien sûr les λ_i distincts, par exemple car pour tout λ dans le spectre $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) \geq n-1$.
2. Même argument.

Exercice 45. La matrice est semblable à une matrice diagonale par blocs de blocs $\begin{pmatrix} 0 & \alpha_i \\ \alpha_{n+1-i} & 0 \end{pmatrix}$. Et pour un tel bloc (étude d'une matrice 2×2) la CNS est, pour tout i, $\alpha_i = \alpha_{n+1-i} = 0$ ou $\alpha_i\alpha_{n+1-i}$ est un carré non nul.

Exercice 46.

1. La matrice J est la (transposée de la) matrice compagnon de $X^n - 1$.
   Puis polynôme en une matrice diagonalisable.
2. Même idée que précédemment, on en déduit même que c'est isomorphe à $\mathbb{C}[X]/(X^n-1)\mathbb{C}[X]$.
3. L'inversibilité se lit sur le spectre, et soit faire un Bézout soit remarquer que c'est une sous-algèbre de dimension finie.
4. Pour trouver le reste de la division euclidienne par un polynôme scindé à racines simples, on peut utiliser l'interpolation de Lagrange.

Exercice 47.

1. Écrire le produit.
2. Que dire d'une matrice d'ordre fini ?
3. Remarquer que la décomposition en produit de cycles à supports disjoints fournit une écriture diagonale par blocs.
4. On connaît les valeurs propres complexes, ce sont donc les permutations qui sont aussi des symétries.
5. Par l'écriture précédente c'est donc le nombre de cycles (y compris de longueur 1).
6. Remarquer que $\bigcap_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(P_{\tau_i} - I_n)$ est une intersection d'hyperplans.

Exercice 48.

1. C'est une matrice triangulaire et en plus ses coefficients diagonaux sont tous égaux.
2. Que dire d'un changement de base de type $f_i = \lambda^i e_i$ pour un certain λ ?
3. Plusieurs options (c'est le point clef de l'exercice) : équation aux valeurs propres, polynôme caractéristique par récurrence, etc. qui passent toutes par la relation de récurrence $u_{j+1} = \lambda u_j - u_{j-1}$. On obtient finalement comme valeurs propres les $2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leq k \leq n$.
4. Dans le cas non triangulaire $T_{a,b,c}$ est donc semblable à $aI_n + \delta T$.
5. Résumer les questions précédentes.

Exercice 49.

1. Le rang est ≤ 2 : en notant $b = \sum_i b_i e_i$, l'image est incluse dans $\mathrm{Vect}(b, e_n)$ et dans une base adaptée on a une matrice bloc, ou bien calculer $\mathrm{tr}(M) = d$ et $\mathrm{tr}(M^2) = d^2 + 2\sum_i a_i b_i$. Dans tous les cas en notant $s = \sum_i a_i b_i$, on obtient $\chi_M = X^{n-2}(X^2 - dX - s)$.
2. Il faut traiter différents sous-cas :
   - $M = 0_n$,
   - $\mathrm{rg}(M) = 1$, selon la valeur de d
   - $\mathrm{rg}(M) = 2$ c'est à dire $a \neq 0$ et $b \neq 0$, selon que $s = 0$ ou non, puis selon les racines de $X^2 - dX - s$ dans $\mathbb{K}$.
3. Dans ce cas $s = \sum_i a_i^2$ et cela se comporte différemment dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.
4. On obtient deux valeurs propres qui sont $\lambda_\pm = \dfrac{1 \pm \sqrt{4n-3}}{2}$ et une base de vecteurs propres explicite : les $e_i - e_{n-1}$ pour $i \in [\![1, n-2]\!]$ ainsi que $\sum_{i=1}^{n-1} e_i + \lambda_\pm e_n$.

Exercice 50. Dans un sens écrire une matrice de passage par blocs, dans l'autre utiliser la caractérisation par des polynômes annulateurs.

Exercice 51.

1. Faire des transvections par blocs.
2. La CNS est donc que 2A est diagonalisable c'est à dire A est diagonalisable.
3. Idem montrer que A est diagonalisable ssi $I_n + A$ et $I_n - A$ le sont.

Exercice 52. Remarquer que

$$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & AP'(A) \\ 0 & P(A) \end{pmatrix}$$

et que si P est scindé à racines simples et que $Q | P \wedge XP'$ alors $Q | X$.

Exercice 53.

1. Si $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans l'autre sens avec $Q = \dfrac{P - P(0)}{X}$, montrer que

   $$P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & Q(A)B \\ 0 & P(0)I_p \end{pmatrix}.$$

   En déduire que si $P(M) = 0_{n+p}$ alors $P(A) = 0$, $P(0) = 0$ et $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(Q(A))$. Si de plus P est scindé à racines simples, montrer que $\mathrm{Ker}(Q(A)) = \mathrm{Im}(A)$ (lemme des noyaux).
2. Votre sens de la dualité devrait suggérer que la CNS est que A soit diagonalisable et $\mathrm{Ker}(B) \supseteq \mathrm{Ker}(A)$. Soit faire la preuve duale, soit passer à la transposée.

Exercice 54.

1. Utiliser des polynômes annulateurs.
2. Regarder $P = \begin{pmatrix} I_n & U \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ d'inverse $\begin{pmatrix} I_n & -U \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$ et calculer PMP^{-1}.
3. Diagonaliser A et B pour se ramener à $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $B = \mathrm{diag}(\mu_1, \dots, \mu_p)$ (ce qui change C), et remarquer qu'on peut alors toujours poser $u_{i,j} = \dfrac{c_{i,j}}{\lambda_i - \mu_j}$.
4. Comme d'habitude bien connaître le contre-exemple $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

5. Il ne reste qu'un seul point à montrer, mais ce dernier se décompose en plusieurs points.
   - Se ramener d'abord à A et B diagonales.
   - Comme à la question 3, on peut construire U telle que $(AU - UB)_{i,j} = c_{i,j}$ dès que $\lambda_i \neq \mu_j$.
   - Reste à montrer qu'en se ramenant ainsi à $\widetilde{C} = C - (AU - UB)$, la matrice $\widetilde{C}$ est nulle.
   - Se rendre compte que $A\widetilde{C} = \widetilde{C}B$.
   - Dans ce cas très particulier, montrer que pour tout P

$$P\left(\begin{pmatrix} A & \widetilde{C} \\ 0 & B \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} P(A) & P'(A)\widetilde{C} \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$$

   - Prendre un polynôme P premier avec sa dérivée bien choisi.
   - Conclure.

Il y a d'autres façons de faire, une fois ramené à $\widetilde{C}$ par exemple remarquer que les trois derniers points peuvent se remplacer par l'unicité dans la décomposition de Dunford, ou en construisant des projections bien choisies.

Exercice 55.

- Pour diagonalisable utiliser par exemple que $\prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{L}}(A)}(X - \lambda)$ est annulateur et dans $\mathbb{K}[X]$.
- Pour trigonalisable utiliser par exemple que χ_A est scindé sur $\mathbb{L}$ et que ses racines sont dans $\mathbb{K}$, donc scindé sur $\mathbb{K}$.

Exercice 56. De manière générale si $u^N = Id_E$ alors u est diagonalisable (et $Sp(u) \subseteq \mathbb{U}_N$).

Exercice 57. Dans les deux cas, si u est diagonalisable, on peut toujours par théorème de la base incomplète compléter une base d'un sev en prenant des vecteurs propres.

1. Dans $\mathbb{C}$ il existe une droite stable et recommencer (récurrence).
2. Remarquer que tout espace strict est contenu dans un hyperplan, et qu'un supplémentaire stable d'un hyperplan est une droite stable. On peut donc rajouter des vecteurs propres progressivement.

Exercice 58.

1. Un induit de diagonalisable est diagonalisable. Dans l'autre sens montrer qu'il existe λ tel que $\mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) \neq \mathrm{Ker}((u - \lambda Id_E)^2)$ puis conclure. (Sinon utiliser Jordan).
2. On fait la même chose dans le cas χ_u scindé, mais on remarque que par exemple la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, de matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas de cette forme.
3. Trouver $X + iY$ un vecteur propre complexe de valeur propre complexe $re^{i\theta}$ et regarder $\mathrm{Vect}(X, Y)$ (quitte à changer θ en $-\theta$).

Exercice 59.

1. Cf la question générale.
2. On a $\pi_{Q(A)} \circ Q$ qui est annulateur de A, donc multiple de π_A. Reste à montrer que les racines de π_A en sont des racines simples. Soit α une racine de π_A, remarquer que $Q'(\alpha) \times \pi'_{Q(A)}(Q(\alpha))$ est non nul (inversibilité et racines simples de $\pi_{Q(A)}$) et donc que cette racine est simple en tant que racine de $\pi_{Q(A)} \circ Q$.
3. Non, par exemple que dire de $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$?
4. Non, par exemple que dire de $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$? (On est toujours à racines simples mais plus nécessairement scindé).

Exercice 60.

1. Remarquer que $\pi_{A^p}(X^p)$ est scindé, et à racines simples si 0 n'est pas racine de π_{A^p} (inversibilité).
2. Regarder à nouveau $\pi_{A^p}(X^p)$ et gérer la valeur propre 0 géométriquement par l'égalité des noyaux. Alternativement comme $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Ker}(A) = \mathbb{C}^n$, regarder l'induit sur Im(A).
3. Même idée, par le lemme des noyaux $\mathbb{C}^n$ est la somme de $\mathrm{Ker}(A^p)$ et d'un sev stable où l'induit de A est diagonalisable. Alternativement, on a (noyaux itérés) la stationnarité des $\mathrm{Ker}(A^k)$ à partir de $k = p$ et en particulier $(A^{p+1})^p$ est diagonalisable et $\mathrm{Ker}(A^{p+1}) = \mathrm{Ker}((A^{p+1})^2)$.
4. Même idée, avec au lieu de factoriser $X^p - \lambda$ dans $\mathbb{C}$ où $\lambda \neq 0$, factoriser $X^2 - \lambda$ dans $\mathbb{R}$ où $\lambda > 0$.

Exercice 61. *Remarque* : il est important de bien se rappeler que la condition $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = E$ a beaucoup d'équivalents, par exemple $\mathrm{Ker}(v) + \mathrm{Im}(v) = E$ ou $\mathrm{Ker}(v) \cap \mathrm{Im}(v) = \{0\}$, ou $\mathrm{Ker}(v) = \mathrm{Ker}(v^2)$, ou $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Im}(v^2)$, ou encore dans une base il s'écrit $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec A inversible, etc. (cf Fitting).

De plus cette condition n'est pas toujours vérifiée (par exemple prendre un nilpotent non trivial).

1. Diagonaliser.
2. Par exemple inversible non diagonalisable.
3. Par exemple se rappeler (cf Fitting) que $\mathrm{Ker}(v) \oplus \mathrm{Im}(v) = E$ ssi la suite des noyaux itérés est stationnaire à partir du rang 1 (ssi la suite des images itérées est stationnaire à partir du rang 1). Que dire donc d'un $\mathrm{Ker}((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^m)$ par rapport à un $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$?

Exercice 62.

1. Que dire de $\prod_{\lambda \in Sp(A)} (X - \lambda)$?
2. Le sens direct reste vrai. Pour l'autre sens que dire de $i = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et de $\mathbb{R}[i]$?
3. Remarquer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ on a $\prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)} (X - \lambda) \in \mathbb{R}[X]$ (par exemple on peut apparier les valeurs propres non réelles avec leurs conjuguées).

Exercice 63. Le point important de l'exercice est de faire les calculs, d'où faites-les !
Pour vérifier les résultats, en notant A la matrice, on obtient :

(i) $\chi_A = (X+1)(X-1)(X-3)$, A est diagonalisable et, par exemple avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(ii) $\chi_A = (X-1)^2(X-3)$, $E_1(A)$ est le plan d'équation $x+y-z=0$, A est diagonalisable et, par exemple avec $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(iii) $\chi_A = X(X-1)^2$, $E_1(A)$ est une droite, A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et, par exemple avec $P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -6 & -2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iv) $\chi_A = (X+1)^3$, $E_{-1}(A)$ est une droite, A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et, par exemple avec $P = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(v) $\chi_A = (X-2)^3$, $E_2(A)$ est le plan d'équation $2x-y+z=0$, A n'est pas diagonalisable mais est trigonalisable et, par exemple avec $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(vi) $\chi_A = (X-2)(X^2-2X+2)$, de racines 2 et $1 \pm i$: A n'est pas trigonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$, mais est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$. Par exemple avec $P = \begin{pmatrix} 2 & 2+i & 2-i \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

Dans $M_3(\mathbb{R})$, on peut seulement réduire par blocs : par exemple avec $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ (vecteur propre pour 2, puis parties réelle et imaginaire du vecteur propre pour $1+i$),

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 64. Commencer par remarquer que $\mathrm{rg}(M) \leq 2$.

1. De par la remarque sur le rang, et comme on sait calculer une trace il ne reste plus que le coefficient de X^{n-2}. Après tous les coups sont permis.
   Remarquer par exemple que si $b \neq 0$ on peut par scaling se ramener à $b = 1$. On obtient alors un polynôme de degré ≤ 2 en a dont on connaît deux racines mais pas le coefficient dominant. Utiliser la continuité pour étendre à $b = 0$ et récupérer le coefficient dominant par $a = 1$ et $b = 0$.
   Ou alors calculer explicitement toutes les transpositions de 2 éléments, ou encore calculer la trace du carré, etc.
   Alternativement et plus géométriquement, $\mathrm{Im}(M)$ est inclus dans le plan $F = \mathrm{Vect}(u, v)$ où $u = e_1 + e_n$ et $v = e_2 + \cdots + e_{n-1}$. Ce plan est donc stable par M, et χ_M est le produit de X^{n-2} par le polynôme caractéristique de l'induit sur F, dont on écrit la matrice 2×2 dans la base (u, v).
   Dans tous les cas on obtient à la fin
   $$\chi_M = X^{n-2}(X^2 - (2a + (n-2)b)X - 2(n-2)a(a-b)).$$
2. Si le rang est 0 rien à dire, si le rang est 1 ($b = a$ non nul ou $a = 0$ et $b \neq 0$) par la trace idem. Sinon le rang est 2 et si le discriminant
   $$\Delta = (2a + (n-2)b)^2 + 8(n-2)a(a-b)$$
   est non nul idem.
   Pour le dernier cas, repasser par la méthode géométrique.

Exercice 65.

1. Remarquer que vous connaissez bien J (comme matrice compagnon/de permutation/circulante), et que $J^\top = J^{-1} = J^{n-1}$ et prendre les parties réelles et imaginaires pour les vecteurs propres.
2. Plusieurs options :
   - Exprimer $J^k + J^{-k}$ à partir de S par polynômes de Tchebychev,
   - Par dimension, montrer que $\mathbb{R}[S]$ est inclus dans l'ensemble des circulantes réelles symétriques et qu'ils sont de même dimension, égale à $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$.
   - Interpoler les valeurs propres de la circulante en celles de S.

Exercice 66. Faire comme pour les matrices circulantes en interprétant comme un polynôme en la matrice (compagnon)

$$Z = M_c(0, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ c & & & 0 \end{pmatrix}.$$

ou bien regarder comment change la matrice si on remplace chaque e_i de la base par $\gamma^i e_i$ pour un γ bien choisi.

Alternativement, on peut interpréter $M_c(\alpha)$ comme la matrice dans la base $(X^{n-1}, \ldots, X, 1)$ de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ de $P \mapsto (AP)\%(X^n - c)$ (reste de la division euclidienne), où $A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k X^k$, et utiliser la base de Lagrange adaptée (division euclidienne par un polynôme scindé à racines simples).

Exercice 67. Posons $H = (1)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$.

1. Si $ab = 0$ c'est soit la matrice nulle soit une matrice nilpotente d'ordre maximal. Si $a = b$ c'est $aH - aI_n$.
2. Au choix faire un pivot entre lignes (ou colonnes) successives. Alternativement, remarquer que $t \mapsto$ dét$(\lambda I_n - A + tH)$ est affine et qu'on connaît deux valeurs. Vérifier que votre résultat se prolonge par continuité dans le cas $a = b$.
   Dans tous les cas on obtient $\chi_A = \dfrac{1}{a-b}(a(X+b)^n - b(X+a)^n)$.
3. Il s'agit de résoudre une équation composée de racines n-ièmes et d'homographies. On obtient, en notant $R = \left\{z \in \mathbb{C} \,\middle|\, z^n = \dfrac{b}{a}\right\}$, qui s'exprime directement à partir des formes exponentielles, $Sp(A) = \left\{\dfrac{az-b}{1-z}, z \in R\right\}$. Elles sont distinctes (les homographies sont bijectives).
4. Ici il faut refaire le pivot précédent, on obtient comme sev associé à $\dfrac{az-b}{1-z}$, $\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{pmatrix}\right)$.

Alternativement voir cela comme une matrice c-circulante.

Exercice 68.

1. Remarquer que les $-a_i$ sont des valeurs propres (deux lignes sont égales dans $A + a_i I_{n+1}$), et que la somme $s = \sum_i a_i$ l'est aussi (toutes les lignes de même somme). Dans le cas où ces $n+1$ valeurs sont distinctes (dans ce cas on aurait aussi pu trouver la somme par une trace) on a alors $Sp(A)$ et χ_A, utiliser la continuité pour avoir χ_A, et donc $Sp(A)$, dans le cas général.
   Alternativement, juste regarder les $e_i - e_{i+1}$, qui sont vecteurs propres de $A^\top$ (différence de deux lignes consécutives de A), et $e_1 + \cdots + e_{n+1}$, qui est vecteur propre de A.
2. Les $e_i - e_{i+1}$ forment une base de l'hyperplan H d'équation $x_1 + \cdots + x_{n+1} = 0$, constituée de vecteurs propres de $A^\top$. Ainsi $A^\top$ (et donc A) est diagonalisable si et seulement si $A^\top$ a un vecteur propre hors de H, nécessairement pour la valeur propre s. C'est le cas si s n'est pas l'un des $-a_i$. De manière générale c'est plus compliqué, par exemple pour $a = (1,-2)$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ a pour valeurs propres 2 et -1 (double, ici $s = -a_1$) et $\text{rg}(A + I_3) = 2$: elle n'est pas diagonalisable. Mais la condition n'est pas nécessaire : pour $a = (1,-1,1)$ on a $s = 1 = -a_2$ et pourtant A est diagonalisable ($\chi_A = (X-1)^2(X+1)^2$ et $A^2 = I_4$).

Exercice 69. C'est un cas particulier de matrice tridiagonale, et donc d'étude de récurrence linéaire d'ordre 2. Ici l'étude est simplifiée car le polynôme caractéristique est $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta$.

Par contre comme on étudie sur $\mathbb{R}$, en posant δ tel que $\delta^2 = \alpha\beta$ (dans $\mathbb{C}$) on obtient comme CNS de diagonalisabilité $\alpha\beta > 0$ (si $n \geq 2$).

Exercice 70.

1. Développer selon la dernière ligne.
2. Par récurrence, regarder le signe de χ_n en les racines de χ_{n-1} et en $\pm\infty$, puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit que M_n est diagonalisable.
3. Trouver une matrice extraite de taille $n-1$ triangulaire et inversible. Les sous-espaces propres sont donc des droites.

Exercice 71. Écrire $A = H_{2n} + D$ où H_{2n} est une matrice de rang 1 et D une matrice diagonale. On peut en déduire χ_A en tant que déterminant de Hurwitz.

On obtient finalement $\chi_A = (X^2+2X+2)^{n-1}(X^2-2(n-1)X-2(n-1))$, où $X^2+2X+2 = (X+1-i)(X+1+i)$.

On en déduit alors le spectre, et il reste alors à regarder la multiplicité géométrique.

Alternativement, chercher directement des vecteurs propres : les vecteurs de somme nulle portés par les indices impairs (resp. pairs) sont propres pour $-1+i$ (resp. $-1-i$), et le plan engendré par $(1,1,\dots,1)$ et $(1,-1,\dots,1,-1)$ est stable par A. Il reste ensuite à réduire l'endomorphisme induit sur ce plan.

Exercice 72.

1. C'est une symétrie, on peut construire une base palindromique/antipalindromique avec $X^k \pm X^{n-k}$ (en traitant séparément le cas n pair et n impair).
2. On a $D \circ S(X^k)$ est dans $\mathrm{Vect}(X^{n-k-1})$ d'où plein de plans stables, c'est à dire des blocs 2×2 explicites.

Exercice 73.

1. Calcul explicite. On obtient $u : P \mapsto (1-X^2)P' + (n-1)XP$.
2. On obtient une équation différentielle. On peut utiliser le cours de fractions rationnelles plutôt que celui d'EDOs en remarquant que pour A, B polynômes, résoudre $AP' + BP = 0$ revient à résoudre $\dfrac{P'}{P} = -\dfrac{B}{A}$.

Exercice 74.

1. RÀS
2. Pour étudier le reste de la division euclidienne par un polynôme scindé à racines simples, une base de Lagrange est adaptée.
3. Idem.
4. RÀS (Bézout ou Gauss)
5. C'est bien $P \mapsto (Q(A)P)\%B$, il n'y a plus qu'à le montrer.
   Ainsi $Q(u) = 0$ ssi $B \mid Q(A)$.
   Avec $B = \prod_{i=1}^{r}(X-\alpha_i)^{m_i}$, on obtient un polynôme annulateur avec $\prod_i (X - A(\alpha_i))^{m_i}$. Il reste à trouver un vecteur propre pour chaque valeur propre, par exemple $\dfrac{B}{X-\alpha_i}$.
   Alternativement comme on cherche seulement le spectre, remarquer que le cas scindé simples est déjà traité et procéder par densité.
6. De la question précédente on déduit que u est diagonalisable ssi il est annulé par $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)}(X-\lambda)$ c'est à dire $B \mid \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)}(A-\lambda)$ (attention, produit sur les valeurs $A(\alpha_i)$ distinctes).

Exercice 75. On peut faire tous les cas en se ramenant à chaque fois à des matrices scalaires.

L'argument abstrait (tensoriel) est que

$$\begin{cases} M_2(\mathbb{R}) \to M_{2n}(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

est un morphisme d'algèbres injectif. D'où le polynôme minimal de $\begin{pmatrix} aI_n & bI_n \\ cI_n & dI_n \end{pmatrix}$ est le même que celui de $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Exercice 76. Commencer par remarquer que $\mathrm{rg}(B - I_{2n}) = n$ (pas juste $\leq n$ mais égal à n).
En déduire qu'une CNS est que A soit diagonalisable et $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ (par exemple en comparant la somme des dimensions des sous-espaces propres).

Exercice 77. Toujours la même histoire : commencer par le cas scalaire, en déduire des opérations par blocs qui diagonalisent ou trigonalisent (c'est le cas de la seconde question) par blocs, puis utiliser des similitudes par blocs ou des polynômes.

Exercice 78. Commencer par étudier $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarquer que $A_{n+1} \sim \begin{pmatrix} \sqrt{2}A_n & 0 \\ 0 & -\sqrt{2}A_n \end{pmatrix}$ (diagonaliser A_1 et reprendre la même matrice de passage par blocs) puis conclure par récurrence.

Alternativement comme $A_{n+1}^2 = \begin{pmatrix} 2A_n^2 & 0 \\ 0 & 2A_n^2 \end{pmatrix}$ conclure par récurrence que $\frac{1}{\sqrt{2^n}}A_n$ est une symétrie.

Exercice 79. En séparant la partie paire et impaire, calculer $P(M)$ pour tout polynôme P et en déduire que $\pi_M = \pi_A(X^2)$. Conclure.

Alternativement, si M est diagonalisable alors $M^2 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ aussi, donc A aussi, et $\mathrm{Ker}(M) = \mathrm{Ker}(M^2)$ force A à être inversible. Réciproquement, si A est diagonalisable et inversible, elle admet une racine carrée B diagonalisable et, en s'inspirant du cas scalaire, M est semblable à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$ (par exemple avec $P = \begin{pmatrix} B & -B \\ I_n & I_n \end{pmatrix}$).

Exercice 80. Si M est diagonalisable alors A et B aussi (polynôme annulateur), donc $A = \lambda I_n$ et $B = \mu I_p$.
Distinguer ensuite $\lambda = \mu$ et $\lambda \neq \mu$, et dans ce dernier cas regarder les rangs de $M - \lambda I_{n+p}$ et de $M - \mu I_{n+p}$.
On obtient finalement la condition $A = \lambda I_n$, $B = \mu I_p$ et ($\lambda \neq \mu$ ou $C = 0$).

Exercice 81.

1. Faire le calcul. Attention il n'y a pas de telle propriété pour la somme : $A \otimes B + A' \otimes B'$ n'est pas $(A + A') \otimes (B + B')$ en général (pour $A = A' = I_n$ et $B = B' = I_p$, on trouve $2I_{np}$ et $4I_{np}$) ; le produit $\otimes$ est seulement bilinéaire et non linéaire sur l'espace produit.
   Ainsi on ne peut pas, hors cas particuliers, simplifier $P(A \otimes B)$!
2. Utiliser $P = (P_1 \otimes P_2)$ (et vérifier l'inversibilité et les calculs).
3. Plutôt que la similitude directement prendre des bases de vecteurs propres X_i de A et Y_j de B, et montrer que les $X_i \otimes Y_j$ forment une base de vecteurs propres de $A \otimes B$. On obtient finalement $\mathrm{Sp}(A \otimes B) = \{\lambda\mu \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A), \mu \in \mathrm{Sp}(B)\}$ et $\dim(E_\nu(A \otimes B)) = \sum_{\substack{(\lambda,\mu) \in \mathrm{Sp}(A) \times \mathrm{Sp}(B) \\ \lambda\mu = \nu}} \dim(E_\lambda(A)) \dim(E_\mu(B))$.
4. On a par le même argument que $A \otimes B$ est trigonalisable, mais avec une information sur la diagonale qui peut se résumer en, avec $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$ et $\chi_B = \prod_{j=1}^{p}(X - \mu_j)$, par $\chi_{A\otimes B} = \prod_{i,j}(X - \lambda_i\mu_j)$.
5. La trace se lit par bloc. Ou alors dans $\mathbb{C}$ on sait faire le cas trigonalisable, donc on sait faire tous les cas.
   Alternativement, et sur tout corps : d'après la question 1, $A \otimes B = (A \otimes I_p)(I_n \otimes B)$. La matrice $I_n \otimes B$ est diagonale par blocs, et $A \otimes I_p$ est semblable à $I_p \otimes A$, ce qui revient à interpréter comme une composition de $M \mapsto AM$ et $N \mapsto NB$.
6. Diagonaliser par blocs et prendre un polynôme annulateur scindé à racines simples pour $A \otimes B$.
7. Remarquer qu'un critère de non-diagonalisabilité sur $\mathbb{C}$ est d'avoir un X et un λ tels que $(M - \lambda I_n)X \neq 0_n$ et $(M - \lambda I_n)^2 X = 0_n$.
   Trouver de tels éléments pour A, et un vecteur propre pour une valeur propre **non nulle** pour B et en déduire un tel couple pour $A \otimes B$.
   Si $\mathrm{Sp}(B) = \{0\}$ (sur $\mathbb{C}$ ce n'est pas $\emptyset$), que dire du spectre de $A \otimes B$ qui est diagonalisable ?
8. Prendre $A = B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 82.

1. Dans un sens ce sont les projecteurs spectraux.
   Dans l'autre sens plusieurs possibilités : construire les espaces propres à partir des projecteurs, regarder $P(u)$ pour $P = \prod_{\mu \in \{0,\lambda_1,\ldots,\lambda_r\}}(X - \mu)$, etc.
2. Dans un sens les projecteurs précédents conviennent.
   Dans l'autre sens que dire de $P(u)$ pour $P = \prod_i (X - \lambda_i)$.
   Pour l'unicité, prendre des polynômes d'interpolation de Lagrange.

Exercice 83.

1. On a $\mathrm{tr}(A)^2 - 4 \times (-1) > 0$.
2. En analyse on cherche $p, q \in \mathbb{N}$ et $\lambda > 0$ tels que $p + q = n$, et $p\lambda - \dfrac{q}{\lambda} = \lambda - \dfrac{1}{\lambda}$. Après calculs cela revient à $(p, q) = (1, 1)$ ou bien $p, q > 1$ et $\lambda = \sqrt{\dfrac{q-1}{p-1}}$.
   Après avoir fait une synthèse c'est donc tout $n \in \{2\} \cup [\![4, +\infty[\![$.

Exercice 84. L'exercice devient plus simple si on comprend que D_H est l'ensemble des dilatations (et l'identité) d'hyperplan H, et T_H l'ensemble des transvections (et l'identité) d'hyperplan H.

Exercice 85.

1. Si $A \neq 0$ et $n \geq 2$, fabriquer une matrice nilpotente non nulle dont l'image est contenue dans Im(A), puis l'écrire AB.
2. C'est la même chose mais avec des noyaux et en imposant l'inversibilité de P. Remarquer que $\{PA \mid P \in GL_n(\mathbb{K})\}$ est l'ensemble des matrices $C \in M_n(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{Ker}(C) = \mathrm{Ker}(A)$.
   Pour $A \neq 0$, chercher C de même noyau que A et non diagonalisable, par exemple encore une matrice nilpotente si A non inversible et une transvection si A inversible.

Exercice 86. Montrer que si les $\lambda_k \in \mathbb{R}$ sont distincts alors les racines de $X^2 - \lambda_k X - 1$ sont réelles (discriminant $\lambda_k^2 + 4 > 0$) et distinctes elles aussi (c'est dans le fond la bijectivité de sh, ou le fait qu'une racine x détermine $\lambda_k = x - 1/x$).

C'est faux dans $\mathbb{C}$: que dire par exemple de $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$?

Exercice 87. Remarquer qu'il s'agit de l'énoncé dual de la condition

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = E.$$

Il y a alors plusieurs façons de procéder :

- dans un sens lire les images après diagonalisation, dans l'autre sens, montrer que $\prod_i (u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = 0_{\mathscr{L}(E)}$,
- remarquer que la version matricielle est exactement la condition $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Ker}(A^\top - \lambda_i I_n) = \mathbb{K}^n$.

Exercice 88. Dans un sens expliciter des hyperplans à partir d'une base de diagonalisation.
Dans l'autre montrer que $D_i = \bigcap_{j \neq i} H_j$ est stable, et par dimension est une droite. Puis montrer que des vecteurs directeurs de ces droites forment une base.

Alternativement procéder par dualité.

Exercice 89.

1. Un calcul explicite donne le polynôme caractéristique $X(X + c - 1)(X + 2c)$. Puis montrer que pour $c \notin \{-1, 0, 1\}$ c'est scindé à racines simples. Restent trois cas, dans chaque cas calculer la multiplicité algébrique et celle géométrique. On obtient pour les trois valeurs restantes $1 < 2$ donc non diagonalisable.
2. Faire les résolutions de système. On obtient par exemple
   - Pour $c = -1$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}A(-1)P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   - Pour $c = 0$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1}A(0)P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   - Pour $c = 1$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $P^{-1}A(1)P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 90.

1. Les puissances d'une trigonalisable sont trigonalisables.
2. Prendre une rotation $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec θ bien choisi.
3. Remarquer que $\chi_{A^2}(X^2)$ est annulateur donc A est trigonalisable.

Exercice 91.

1. Noter $F_j = \text{Vect}(e_1, \dots, e_j)$. Interpréter triangulaire supérieure et inversible comme $MF_j = F_j$ pour tout j. Écrire par exemple $A = A^3(A^2)^{-1}$.
2. La question précédente montre qu'il est suffisant que le sous-groupe engendré par K soit $\mathbb{Z}$. Si c'est un $d\mathbb{Z}$ alors prendre par exemple une rotation réelle d'angle θ pour θ bien choisi. La condition s'écrit aussi $\text{pgcd}(K) = 1$.
3. Prendre par exemple une nilpotente d'ordre 2.

Exercice 92.

1. Le caractère libre est lié à $b \neq 0$, et les équations reviennent à prendre parties réelles et imaginaires.
2. Faire par récurrence forte (ou d'ordre 2) sur n en distinguant si u admet une valeur propre réelle ou bien si toutes les valeurs propres complexes sont non réelles.
3. Les $X - \lambda_k$ sont les facteurs irréductibles de degré 1 et les $(X - (a_k + ib_k))(X - (a_k - ib_k)) = (X^2 - 2a_kX + (a_k^2 + b_k^2))$ sont les facteurs irréductibles de degré 2 de χ_u.

Exercice 93.

1. Au choix cotrigonaliser, ou par exemple faire le cas $M = I_n$, puis M inversible par commutation puis M quelconque par densité (attention il faut garder la commutation donc faire $M + tI_n$ « à la main »).
2. Non, par exemple que dire de E_{12} et E_{21} pour $n = 2$? Généraliser à $n \geq 2$.
3. Il suffit de prendre $M = \lambda I_n$ avec $\lambda \neq 0$ pour constater que χ_A et X^n sont des fonctions polynomiales égales.

Exercice 94. Cf cours.

Exercice 95.

1. Si $A^2 = 0$, montrer qu'on peut écrire A dans une base convenable sous forme de blocs : $A = \left(\begin{array}{c|c} 0_{r,n-r} & I_r \\ \hline 0_{n-r,n-r} & 0_{n-r,r} \end{array}\right)$ avec $r = \text{rg}(A)$.
2. Ici connaître les blocs de Jordan est utile : choisir un exemple revient à choisir deux suites d'entiers décroissantes différentes dont la somme (taille) fait 7 et le maximum (ordre de nilpotence) est 3 et avec le même nombre de termes (dimension du noyau). On remarque que 7 est la plus petite taille possible.

Exercice 96.

1. Le montrer pour une matrice triangulaire supérieure (il suffit de multiplier par une matrice diagonale bien choisie pour rendre les coefficients diagonaux distincts), puis s'en sortir par similitude.
2. Écrire par exemple $A = PJ_rP^{-1}(PQ)$.
3. La preuve précédente fournissait deux matrices.
4. Par Fitting il reste à le montrer pour les nilpotentes, et par exemple un bloc de Jordan est le produit d'une matrice diagonale de 1 et 0 et d'une puissance de la matrice de permutation circulaire $C(X^n - 1)$.

Exercice 97. Cf cours

Exercice 98. L'ensemble des PA est l'ensemble des matrices dont le noyau est celui de A.

Une matrice de rang 1 est toujours trigonalisable.

Et pour un rang au moins 2, on peut construire une matrice non trigonalisable sur un supplémentaire du noyau, avec $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 99.

1. Remarquer que T est trigonalisable de coefficients diagonaux distincts donc diagonalisable. Et la même base diagonalise A qui est un polynôme en T. Puis T est en fait un polynôme d'interpolation de Lagrange (qui à un a_i associe une racine r-ième t_i de a_i) en A, donc triangulaire supérieure.
   Méthode géométrique : T commute avec $A = T^r$ donc stabilise les droites propres $D_i = \mathrm{Ker}(A - a_i I_n)$. Or $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k) = D_1 \oplus \cdots \oplus D_k$ car l'induit de A sur $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ a pour valeurs propres $a_1, \dots, a_k$. Donc T stabilise chaque $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$.
2. Le polynôme précédent détermine entièrement T, et ce dernier est entièrement déterminé par le choix d'une racine r-ième t_i pour chaque a_i.
   Distinguer si 0 est un des a_i ou non.
   Méthode géométrique : T est diagonale dans une base de vecteurs propres de A, de coefficients t_i tels que $t_i^r = a_i$.
3. Par exemple $-I_2$ et des matrices de rotation bien choisies.
4. Par exemple une matrice nilpotente non nulle.

Exercice 100.

1. Si A n'est pas inversible, c'est bon, sinon cela revient à trouver une valeur propre à $A^{-1}B$.
2. Par récurrence sur n.

Exercice 101. En considérant des drapeaux adaptés $(F_k)_{0 \leq k \leq n}$ et $(G_k)_{0 \leq k \leq n}$.

Comprendre pourquoi il suffit de construire $(e_1, \dots, e_n)$ et σ tel que pour tout i, $e_i \in F_i \cap G_{\sigma^{-1}(i)}$ et $e_i \notin F_{i-1}$, on obtient une base adaptée aux deux drapeaux.

Poser

$$\tau(i) = \min\{j \in [\![0, n]\!] ; F_i \cap G_j \not\subseteq F_{i-1}\}$$

et choisir $e_i \in F_i \cap G_{\tau(i)} \setminus F_{i-1}$.

Il reste à montrer que τ est injective et que tout marche bien.

Exercice 102. Trigonaliser.

Exercice 103.

1. Regarder la diagonale.
2. C'est la matrice dans la base canonique de $P \mapsto P(X + 1)$.
3. On abaisse le degré de exactement 1 donc le minimal est $(X - 1)^{n+1}$.

Exercice 104. Remarquer que le problème est invariant par équivalence.

Si M est inversible alors l'opposé d'une valeur propre de $M^{-1}P$ pose problème.

Si M n'est pas inversible alors se ramener à une matrice de rang $r < n$ simple, par exemple pas $\mathrm{diag}(I_r, 0)$ mais un bloc de Jordan nilpotent de taille $r+1$ complété par des zéros.

On remarque qu'un sens reste vrai pour tout corps.

Pour l'autre sens, remarquer que sur $\mathbb{R}$ en dimension impaire cela reste vrai, et en dimension paire on a le fameux $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et I_2.

Exercice 105.

1. On a BA nilpotent (car $(BA)^{n+1} = 0$) et une majoration de l'indice de nilpotence.
2. Par exemple par dimension des noyaux itérés (classique).
3. On a une inclusion, le grand est une droite, le petit non trivial.
4. Sinon par la question précédente, passer de $(AB)^n = 0$ à $B(AB)^{n-1} = 0$ à $(AB)^{n-1} = 0$.

Exercice 106. Un polynôme annulateur est $X(X-2)^2$, on peut donc trigonaliser et le nombre de 2 est fixé. Et il faut ensuite écrire 4 comme somme de 2 et de 1.

Exercice 107. Une fois connue la réduction de Jordan des nilpotents (et son unicité), cela revient à compter le nombre de façons d'écrire n comme somme de 1, 2 et 3.

C'est à dire le nombre de couples $(b, c) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2b + 3c \leq n$.

On obtient une récurrence d'ordre 6 et sauf erreur de calcul on obtient

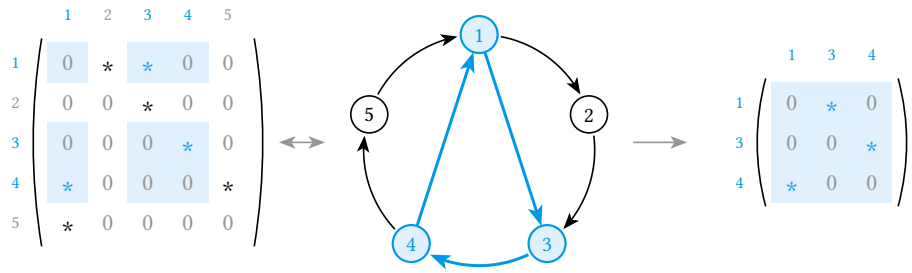
$$p_n = \begin{cases} \dfrac{(n+3)^2+3}{12} & \text{si } n \equiv 0\ [6] \\ \dfrac{(n+1)(n+5)}{12} & \text{si } n \equiv \pm 1\ [6] \\ \dfrac{(n+2)(n+4)}{12} & \text{si } n \equiv \pm 2\ [6] \\ \dfrac{(n+3)^2}{12} & \text{si } n \equiv 3\ [6] \end{cases}$$

Exercice 108. Cela revient à montrer qu'une renumérotation de la base canonique permet de rendre M triangulaire supérieure stricte.

En considérant le graphe orienté dont les arêtes correspondent aux coefficients non nuls, cela revient à montrer qu'il existe un ordre topologique.

Cela revient donc à montrer l'absence de cycle.

Mais un cycle de longueur minimale, si il existe, fournit un mineur principal non nul car c'est une matrice ressemblant justement à une matrice de permutation.



Exercice 109.

1. Dans un sens $\mathscr{N} \subseteq \mathscr{H}$. Dans l'autre remarquer que (se généralise) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes.
2. On connaît f^2 sur une base.

Exercice 110. Regarder coefficient par coefficient $(A + \lambda B)^n$. Chaque coefficient est un polynôme en λ de degré inférieur ou égal à n, qui s'annule en $n+1$ points λ_i.

Prendre coefficients constants et coefficients dominants.

Exercice 111. Si un polynôme annulateur est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, on peut alors diagonaliser dans $\mathbb{C}$ et deux valeurs propres complexes conjuguées ont le même ordre de multiplicité (polynôme caractéristique réel).

1. Montrer que $X^3 - X - 1$ admet une seule racine réelle et qu'elle est strictement positive.
2. Pas de racines réelles.
3. Les racines non nulles sont complexes non réelles.
4. Les racines sont 2 et $-1 \pm 2i$, d'où une inclusion dans $\left\{2^{n-2k}5^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}, 2k \leq n\right\}$. Pour l'autre inclusion faire des blocs compagnons.

Exercice 112. Lemme des noyaux puis remarquer que f n'a pas de valeur propre réelle sur $P = \mathrm{Ker}(f^2 + \mathrm{Id})$. Le commutant, les racines carrées (à chercher dans $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}, f, f^2)$) et les sous-espaces stables se lisent ensuite par blocs sur $\mathrm{Ker}(f) \oplus P$. Pour la dernière question construire la base de $\mathrm{Ker}(g^2 + \mathrm{Id})$ par récurrence en ajoutant $(y, g(y))$ avec y hors du sous-espace déjà construit.

Exercice 113.

1. Écrire $P = DP_1$ et $Q = DQ_1$ puis utiliser les relations de Bézout $D = UP + VQ$ et $1 = U_1P_1 + V_1Q_1$. Pour la dernière, si $y = P(f)(a) = Q(f)(b)$, se ramener au cas où $P_1(f)(a) = Q_1(f)(b)$.
2. Formule de Grassmann et théorème du rang.

Exercice 114.

1. Par un critère bien connu la racine réelle est irrationnelle et les deux racines non réelles conjuguées ont la même multiplicité, et leur somme est la différence d'un rationnel et d'un irrationnel. La seule façon d'avoir une trace rationnelle est de les grouper trois par trois. Donc $3|n$. Réciproquement matrice compagnon.
2. Le produit de ces trois racines est 2.
3. Même raisonnement en montrant que la somme de deux racines primitives cinquièmes de l'unité conjuguées (c'est à dire $2\cos\left(2\frac{\pi}{5}\right)$) est irrationnelle.

Exercice 115. On est d'ordre fini sur une base donc d'ordre fini sur tout $\mathbb{C}^n$.

Exercice 116. Un sens est Cayley-Hamilton standard.

Dans l'autre sens, il y a plusieurs méthodes qui s'inspirent de celles de Cayley-Hamilton.

- Si on s'intéresse uniquement à (un sous-corps de) $\mathbb{C}$ les deux ensembles de racines sont le spectre.
- Faire Frobenius ou au moins prendre $x \neq 0$, dont le polynôme « conducteur » divise π_M, écrire M par blocs avec le bloc compagnon de ce polynôme, puis déterminant compagnon et récurrence sur l'autre bloc diagonal (lui aussi annulé par π_M).
- Écrire dans $M_n(\mathbb{K}[X])$ ou au moins (si $\mathbb{K}$ est infini) pour tout λ, $\pi_M(\lambda)I_n = \pi_M(\lambda)I_n - \pi_M(M) = (\lambda I_n - M)Q(\lambda)$ pour un certain $Q(\lambda)$, puis prendre le déterminant.

Exercice 117.

1. Pour la borne $r+1$ noter v l'induit de u sur son image et remarquer que $X\pi_v(X)$ annule u. Alternativement écrire la matrice de u par blocs dans une base commençant par une base de $\mathrm{Ker}(u)$.
   Et puis Cayley-Hamilton.
2. Si $r < n$ regarder $\mathrm{diag}(I_r + N, 0)$ avec N nilpotente bien choisie. Si $r = n$ regarder $I_n + N$.
3. Même preuve avec l'induit de u sur $\mathrm{Im}(Q(u))$.
4. Appliquer la question 3 à $Q = X - \lambda$.

Exercice 118.

1. Sur $\mathbb{C}$ la nilpotence se lit sur le spectre.
2. Remarquer que l'ensemble cherché est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Remarquer aussi qu'il est engendré par la version sans carré de la décomposition en facteurs irréductibles de π_A.

Exercice 119.

1. Premier entre eux et Bézout (ou dimension finie, ou calcul explicite).
2. Irréductibilité.
3. On obtient les homothéties.
4. On obtient les homothéties ou les matrices semblables à des matrices diagonales par blocs $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ avec $b \neq 0$.

Exercice 120. Écrire $P = P(0) + XQ$ et se souvenir qu'un inverse à droite est un inverse à gauche.

Exercice 121. Ce sont des calculs usuels.

Exercice 122. Diagonaliser par blocs dans une base adaptée dans un sens, lemme des noyaux dans l'autre.

Exercice 123. Si l'ensemble est fini alors $M^p = M^q$ avec $p < q$, puis lemme des noyaux. Pour la question 2 se ramener à la question 1 en regardant une base.

Exercice 124. La matrice M est diagonalisable à valeurs propres racines cinquièmes de l'unité autres que 1. Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, puis sur $\mathbb{R}$ regrouper les valeurs propres conjuguées.

Exercice 125. Tester les homothéties. On obtient les monômes non nuls.

Exercice 126. Trigonaliser dans $\mathbb{C}$ et regrouper les valeurs propres par paires conjuguées. On obtient comme CNS si n est impair : $\mathrm{Rac}(P) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ et si n est pair : $\mathrm{Rac}(P) \cap \mathbb{R}_- = \emptyset$ ou $\mathrm{Rac}(P) \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Exercice 127. C'est bien sûr à un scalaire près (pour le caractère unitaire) le polynôme réciproque de celui de A (faire une double divisibilité par exemple).

Exercice 128. Remarquer par exemple qu'il y a une divisibilité et que le degré est une notion de rang donc invariante quand on change de corps.

Exercice 129. Cela revient à montrer, en notant $T : P \mapsto P(X+1)$ que π_T est de degré n. Mais par un argument de degré $\pi_T = (X-1)^n$.

Exercice 130.

1. Pour le premier juste évaluer P(M) en tant que matrice triangulaire par blocs. Dans l'autre sens il suffit de calculer $\pi_A(M)\pi_D(M)$.
   Le pgcd vaut 1 ssi le ppcm vaut le produit.
2. Regarder par exemple
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 131. Écrire $P - P(0) = X^v U$ avec $U(0) \neq 0$ et remarquer que U(D) est inversible et commute avec D.

Exercice 132. Dans un sens prendre des blocs de matrices compagnons de facteurs irréductibles de P, dans l'autre χ_M et π_M ont les mêmes facteurs irréductibles.

Exercice 133. Dans un sens Cayley-Hamilton et le fait que χ_M et π_M ont les mêmes facteurs irréductibles. Dans l'autre compléter la matrice compagnon de P par des matrices compagnons de facteurs irréductibles de P.

Exercice 134.

1. Par exemple il suffit de trouver P tel que $P(0) = 0$, $\pi_A \mid P - 1$ et $\pi_B \mid P - 1$.
   Alternativement poser $M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et $\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n+n} \,\middle|\, X - Y = 0 \right\}$. Le sous-espace $G = \mathrm{Vect}(M^k Z)_{k\in\mathbb{N}}$ est stable par M et $M(G) \subseteq \mathcal{H}$, or $M(G) = G$ par inversibilité. Donc $Z \in \mathcal{H}$.
2. Prendre $C(X^n - \lambda)$, e_n/λ pour deux valeurs non nulles de λ différentes pour montrer que $N \geq n + 1$. Dans l'autre sens remarquer que $n + 1$ vecteurs de $\mathcal{H}$ sont liés, puis multiplier la relation de liaison entre $MZ, \dots, M^{n+1}Z$ par une puissance de M^{-1} pour exprimer Z en fonction de $MZ, \dots, M^n Z$.

Exercice 135. Division euclidienne par π_f, puis terme constant de π_f. En dimension infinie regarder la dérivation D de $\mathbb{K}[X]$ puis $\mathrm{Id} - D$.

Exercice 136. Inverser $1 - R$, où $R(0) = 0$, par une somme géométrique tronquée.

Exercice 137. La fonction $x \mapsto x^3$ est injective sur $\mathbb{R}$, donc par interpolation de Lagrange sur $\mathrm{Sp}(A) \cup \mathrm{Sp}(B)$ il existe un même P tel que $A = P(A^3)$ et $B = P(B^3)$.

Exercice 138.

1. C'est le lemme chinois (ou interpolation de Lagrange, ou calcul explicite).
2. Tout élément de $\mathbb{K}^r$ admet un polynôme annulateur scindé à racines simples (prendre le produit des annulateurs des valeurs distinctes). Puis $\dim(\mathbb{K}^r) = \dim(\mathbb{K}[f])$.