Compléments et révisions d'algèbre linéaire

Si ces lettres ne sont pas définies autrement dans un exercice,

- K désigne un corps de caractéristique nulle, et les notions d'algèbre linéaire sont à entendre *sur* K.
- E et F désignent deux K-espaces vectoriels.

Espaces vectoriels et applications linéaires

Liberté

Exercice 1. *Transvection.*

Soit $\mathscr{F} = (e_0, e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathrm{K}$.

On définit $\mathscr{F}' = (e_0, e_1 + \lambda_1 e_0, \dots, e_n + \lambda_n e_0)$.

Montrer que $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}') = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et que $\mathscr{F}'$ est libre si et seulement si $\mathscr{F}$ l'est.

Exercice 2. *Famille tirée d'une autre famille.*

Soit $(x_i)_{i=1}^n$ une famille d'un espace vectoriel E. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit $y_i = \sum_{k=1}^{i} x_k \in \mathrm{E}$.

1. Montrer que si $(x_i)_{i=1}^n$ est libre, alors $(y_i)_{i=1}^n$ l'est aussi.
2. Montrer que si $(x_i)_{i=1}^n$ engendre E, alors $(y_i)_{i=1}^n$ l'engendre aussi.
3. Que dire des réciproques de ces deux résultats ?

Exercice 3. *Échelonnement (généralisé).*

1. Soit $z \in \mathrm{K}$ et $(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ une famille de polynômes non nuls dont les multiplicités $\mu_z(\mathrm{P}_i)$ sont distinctes. Montrer que $(\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n)$ est libre.
2. On définit une suite de fonctions $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ en posant $f_1 : x \mapsto \ln(1+x)$ et, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1} = f_1 \circ f_n$. Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est libre.
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction non nulle telle que $\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = 0$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $f_\alpha : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x+\alpha). \end{cases}$ Montrer que $(f_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 4. *Translations d'arctangente.*

Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on note $f_\tau : x \mapsto \arctan(x - \tau)$. Montrer que la famille $(f_\tau)_{\tau \in \mathbb{R}}$ est libre.

Exercice 5. $[\mathbb{R} : \mathbb{Q}] = +\infty$.

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Montrer que la famille $(\ln p)_{p \in \mathscr{P}}$ est $\mathbb{Q}$-libre.

Exercice 6. *Théorème de la base télescopique.*

Soit M/L/K une tour d'extensions de corps (c'est-à-dire que L est un sous-corps de M, et K un sous-corps de L). On suppose disposer d'une L-base $(y_j)_{j\in J}$ de M et d'une K-base $(x_i)_{i\in I}$ de L.

Montrer que $(x_i\, y_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est une K-base de M.

Sous-espaces vectoriels

Exercice 7. *Généralisation d'un grand classique.*

Soit E un espace vectoriel et F, G, H trois sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que si $F \subseteq G \cup H$, alors $F \subseteq G$ ou $F \subseteq H$.

Exercice 8. *Bases de polynômes sans racines.*

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que $\mathbb{R}_n[X]$ admette une base constituée de polynômes sans racines réelles.

Exercice 9. *Bases de sous-espaces vectoriels de* $K_n[X]$.

Soit E un sous-espace vectoriel de $K_n[X]$.

1. Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de degrés tous différents.
2. Montrer qu'il existe une base de E constituée de polynômes de même degré.

Exercice 10. *Existence de* block sequences.

Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension infinie de K[X] contient une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes non nuls telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) < \mathrm{val}(P_{n+1})$, où $\mathrm{val}(P_n)$ désigne la *valuation* de P_n, c'est-à-dire la multiplicité de 0 en tant que racine de P_n.

Applications linéaires

♠ **Exercice 11.** *Résultat fondamental sur deux endomorphismes commutant.*

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.

1. Montrer que $\ker u$ et $\mathrm{im}\, u$ sont stables sous v.
2. Montrer que, pour tout $\lambda \in K$, $E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda\, \mathrm{id}_E)$ est stable sous v.

Exercice 12. *Réciproque du résultat fondamental pour un projecteur.*

Soit $u, p \in \mathscr{L}(E)$, avec $p^2 = p$. On suppose que $\ker p$ et $\mathrm{im}\, p$ sont stables sous u.

Montrer que u et p commutent.

Exercice 13. *Projecteurs commutant de même image.*

Soit $p, q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs tels que $\mathrm{im}\, p = \mathrm{im}\, q$ et $p \circ q = q \circ p$. Montrer que $p = q$.

Exercice 14. *Différence de deux projecteurs.*

Soit p et $q \in \mathscr{L}(E)$ deux projecteurs.

1. Montrer que si $p \circ q + q \circ p = 0$, alors $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. En déduire que $p - q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = q$.

Exercice 15. *Anticommutation avec un projecteur.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et p un projecteur de E tels que $up + pu = 0$.

Montrer que $up = pu = 0$.

⋆ **Exercice 16.** *Crochet de Lie de deux symétries.*

Soit u et v deux symétries d'un espace vectoriel réel E.

1. Montrer que $\ker(uv - vu) = \ker(u + v) \oplus \ker(u - v)$.
2. Montrer que $\operatorname{im}(uv - vu) = \operatorname{im}(u + v) \cap \operatorname{im}(u - v)$.

♠ **Exercice 17.** *Scalaire plus nilpotent.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent et $\lambda \in K^*$. Montrer que $\lambda \operatorname{id}_E + u$ est un automorphisme.

Exercice 18. *Endomorphismes tels que $f^2 = -f$.*

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -f$.

1. Montrer que $\ker(f + \mathrm{id}) = \operatorname{im} f$.
2. Montrer que $E = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im}(f + \mathrm{id})$.

Exercice 19. *Images et noyaux.* *Mines*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\operatorname{im} u^2 = \ker u^3$. Montrer $\operatorname{im} u = \ker u^4$.

Exercice 20. *Images en somme directe.*

Soit E un espace vectoriel et $f, g \in \mathscr{L}(E)$.

Montrer que si $\operatorname{im}(f + g) = \operatorname{im} f \oplus \operatorname{im} g$, alors $E = \ker f + \ker g$.

Exercice 21. *Semisimplicité en dimension infinie.*

Soit E un espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent. On suppose que tout sous-espace vectoriel de E stable sous u possède un supplémentaire stable.

Montrer que $u = 0$.

Δ **Exercice 22.** *Pseudo-inverse d'Azumaya-Drazin.*

Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que $g \in \mathscr{L}(E)$ est un *pseudo-inverse* de f si $f \circ g = g \circ f$, $f \circ g \circ f = f$, et $g \circ f \circ g = g$.

L'endomorphisme f est dit *pseudo-inversible* s'il admet un pseudo-inverse.

1. Montrer que si f est pseudo-inversible, il admet un unique pseudo-inverse.
2. Montrer que f est pseudo-inversible si et seulement si $E = \ker f \oplus \operatorname{im} f$.

♠ **Exercice 23.** *Une autre condition de pseudo-inversibilité.*

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u$ si et seulement si $\ker(u^2) = \ker u$ et $\operatorname{im}(u^2) = \operatorname{im} u$.
2. Montrer qu'en général, les conditions $\ker(u^2) = \ker u$ et $\operatorname{im}(u^2) = \operatorname{im} u$ ne sont pas équivalentes.

⋆ **Exercice 24.** *Sélecteur linéaire de valeurs.*

Soit $\varphi : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire telle que pour toute suite u, $\varphi(u)$ soit une valeur prise par u.

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi = \text{év}_k : u \mapsto u_k$.

Exercice 25. *Noyaux itérés d'endomorphismes commutant.*

Soit $u, v \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes tels que $u \circ v = v \circ u$ et $\ker u \cap \ker v = \{0_E\}$.

Montrer que $\forall i, j \in \mathbb{N}, \ker(u^i) \cap \ker(v^j) = \{0\}$.

$\Delta\star$ **Exercice 26.** *Représentations de l'algèbre de Weyl.*

Soit $E \neq \{0_E\}$ un espace vectoriel sur un corps de caractéristique nulle, et $f, g \in \mathscr{L}(E)$ tels que $f \circ g - g \circ f = \mathrm{id}_E$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n \circ g - g \circ f^n$.
2. Montrer que la famille $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

$\star$ **Exercice 27.** *Somme de deux automorphismes.*

On considère l'endomorphisme $\varphi : P \mapsto XP$ de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que φ s'écrit comme la somme de deux automorphismes, mais pas comme la somme de deux automorphismes qui commutent.

Exercice 28. *Produit, coproduit.*

Soit E, F, G trois espaces vectoriels.

1. Montrer que $\mathscr{L}(E, F \times G)$ est isomorphe à $\mathscr{L}(E, F) \times \mathscr{L}(E, G)$.
2. Montrer que $\mathscr{L}(E \times F, G)$ est isomorphe à $\mathscr{L}(E, G) \times \mathscr{L}(F, G)$.

Dimension finie

Utilisation de bases (et de supplémentaires)

Exercice 29. *Question philosophique.*

Pourquoi la formule de Grassmann est-elle vraie alors qu'en général, étant donné trois sous-espaces vectoriels F_1, F_2, F_3 d'un espace vectoriel de dimension finie E, on a

$$\dim(F_1 + F_2 + F_3) \neq \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 - \dim(F_1 \cap F_2) - \dim(F_1 \cap F_3) - \dim(F_2 \cap F_3) + \dim(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \ ?$$

♠ **Exercice 30.** *Lemmes de factorisation.*

On admet dans cet exercice que tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel possède un supplémentaire.

1. Soit E_1, E_2, F trois espaces vectoriels et $f_1 \in \mathscr{L}(E_1, F)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E_2, F)$.
   Montrer qu'il existe $u \in \mathscr{L}(E_1, E_2)$ tel que $f_1 = f_2 \circ u$ si et seulement si $\operatorname{im} f_1 \subseteq \operatorname{im} f_2$.
2. Soit E, F_1, F_2 trois espaces vectoriels et $f_1 \in \mathscr{L}(E, F_1)$, $f_2 \in \mathscr{L}(E, F_2)$.
   Montrer qu'il existe $v \in \mathscr{L}(F_1, F_2)$ tel que $f_2 = v \circ f_1$ si et seulement si $\ker f_1 \subseteq \ker f_2$.

Exercice 31. *Encore un résultat de factorisation.*

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u, v, f \in \mathscr{L}(E, F)$.

On suppose $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} u + \operatorname{im} v$. Montrer $\exists a, b \in \mathscr{L}(E) \ : \ f = u \circ a + v \circ b$.

Exercice 32. *Sous-espace vectoriel déplaçable par un automorphisme.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et F un sous-espace vectoriel de E.

À quelle condition peut-on trouver un automorphisme $u \in \mathrm{GL}(E)$ tel que $F \cap u[F] = \{0_E\}$?

Calculs de dimension

Exercice 33. *Endomorphismes commutant avec la transposition.*

Montrer que $\left\{u \in \mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R})) \,\middle|\, \forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), u(\mathrm{A}^{\mathrm{T}}) = u(\mathrm{A})^{\mathrm{T}}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{M}_n(\mathbb{R}))$ et déterminer sa dimension.

Exercice 34. *Endomorphismes stabilisant deux sous-espaces vectoriels.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $\mathrm{F}_1, \mathrm{F}_2$ deux sous-espaces vectoriels de E. On note

$$\mathscr{A} = \left\{u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \,\middle|\, u[\mathrm{F}_1] \subseteq \mathrm{F}_1 \text{ et } u[\mathrm{F}_2] \subseteq \mathrm{F}_2\right\}.$$

1. Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
2. On suppose F_1 et F_2 supplémentaires. Déterminer la dimension de $\mathscr{A}$.
3. Que devient la formule dans le cas général ?

Rang

Exercice 35. *À faire sans calcul.*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer sans calcul qu'on peut trouver un triplet non nul de réels (λ, μ, ν) tel que la matrice $\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} + \nu\mathrm{C}$ soit triangulaire supérieure et de trace nulle.

Exercice 36. *Dérivation d'une famille libre.*

Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille libre de fonctions dérivables $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer $\mathrm{rg}(f_1', \dots, f_n') \geq n - 1$.

⋆ **Exercice 37.** *Espaces vectoriels de fonctions monotones.*

1. Soit $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^{[0,1]}$ un espace vectoriel constitué de fonctions monotones. Montrer que $\dim \mathrm{E} \leq 2$.
2. Même question pour $\mathrm{E} \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 38. *Une caractérisation des projecteurs en termes d'additivité du rang.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Montrer que f est un projecteur si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}} - f)$.

Exercice 39. *Postcomposition.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Déterminer le rang de $\mathrm{L}_u : \begin{cases} \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{L}(\mathrm{E}) \\ v \mapsto u \circ v. \end{cases}$

Inégalités fondamentales sur la dimension et le rang

Exercice 40. *Autour de la sous-additivité du rang.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$.
   Montrer que $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = \dim(\mathrm{E})$.
2. Réciproquement, soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. À quelle condition peut-on trouver $v \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u \circ v = 0$ et $u + v \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$?

Δ **Exercice 41.** *Inégalité de Frobenius (1911).*

Soit u, v et w trois endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E. Montrer

$$\operatorname{rg}(uv) + \operatorname{rg}(vw) \leq \operatorname{rg}(v) + \operatorname{rg}(uvw).$$

Exercice 42. *Dimension d'une image réciproque et concavité des nullités itérées.*

1. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et V un sous-espace vectoriel de F. Montrer que
$$\dim \mathrm{E} - \dim f^{-1}[\mathrm{V}] \leq \dim \mathrm{F} - \dim \mathrm{V}.$$
2. Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer que la suite
$$\left(\dim \ker u^{k+1} - \dim \ker u^k\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$$
est positive et décroissante.

Matrices : questions de rang

♠ **Exercice 43.** *Formule trace-rang.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur. Montrer que $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$.

⋆ **Exercice 44.** *Famille compatible de projecteurs.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(p_k)_{k=0}^n$ une famille d'endomorphismes de E telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \operatorname{rg} p_k = k \qquad \text{et} \qquad \forall k, \ell \in [\![0, n]\!], p_k \circ p_\ell = p_{\min(k,\ell)}.$$

Montrer qu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(p_k) = \operatorname{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{k \text{ fois}}, 0, \dots, 0).$$

Exercice 45. *Une inégalité stupide.*

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \mathrm{A}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{i,j} |a_{i,j}| \leq n\sqrt{\operatorname{rg} \mathrm{A}}$.

Exercice 46. *Directions dans* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. *Centrale (PSI)*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{B} + \lambda \mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 47. *Rang maximal.*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer $\max\left\{\operatorname{rg}(\mathrm{UA} + \mathrm{BV}) \,\middle|\, \mathrm{U}, \mathrm{V} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})\right\}$ en fonction de $\operatorname{rg} \mathrm{A}$ et $\operatorname{rg} \mathrm{B}$.

⋆ **Exercice 48.** *Modifier le rang d'une matrice.* *ÉNS*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

1. Montrer qu'en modifiant $n - \operatorname{rg}(\mathrm{A})$ coefficients de A, on peut la rendre inversible.
2. On suppose A non nulle. Montrer qu'en modifiant au plus $(n - \operatorname{rg} \mathrm{A} + 1)^2$ de ses coefficients, on peut baisser strictement son rang.

Matrices : autres questions

Δ **Exercice 49.** *Conséquences de la cyclicité de la trace.*

1. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}^*, \operatorname{tr}\big((A+B)^k\big) = \operatorname{tr}(A^k) + \operatorname{tr}(B^k)$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{Z})$ et p premier. Montrer $\operatorname{tr}\big((A+B)^p\big) = \operatorname{tr}(A^p) + \operatorname{tr}(B^p) \pmod p$.

Exercice 50. *Somme de deux inversibles.*

Montrer que toute matrice de $M_n(K)$ est somme de deux matrices inversibles.

Exercice 51. *Bases inversibles.*

Peut-on trouver une base de $M_n(\mathbb{R})$ composée de matrices inversibles ?

Δ **Exercice 52.** *Lemme de Hadamard sur les matrices à diagonales dominantes.*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j\in[\![1,n]\!]\\ j\neq i}} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

♠ **Exercice 53.** *Conséquence matricielle de la caractérisation des homothéties.*

Soit $A \in M_n(K) \setminus \mathrm{Vect}(I_n)$, et $\lambda \in K$. Montrer qu'il existe $P \in GL_n(K)$ telle que $[P^{-1}AP]_{1,1} = \lambda$.

Δ **Exercice 54.** *Théorème de Shoda (1936).*

Soit K un corps de caractéristique nulle et $n \geq 2$.

1. Soit $A \in M_n(K)$ telle que $\operatorname{tr} A = 0$. Montrer que A est semblable à une matrice $B \in M_n(K)$ telle que $\forall k \in [\![1,n]\!], [B]_{k,k} = 0$.
2. Soit $D = \operatorname{diag}(1, 2, \dots, n)$. Déterminer l'image et le noyau de l'endomorphisme $\mathrm{ad}_D : M \mapsto DM - MD$ de $M_n(K)$.
3. Montrer $\mathfrak{sl}_n(K) := \big\{A \in M_n(K) \,\big|\, \operatorname{tr} A = 0\big\} = \big\{BC - CB \,\big|\, B, C \in M_n(K)\big\}$.

Nilpotence

Exercice 55. *Solution alternative d'un grand classique.*

Soit $n \geq 2$ et H un hyperplan de $M_n(K)$. On veut montrer que H contient au moins une matrice inversible.

1. Soit N une matrice nilpotente.
   Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha, \beta \in K$ pour que $\alpha I_n + \beta N$ soit inversible.
2. Conclure, en distinguant suivant que H contient ou non toutes les matrices nilpotentes.

Exercice 56. *Lemme de Nakayama.* *X*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent et $S \subseteq E$ un sous-espace vectoriel stable sous u. Montrer que si $E = S + \operatorname{im} u$, alors $E = S$.

Déterminants

Calculs et déterminants classiques

♠ **Exercice 57.** *Complément de Schur.*

Soit $A, B, C, D \in M_n(K)$ et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$.

1. On suppose A inversible. Montrer $\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.
2. On suppose en outre que A et C commutent. Montrer que $\det(M) = \det(AD - CB)$.

Δ **Exercice 58.** *Déterminants circulants.*

Dans tout l'exercice, on fixe $n \geq 2$ et $\zeta = \exp\left(i\frac{2\pi}{n}\right)$.

1. On note $C = E_{1,n} + \sum_{j=1}^{n-1} E_{j+1,j} \in M_n(\mathbb{C})$. Montrer $C^n = I_n$.
2. Montrer que pour tout $\omega \in \mathbb{U}_n$, l'espace vectoriel $\left\{X \in \mathbb{C}^n \,\middle|\, CX = \omega X\right\}$ est une droite, et en déduire que C est semblable à la matrice $\mathrm{diag}(1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1})$.
3. En déduire que, pour tous $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{vmatrix} = \prod_{j=0}^{n-1} \left(a_0 + \zeta^j a_1 + \cdots + \zeta^{j(n-1)} a_{n-1}\right).$$

Δ⋆ **Exercice 59.** *Déterminant de Cauchy.*

Soit $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n \in K$ tels que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], a_i + b_j \neq 0$.

Calculer le déterminant de $\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 60. *Déterminant de Smith.*

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ la matrice $n \times n$ telle que, pour tous indices $i, j \in [\![1, n]\!]$, $[A]_{i,j}$ est le nombre de diviseurs communs à i et j. Calculer $\det A$.

Exercice 61. *Déterminant à la Vandermonde.*

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \deg P_i = i$. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \cos\theta_1 & \cos 2\theta_1 & \cdots & \cos((n-1)\theta_1) \\ 1 & \cos\theta_2 & \cos 2\theta_2 & \cdots & \cos((n-1)\theta_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 1 & \cos\theta_n & \cos 2\theta_n & \cdots & \cos((n-1)\theta_n) \end{vmatrix}$.

Exercice 62. *Déterminant de Pascal.*

1. Soit $x_1, \dots, x_n$ des réels et $(P_0, \dots, P_{n-1})$ une famille de polynômes telle que $\forall i \in [\![0, n-1]\!], \deg P_i = i$. Calculer le déterminant $\det\left(P_{j-1}(x_i)\right)_{1\leq i,j\leq n}$ en fonction du déterminant de Vandermonde $V(x_1, \dots, x_n)$.
2. En déduire $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} & \binom{n}{n-1} \\ 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots & \binom{n}{n-2} & \binom{n+1}{n-1} \\ 1 & 4 & 10 & 20 & \cdots & \binom{n+1}{n-2} & \binom{n+2}{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \binom{n-1}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n+1}{3} & \cdots & \binom{2n-4}{n-2} & \binom{2n-3}{n-1} \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n+1}{2} & \binom{n+2}{3} & \cdots & \binom{2n-3}{n-2} & \binom{2n-2}{n-1} \end{vmatrix}$.

Exercice 63. *Déterminant de Vandermonde incomplet.* *X*

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathrm{K}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$.

Exercice 64. *Déterminants de Gram.*

Étant donné une famille $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_n)$ dans un espace préhilbertien E, on définit le *déterminant de Gram* (ou *gramien*) $G(\mathscr{F}) = \det\left(\langle x_i | x_j \rangle\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

1. On suppose $\mathscr{F}$ liée. Montrer que $G(\mathscr{F}) = 0$.

Dans la suite, on suppose la famille $\mathscr{F}$ libre.

2. Montrer qu'il existe une famille orthonormée $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ telle que $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$.
3. Exprimer la matrice M de $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ à l'aide de produits scalaires, et en déduire l'égalité de déterminants $G(\mathscr{F}) = \det(M^T M)$.
4. Montrer que $G(\mathscr{F}) > 0$.

Remarque. On a démontré $G(\mathscr{F}) \geq 0$, avec égalité si et seulement si $\mathscr{F}$ est liée.

5. **Application**. Montrer que $\det\left(\frac{1}{i+j+1}\right)_{0\leq i,j\leq n} > 0$.

Exercice 65. *Distances impaires.*

Le but de l'exercice est de prouver que quatre points du plan A, B, C et D ne peuvent pas avoir mutuellement des distances qui soient des entiers impairs. Dans toute la suite, on note x, y et z les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$.

1. Montrer que le double du produit scalaire $\langle x, y \rangle$ est un entier congru à 1 modulo 8.
2. En déduire que la matrice $G = \begin{pmatrix} \langle x,x \rangle & \langle x,y \rangle & \langle x,z \rangle \\ \langle y,x \rangle & \langle y,y \rangle & \langle y,z \rangle \\ \langle z,x \rangle & \langle z,y \rangle & \langle z,z \rangle \end{pmatrix}$ est inversible.
3. Aboutir à une contradiction (ce qui démontre le résultat annoncé).

Exercice 66. *Une inégalité euclidienne.* *X*

Soit E un espace euclidien et $x_1, \dots, x_p \in \mathrm{E}$ tels que $\forall i \neq j \in [\![1, p]\!], \langle x_i | x_j \rangle = -1$.

Montrer $\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{1 + \|x_i\|^2} \leq 1$. Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 67. *Déterminant d'un endomorphisme polynomial.*

Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on note $\mathrm{Q} = f(\mathrm{P})$ le polynôme défini par $\forall x \in \mathbb{R}, \mathrm{Q}(x) = \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\, dt$.

1. Montrer que f est un endomorphisme bien défini de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.
2. Calculer dét(f).

Exercice 68. *Déterminant de la dérivation.*

Soit $\mathrm{E} = \left\{ x \mapsto \mathrm{P}(x)e^x \,\middle|\, \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}] \right\}$. Calculer le déterminant de l'endomorphisme de dérivation sur E.

Rang et perturbation du déterminant

Exercice 69. *Déterminant et rang.* *Mines*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, avec B de rang 1. Montrer que $\det((\mathrm{A}+\mathrm{B})(\mathrm{A}-\mathrm{B})) \leq (\det \mathrm{A})^2$.

Exercice 70. *Déterminant de Hurwitz et théorème de De Bruijn-Erdős.*

1. Soit $\mathrm{A}, \mathrm{H} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$, avec H de rang 1. Montrer que $t \mapsto \det(\mathrm{A} + t\mathrm{H})$ est une fonction affine.
2. Soit $a, b, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}$. Calculer $\begin{vmatrix} r_1 & a & a & \cdots & a \\ b & r_2 & a & \cdots & a \\ b & b & r_3 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & r_n \end{vmatrix}$.
3. En déduire que $\begin{pmatrix} r_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & r_2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & r_3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ est inversible dès que $r_i > 1$.
4. En déduire que n points non alignés du plan définissent au moins n droites.

Questions d'inversibilité

♠ **Exercice 71.** $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Montrer que l'ensemble des inversibles de l'anneau $\mathrm{M}_n(\mathbb{Z})$ est $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) := \left\{ \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Z}) \,\middle|\, \det \mathrm{A} = \pm 1 \right\}$.

Exercice 72. *Progressions arithmétiques dans* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. On suppose que, pour tout $k \in [\![0, 4]\!]$, la matrice $\mathrm{A} + k\mathrm{B}$ est inversible, d'inverse appartenant à $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{A} + 5\mathrm{B}$ est inversible, d'inverse appartenant à $\mathrm{M}_2(\mathbb{Z})$.

Exercice 73. *Un système de Чебышёв.* *Centrale*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ et $b_1 < b_2 < \cdots < b_n \in \mathbb{R}$. On considère la matrice $\mathrm{M} = \left(e^{a_i b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer $\det \mathrm{M} > 0$ lorsque $n = 2$.
2. On suppose $\forall j \in [\![1, n]\!], b_j = j - 1$. Calculer $\det \mathrm{M}$.
3. Montrer que M est inversible et en déduire $\det \mathrm{M} > 0$.

♠ **Exercice 74.** *Lemme de descente de la similitude.*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) : \mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$. Montrer $\exists \mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{B} = \mathrm{PAP}^{-1}$.

⋆ **Exercice 75.** *Coefficients forçant l'inversibilité d'une matrice.* *Ulm*

1. Donner des réels $a_1, a_2, \dots, a_{n^2}$ distincts tels que toute matrice possédant ces coefficients soit inversible.
2. Montrer que l'on peut choisir ces coefficients dans $[1, 2]$.

⋆⋆ **Exercice 76.** *Pinceau de matrices non inversibles.* *Ulm*

Soit $n \geq 2$ et $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $(t_i)_{i=0}^n$ une famille de $n+1$ nombres distincts.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\det(\mathrm{A} + t_i \mathrm{B}) = 0$.

(ii) Il existe deux sous-espaces vectoriels V, W de $\mathbb{R}^n$ tels que $\dim \mathrm{V} > \dim \mathrm{W}$ et $\begin{cases} \mathrm{A}[\mathrm{V}] \subseteq \mathrm{W} \\ \mathrm{B}[\mathrm{V}] \subseteq \mathrm{W} \end{cases}$.

Mélange

Exercice 77. *Structures presque-complexes.*

Soit $n \geq 1$. Montrer qu'il existe $\mathrm{J} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{J}^2 = -\mathrm{I}_n$ si et seulement si n est pair.

Exercice 78. *Plus artificiel, tu meurs.*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que A, B et A + B soient inversibles vérifiant $(\mathrm{A} + \mathrm{B})^{-1} = \mathrm{A}^{-1} + \mathrm{B}^{-1}$.

Montrer que $\det \mathrm{A} = \det \mathrm{B}$.

Exercice 79. *Une petite propriété arithmétique.* *X*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont tous les coefficients appartiennent à $\{\pm 1\}$.

Montrer que $\det \mathrm{A}$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Exercice 80. *Un lemme d'Abel.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On définit

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{E} \times \cdots \times \mathrm{E} \to & \mathrm{K} \\ (v_1, \dots, v_n) \mapsto \det_{\mathscr{B}}(u(v_1), v_2, \dots, v_n) + \cdots + \det_{\mathscr{B}}(v_1, v_2, \dots, u(v_n)). \end{cases}$$

Montrer $\varphi = \mathrm{tr}(u) \det_{\mathscr{B}}$.

Exercice 81. *Critère de convexité.*

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I. À quelle condition a-t-on

$$\forall x_1 < x_2 < x_3 \in \mathrm{I}, \begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} \geq 0 \ ?$$

Exercice 82. *Critère de liberté.*

Soit $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre si et seulement s'il existe $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ tels que $\det\left(f_i(x_j)\right)_{1 \leq i,j \leq n} \neq 0$.

Exercice 83. *Déterminant d'une somme.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que
$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = f(\det \mathrm{A}, \det \mathrm{B}) \ ?$$
2. Quelles sont les matrices $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que
$$\forall \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}), \det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) = \det(\mathrm{A}) + \det(\mathrm{B}) \ ?$$

Exercice 84. *Un déterminant par blocs.*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix}$. Montrer que $\det \mathrm{M} = \det(\mathrm{A} + \mathrm{B}) \det(\mathrm{A} - \mathrm{B})$.

Exercice 85. *Un déterminant par blocs,* bis. *X*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\begin{vmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ -\mathrm{B} & \mathrm{A} \end{vmatrix} \geq 0$.

Algèbres

Exercice 86. *Régularité au sens de von Neumann de* $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. *X*

Montrer $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \exists \mathrm{U} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) : \mathrm{A} = \mathrm{AUA}$.

Δ **Exercice 87.** *Idéaux de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Décrire $\mathscr{L}(\mathrm{E})\, u = \left\{ v \circ u \,\middle|\, v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \right\}$.
2. Déterminer les *idéaux à gauche* de l'anneau $\mathscr{L}(\mathrm{E})$, c'est-à-dire les sous-groupes additifs I de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\forall u \in \mathrm{I}, \forall a \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), a \circ u \in \mathrm{I}$.
3. Déterminer les idéaux à droite de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
4. Montrer que $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ est une algèbre *simple*, c'est-à-dire que ses seuls idéaux *bilatères* (à gauche et à droite) sont les idéaux triviaux $\{0\}$ et $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.
5. Soit $\varphi : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un morphisme d'algèbres. Montrer que φ est un automorphisme.

Exercice 88. *Théorème de Skolem-Noether pour* $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

1. Soit $(u_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une famille de n^2 endomorphismes de E tels que
$$\forall i,j,k,\ell \in [\![1,n]\!], u_{i,j}\circ u_{k,\ell} = \mathbb{1}_{j=k}\, u_{i,\ell} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = \sum_{i=1}^{n} u_{i,i}.$$
Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\forall i,j \in [\![1,n]\!], \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_{i,j}) = \mathrm{E}_{i,j}$.
2. Soit $\varphi : \mathrm{M}_n(\mathrm{K}) \to \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ un morphisme d'algèbres.
Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ tel que $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \varphi(\mathrm{A}) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.

Exercice 89. *Une forme faible d'un théorème de Schur (1905).*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $\mathrm{V} \subseteq \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un sous-espace vectoriel d'endomorphismes tel que $\forall u,v \in \mathrm{V}, u\circ v = 0_{\mathscr{L}(\mathrm{E})}$. Montrer que $\dim \mathrm{V} \leq n^2/4$.

Exercice 90. *Décomposition de* $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ *en sous-espaces vectoriels anticommutant.*

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un projecteur de rang r. Montrer que $\mathscr{A}(p) = \left\{ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}) \,\middle|\, p\circ f + f\circ p = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ dont on déterminera la dimension.
2. Soit $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\forall u \in \mathscr{U}, \forall v \in \mathscr{V}, uv+vu = 0$ et $\mathscr{U} + \mathscr{V} = \mathscr{L}(\mathrm{E})$.
Montrer que $\mathscr{U}$ ou $\mathscr{V}$ est réduit à $\{0\}$.

Exercice 91. *Sous-algèbres spéciales.*

Montrer qu'il existe un nombre fini de sous-algèbres de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ contenant $\mathrm{D}_n(\mathrm{K})$.

Applications combinatoires

Exercice 92. *Combinatoire et algèbre linéaire.*

Soit $\mathrm{E}_0, \dots, \mathrm{E}_n$ des parties non vides de $[\![1,n]\!]$.
Montrer qu'il existe deux parties non vides et disjointes I et J de $[\![0,n]\!]$ telles que $\bigcup_{i\in \mathrm{I}} \mathrm{E}_i = \bigcup_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{E}_j$.

Exercice 93. *Inégalité de Fisher.*

1. Soit $a > 0$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont $> a$, et dont les coefficients hors diagonale valent a. Montrer que A est inversible.
2. Soit $\mathrm{E}_1, \dots, \mathrm{E}_r$ des parties distinctes de $[\![1,n]\!]$ telles que toutes les intersections $\mathrm{E}_k \cap \mathrm{E}_\ell$ (avec $k \neq \ell$) aient le même nombre d'éléments $a > 0$.
En considérant la matrice $\mathrm{B} = \left(\mathbb{1}_{(j\in \mathrm{E}_i)}\right) \in \mathrm{M}_{r,n}(\mathbb{R})$, montrer que $r \leq n$.

Applications algébriques

♠ **Exercice 94.** *Première formule de projection.*

Soit K un corps de caractéristique nulle. Si $G \subseteq GL_n(K)$ est un groupe fini, on note $p_G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in M_n(K)$.

1. Montrer que p_G est un projecteur dont l'image est le sous-espace vectoriel $\left\{x \in K^n \,\middle|\, \forall g \in G, gx = x\right\}$ des *vecteurs* G-*invariants*.
2. **Exemple.** Déterminer p_G dans le cas où G est l'ensemble des matrices de permutation.

Exercice 95. *Un exercice vicieux autour de la formule de projection.* *Mines*

Soit $G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$ un groupe fini. Montrer que $\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g)$ est un multiple entier de $|G|$.

Exercice 96. *Un autre exercice vicieux autour de la formule de projection.* *X*

Soit $G \subseteq GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe fini tel que $\sum_{g \in G} \mathrm{tr}(g) = 0$. Montrer que $\sum_{g \in G} g = 0$.

Exercice 97. *Isométries de ℓ^p.*

Si E est un espace vectoriel normé, le *groupe de ses isométries* est le sous-groupe

$$\mathrm{Isom}(E) = \left\{\varphi \in GL(E) \,\middle|\, \forall x \in E, \|\varphi(x)\| = \|x\|\right\} \subseteq GL(E).$$

Pour $p \in [1, +\infty]$, on notera en particulier G_p le groupe des isométries de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$.

On identifiera $GL(\mathbb{R}^n)$ et $GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que l'ensemble $\mathscr{H}_n$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et possédant un unique coefficient non nul sur chaque ligne et chaque colonne est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$, appelé *groupe hyperoctaédral*, ou *groupe des permutations signées*. Déterminer son cardinal.
2. Soit $p, q \in [1, +\infty]$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
   (a) Montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$, on a $A \in G_p$ si et seulement si $A^T \in G_q$.
   (b) En déduire que les groupes G_p et G_q sont isomorphes.
3. On suppose $p \neq 2$. Montrer que $G_p = \mathscr{H}_n$.

⋆ **Exercice 98.** *Lemme d'Artin.*

Dans tout l'exercice, L est un corps, G est un sous-groupe à n éléments du groupe Aut(L) des automorphismes de corps de L, et on note $K = L^G = \left\{x \in L \,\middle|\, \forall \sigma \in G, \sigma(x) = x\right\}$.

1. Vérifier que K est un sous-corps de L, et que L est naturellement muni d'une structure de K-espace vectoriel.
2. Soit $V \subseteq L^d$ un sous-L-espace vectoriel G-*invariant*, c'est-à-dire que $\forall \sigma \in G, \forall v \in V, \sigma(v) \in V$.
   (On fait ici agir σ sur les éléments de L^d en appliquant l'automorphisme σ coordonnée par coordonnée.)
   Montrer que si $V \neq \{0\}$, alors $V \cap K^d \neq \{0\}$.
3. Soit $x_0, \dots, x_n \in L$. En considérant

$$V = \left\{(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in L^{n+1} \,\middle|\, \forall \sigma \in G, \lambda_0 \sigma(x_0) + \cdots + \lambda_n \sigma(x_n) = 0\right\},$$

   montrer que la famille $(x_0, \dots, x_n)$ est liée sur K.
4. Qu'a-t-on montré sur $\dim_K(L)$?

⋆ **Exercice 99.** *Bases échelonnées réduites et sous-espaces vectoriels* K*-rationnels.*

Soit L un corps. On note $(e_i)_{i=1}^n$ la base canonique de L^n et $(F_i)_{i=0}^n = \big(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)\big)_{i=0}^n$ le *drapeau canonique*. Une famille $(v_1,\dots,v_r)$ de vecteurs de L^n est dite *échelonnée réduite* si et seulement s'il existe des indices $1 \leq k_1 < \cdots < k_r \leq n$ tels que, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $v_i \in F_{k_i}$, la k_i-ème coordonnée de v_i vaut 1, et celle de tous les autres vecteurs est nulle.

1. Montrer que toute famille échelonnée réduite est libre.
2. Montrer que tout sous-espace vectoriel $V \subseteq L^n$ possède une unique base échelonnée réduite.
3. **Application.** Soit G un sous-groupe du groupe Aut(L) des automorphismes de corps de L et notons $K = L^G = \{x \in L \mid \forall \sigma \in G, \sigma(x) = x\}$.
   Étant donné $\sigma \in G$, on note également σ l'application $L^n \to L^n$ consistant à appliquer σ coordonnée par coordonnée.
   (a) Montrer que K est un sous-corps de L.
   (b) Soit V un sous-L-espace vectoriel G-*invariant* de L^n, c'est-à-dire tel que $\forall \sigma \in G, \sigma[V] \subseteq V$. Montrer que $V_K := V \cap K^n$ est un sous-K-espace vectoriel de K^n et que $\dim_K V_K = \dim_L V$.

Exercice 100. *Représentations matricielles des corps de nombres.*

1. Soit K un corps, et V un sous-espace vectoriel de $M_n(K)$ tel que $V \setminus \{0\} \subseteq GL_n(K)$. Montrer que $\dim V \leq n$.
2. Soit F un sous-corps de $\mathbb{C}$. On suppose F de dimension finie n en tant que $\mathbb{Q}$-espace vectoriel. Montrer qu'il existe un morphisme injectif de $\mathbb{Q}$-algèbres $F \to M_n(\mathbb{Q})$.
3. Soit $n \geq 2$. On admet que $X^n - 2 \in \mathbb{Q}[X]$ est irréductible. Construire une extension de degré n de $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire une $\mathbb{Q}$-algèbre de dimension n qui est un corps.

Somme de plusieurs sous-espaces

Exercice 101. *Dimension d'une somme de sous-espaces vectoriels.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $F_1,\dots,F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

Montrer que les F_i, $i \in [\![1,p]\!]$ sont en somme directe si et seulement si $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) = \sum_{i=1}^p \dim F_i$.

Exercice 102. *Somme redondante.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(F_i)_{i=1}^{n+1}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'il existe $J \subsetneq [\![1,n+1]\!]$ tel que $\sum_{j\in J} F_j = \sum_{i=1}^{n+1} F_i$.

Exercice 103. *Deux décompositions compatibles en somme directe.*

Soit $(F_i)_{i=1}^n$ et $(G_i)_{i=1}^n$ deux familles de sous-espaces vectoriels d'un même espace vectoriel E, telles que $\forall i \in [\![1,n]\!], F_i \subseteq G_i$ et $\bigoplus_{i=1}^n F_i = \bigoplus_{i=1}^n G_i$. Montrer que $\forall i \in [\![1,n]\!], F_i = G_i$.

Exercice 104. *Décompositions compatibles.*

Soit F, G, F', G' quatre sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.

On suppose $E = F \oplus G = F' \oplus G'$ et $F' \subseteq G$. Montrer $E = F \oplus F' \oplus (G \cap G')$.

Exercice 105. *Une décomposition en somme directe.*

Soit $a_0, \dots, a_n \in \mathrm{K}$ distincts et, pour tout $j \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{F}_j = \left\{ \mathrm{P} \in \mathrm{K}_n[\mathrm{X}] \,\middle|\, \forall i \in [\![0,n]\!] \setminus \{j\}, \mathrm{P}(a_i) = 0 \right\}$.

Montrer que $\mathrm{K}_n[\mathrm{X}] = \bigoplus_{j=0}^{n} \mathrm{F}_j$.

$\Delta\star$ **Exercice 106.** *Somme de projecteurs.* *X (PC)*

Soit p et q des projecteurs de E tels que $pq = 0$.

Montrer que $p + q - qp$ est un projecteur, dont on déterminera l'image et le noyau.

Δ **Exercice 107.** *Théorème de Cochran.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et des endomorphismes $f_1, f_2, \dots, f_r \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que l'on ait $\sum_{i=1}^{r} f_i = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ et $\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}\, f_i \leq n$. Montrer que les éléments de la famille $(f_i)_{i=1}^r$ sont des projecteurs.

Matrices par blocs

Exercice 108. *Factorisation LU.*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe $\mathrm{L} \in \mathrm{T}_n^-(\mathrm{K})$ et $\mathrm{U} \in \mathrm{T}_n^+(\mathrm{K})$ telles que $\mathrm{A} = \mathrm{LU}$.

(ii) Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la sous-matrice A_k obtenue en ne gardant de A que les k premières lignes et colonnes est inversible.

Exercice 109. *Calcul de rang par opérations.*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Déterminer le rang de $\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{I}_n \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathrm{K})$.

Exercice 110. *Calcul de rang par opérations,* bis. *Mines (PSI)*

Soit $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{A} \\ \mathrm{A} & \mathrm{B} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{2n}(\mathrm{K})$.

1. Déterminer le rang de M.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que M soit inversible et, le cas échéant, une expression de son inverse.

Exercice 111. *Rang par blocs.*

Soit A, B et C trois matrices de tailles compatibles. Montrer $\mathrm{rg} \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & 0 \end{pmatrix} \geq \mathrm{rg}\,\mathrm{B} + \mathrm{rg}\,\mathrm{C}$.

Exercice 112. *Inégalité de Frobenius par les matrices-blocs.*

Soit A, B, C trois matrices telles que le produit ABC ait un sens.

1. Montrer que le rang de la matrice $\begin{pmatrix} \mathrm{B} & \mathrm{BC} \\ \mathrm{AB} & 0 \end{pmatrix}$ est $\mathrm{rg}\,\mathrm{B} + \mathrm{rg}\,\mathrm{ABC}$.
2. En déduire $\mathrm{rg}\,\mathrm{AB} + \mathrm{rg}\,\mathrm{BC} \leq \mathrm{rg}\,\mathrm{B} + \mathrm{rg}\,\mathrm{ABC}$.

Exercice 113. *Une matrice d'incidence.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N = 2^n$. On note $S_1, \dots, S_N$ toutes les parties de $[\![1, n]\!]$, listées dans un certain ordre.
Déterminer le rang de $\left(\mathbb{1}_{(S_i \cap S_j \neq \emptyset)}\right)_{1 \leq i,j \leq N}$?

⋆ **Exercice 114.** *Comparaison de deux rangs.*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ tels que $B^2 = B$. Montrer $\operatorname{rg}(AB - BA) \leq \operatorname{rg}(AB + BA)$.

⋆ **Exercice 115.** *Rang minimal d'une matrice partielle.*

Soit $A \in M_{p,r}(K)$, $B \in M_{p,s}(K)$ et $C \in M_{q,r}(K)$ trois matrices. Déterminer

$$\min\left\{\operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & Z \end{array}\right) \middle| Z \in M_{q,s}(K)\right\}.$$

⋆ **Exercice 116.** *Manipulation de blocs.*

Soit $A \in M_{n,p}(K)$ et $B \in M_{p,n}(K)$.

1. Montrer que les deux matrices $\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. En déduire $p + \operatorname{rg}(AB + I_n) = n + \operatorname{rg}(BA + I_p)$.

Exercice 117. *Théorèmes de Schur et Dieudonné sur $\mathbb{R}$.*

1. Soit $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{p+r}(\mathbb{R})$.
   On suppose $A_{1,1} \in GL_r(\mathbb{R})$. Montrer $\operatorname{rg}(A) = r \Leftrightarrow A_{2,2} = A_{2,1}A_{1,1}^{-1}A_{1,2}$.
2. Soit S un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de rang maximal 1. Montrer que $\dim S \leq n$.
3. Soit W un sous-espace vectoriel de $M_{p,r}(\mathbb{R}) \times M_{r,p}(\mathbb{R})$ tel que $\forall (A, B) \in W, AB = 0$.
   Montrer que $\dim W \leq pr$.
4. Soit S un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{R})$ de rang maximal r. Montrer que $\dim S \leq nr$.

Applications de rang un, introduction à la dualité

Étant donné deux espaces vectoriels E, F sur le corps K, une forme linéaire $\alpha : E \to K$ et un vecteur $v \in F$, on notera $v \otimes \alpha : w \mapsto (v \otimes \alpha)(w) = \alpha(w)\, v$. C'est une application linéaire de rang ≤ 1.

♠ **Exercice 118.** *Matrices de rang un.*

Montrer que l'ensemble des matrices de rang 1 est $\left\{x y^T \middle| x, y \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}\right\}$.

Exercice 119. *Rang tensoriel.*

1. Déterminer l'ensemble $T_r = \left\{\sum_{j=1}^{r} X_j Y_j^T \middle| (X_1, \dots, X_r), (Y_1, \dots, Y_r) \in (\mathbb{R}^n)^r\right\}$.
2. Soit $X_1, \dots, X_r, Y_1, \dots, Y_r \in \mathbb{R}^n$ et $M = \sum_{j=1}^{r} X_j Y_j^T$.
   Montrer que $\operatorname{rg}(M) = r$ si et seulement si les deux familles $(X_1, \dots, X_r)$ et $(Y_1, \dots, Y_r)$ sont libres.

Exercice 120. *Formulaire sur les endomorphismes de rang* 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $v, w \in \mathrm{E}$, $\alpha, \beta \in \mathrm{E}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Montrer les formules suivantes

(i) $f \circ (v \otimes \alpha) = f(v) \otimes \alpha$.
(ii) $(v \otimes \alpha) \circ f = v \otimes f^{\mathrm{T}}(\alpha)$.
(iii) $(v \otimes \alpha) \circ (w \otimes \beta) = \alpha(w)\,(v \otimes \beta)$.
(iv) $\mathrm{tr}(v \otimes \alpha) = \alpha(v)$.

♠ **Exercice 121.** *Réduction des matrices de rang un.*

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ de rang 1, et $v \in \mathrm{K}^n$ tel que $\operatorname{im} \mathrm{M} = \mathrm{Vect}(v)$.

1. Montrer que si $\mathrm{M}v \neq 0_{\mathrm{K}^n}$, alors M est semblable à $\lambda\,\mathrm{E}_{1,1}$, pour un certain $\lambda \in \mathrm{K}$.
2. Montrer que si $\mathrm{M}v = 0_{\mathrm{K}^n}$, alors M est semblable à $\mathrm{E}_{2,1}$.
3. En déduire que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{tr}(\mathrm{M})\,\mathrm{M}$.

Exercice 122. *Espaces stables d'un endomorphisme de rang* 1.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme de rang 1.
Montrer qu'un sous-espace vectoriel $\mathrm{F} \subseteq \mathrm{E}$ est stable sous u si et seulement si $\mathrm{F} \subseteq \ker u$ ou $\operatorname{im} u \subseteq \mathrm{F}$.

Exercice 123. *Inversion de Sherman-Morrison.*

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{H} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ de rang 1.
Montrer que $\mathrm{A} + \mathrm{H}$ est inversible si et seulement si $\mathrm{tr}\big(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{H}\big) \neq -1$, et déterminer alors $(\mathrm{A} + \mathrm{H})^{-1}$.

Exercice 124. *Une énième caractérisation des homothéties.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Trouver tous les endomorphismes $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\forall g \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), g$ nilpotent $\Rightarrow f \circ g$ nilpotent.

Exercice 125. *Égalité de rangs.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Déterminer les endomorphismes $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tels que $\forall v \in \mathscr{L}(\mathrm{E}), \mathrm{rg}(uv) = \mathrm{rg}(vu)$.

Exercice 126. *Application linéaire envoyant les nilpotentes dans les antisymétriques.* *X (PC)*

1. Soit f un endomorphisme de $\mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ tel que, quel que soit $\mathrm{N} \in \mathrm{M}_2(\mathrm{K})$ nilpotente, on ait $f(\mathrm{N}) + f(\mathrm{N})^{\mathrm{T}} = 0$. Montrer $\mathrm{rg}\, f \leq 2$.
2. Généraliser à $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

♠ **Exercice 127.** *Le résultat oublié par le programme officiel.*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $(f_1, \dots, f_r)$ une famille libre de $\mathrm{V}^* = \mathscr{L}(\mathrm{V}, \mathrm{K})$. Montrer que $\mathrm{F} : \begin{cases} \mathrm{V} \to & \mathrm{K}^r \\ x \mapsto & \big(f_1(x), \dots, f_r(x)\big) \end{cases}$ est surjective.
2. Soit $\mathscr{B}^* = (f_1, \dots, f_n)$ une base de V^*.
   (a) Montrer que $\varphi : \begin{cases} \mathrm{V} \to & \mathrm{K}^n \\ x \mapsto & \big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big) \end{cases}$ est un isomorphisme.
   (b) En déduire qu'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V telle que $\forall i, j \in [\![1, n]\!], f_i(e_j) = \mathbb{1}_{i=j}$.
   La base $\mathscr{B}$ est la *base antéduale* de $\mathscr{B}^*$.

Exercice 128. *Dualité.*

Soit V un espace vectoriel de dimension finie et $f_1, \dots, f_n \in \mathscr{L}(\mathrm{V}, \mathrm{K})$. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{V}, \mathrm{K})$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{V}, f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_n(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

Montrer que f est combinaison linéaire des $f_1, \dots, f_n$.

Exercice 129. *Base modulo un sous-espace donné par des équations.*

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ une famille libre de formes linéaires sur E.

1. Montrer que $\mathrm{F} = \bigcap_{i=1}^{k} \ker \alpha_i$ est un sous-espace vectoriel de codimension k.
2. Soit $x_1, \dots, x_k \in \mathrm{E}$.
   Montrer que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ si et seulement si la matrice $\big(\alpha_i(x_j)\big)_{1 \leq i,j \leq k}$ est inversible.

Exercice 130. *Bases de* $\mathrm{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Soit E et F deux espaces vectoriels, $(v_1, \dots, v_n)$ une base de E et $(w_1, \dots, w_p)$ une base de F.

Montrer que $\big(w_i \otimes v_j^*\big)_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ est une base de $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

Exercice 131. *Hyperplans de* $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

Soit $n \geq 2$.

1. Soit H un hyperplan de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. Montrer que H possède une base formée de matrices de rang 1.
2. Donner un exemple de sous-espace vectoriel de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ de dimension $n^2 - 2$ qui ne possède pas de telle base.

⋆⋆ **Exercice 132.** *Bases duales de* $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. *X*

Soit $(\mathrm{M}_1, \dots, \mathrm{M}_{n^2})$ une base de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$.

1. Montrer qu'il existe une base $(\mathrm{M}'_1, \dots, \mathrm{M}'_{n^2})$ de $\mathrm{M}_n(\mathrm{K})$ telle que $\forall k, \ell \in [\![1, n^2]\!], \mathrm{tr}(\mathrm{M}_k \mathrm{M}'_\ell) = \delta_{k,\ell}$.
2. Montrer $\forall \mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K}), \sum_{k=1}^{n^2} \mathrm{M}_k \mathrm{A} \mathrm{M}'_k = \mathrm{tr}(\mathrm{A})\, \mathrm{I}_n$.

Indications

Exercice 1. L'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathscr{F}') \subseteq \mathrm{Vect}(\mathscr{F})$ et l'implication $\mathscr{F}$ libre $\Rightarrow$ $\mathscr{F}'$ libre s'écrivent toutes seules. Par ailleurs, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ jouent en fait des rôles symétriques.

Exercice 2.

1. Rédaction automatique.
2. Il suffit de savoir exprimer x_i comme combinaison linéaire des $(y_j)_j$.
3. Les deux réciproques sont vraies : pour la liberté, on utilisera l'expression de x_i obtenue à la question précédente et on suivra le même raisonnement qu'à la première question.

Exercice 3. C'est à chaque fois un argument d'échelonnement :

- pour les multiplicités dans la première question ;
- pour le comportement asymptotique en $+\infty$ dans la deuxième ;
- pour le « minimum du support » $\inf\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ dans la dernière.

Exercice 4. On peut par exemple dériver et utiliser l'unicité dans la décomposition en éléments simples.

Exercice 5. L'exercice est plus facile qu'il y paraît : revenir à la définition de la liberté et utiliser l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.

Exercice 6. Rédaction automatique. On remarquera notamment que si $(\lambda_{i,j})_{i,j}$ est une famille presque nulle d'éléments de K, l'écriture $\sum_{i,j} \lambda_{i,j} x_i y_j$ peut à la fois être vue comme une combinaison K-linéaire des $x_i y_j$ et comme une combinaison L-linéaire des y_j.

Exercice 7. Rédaction automatique (psychologiquement, la contraposée est peut-être plus facile).

Exercice 8. Si P est un polynôme réel et Q est un polynôme réel sans racine, à quelle condition existe-t-il une combinaison linéaire $P + \lambda Q$ sans racine réelle ?

Exercice 9.

1. Par récurrence sur n.
2. On peut partir d'une base quelconque puis utiliser des transvections.

Exercice 10. Il suffit de montrer que dans un sous-espace vectoriel E de K[X] de dimension infinie, on peut trouver des polynômes P de valuation arbitrairement grande.

Exercice 11. C'est du cours, non ? Rédaction automatique.

Exercice 12. Comme $E = \ker p \oplus \operatorname{im} p$, il suffit de vérifier que $u \circ p$ et $p \circ u$ coïncident sur ces deux facteurs directs.

Exercice 13. La condition sur les images permet de simplifier les composées $p \circ q$ et $q \circ p$.

Exercice 14.

1. Il suffit de remarquer que si deux endomorphismes u et v « anticommutent », alors u^2 et v commutent.
2. On se souviendra que si p est un projecteur, il en va de même de $p' = \mathrm{id}_E - p$. Cela permet d'appliquer astucieusement la question précédente.

Exercice 15. On pourra commencer par montrer que $\ker(p + \mathrm{id}_E)$ est l'espace nul.

Exercice 16. On n'utilise à vrai dire les symétries que pour dire que uv et vu sont deux automorphismes inverses l'un de l'autre. Une fois cela compris, il s'agit surtout de montrer que si $t \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$, alors $\ker(t^2-\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \ker(t-\mathrm{id}_\mathrm{E}) \oplus \ker(t+\mathrm{id}_\mathrm{E})$ et $\mathrm{im}(t^2-\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{im}(t-\mathrm{id}_\mathrm{E}) \cap \mathrm{im}(t+\mathrm{id}_\mathrm{E})$.

Exercice 17. La formule $\dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2-x^3+\cdots$ n'a en général pas de sens dans une algèbre quelconque. Mais ici, le caractère nilpotent de u suggère une formule pour $(\mathrm{id}_\mathrm{E}+u)^{-1}$, que l'on peut vérifier à la main.

Exercice 18. Il est possible de tuer l'exercice en remarquant que $-f$ est un projecteur, mais on va faire semblant de n'avoir rien vu.

1. Rédaction automatique.
2. La question précédente est utile pour montrer que les deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe. L'existence d'une décomposition est essentiellement tautologique, car $\mathrm{id}_\mathrm{E} = (f+\mathrm{id}_\mathrm{E}) - f$.

Exercice 19. Rédaction automatique.

Exercice 20. L'égalité $\mathrm{im}(f+g) = \mathrm{im}\, f + \mathrm{im}\, g$ apporte en fait l'information $\mathrm{im}\, f \subseteq \mathrm{im}(f+g)$ (et sa symétrique, et rien d'autre), ce qui donne une façon directe d'utiliser cette hypothèse.

Exercice 21. On s'intéressera à un supplémentaire S de $\ker u$, stable sous u.

Exercice 22.

1. Si g_1 et g_2 sont deux pseudo-inverses de f, on pourra commencer par montrer $f \circ g_1 = f \circ g_2$.
2. Dans le sens direct, si f est pseudo-inversible, de pseudo-inverse g, on pourra vérifier que $g \circ f$ est un projecteur et déterminer son image et son noyau.
   Dans le sens réciproque, on pourra utiliser la propriété universelle de la somme directe pour définir g séparément sur $\ker f$ et $\mathrm{im}\, f$, après avoir remarqué que f induisait un automorphisme de $\mathrm{im}\, f$.

Exercice 23.

1. Rédaction automatique.
2. Le théorème du rang entraîne que ces conditions sont bel et bien équivalentes en dimension finie. Il va donc falloir aller piocher du côté des contre-exemples classiques d'endomorphismes en dimension infinie, comme $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ et $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}$.

Exercice 24. En considérant les suites $e_\ell = (\mathbb{1}_{n=\ell})_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite injective, on pourra commencer par montrer qu'il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(e_k) = 1$.

On en déduira alors la valeur de φ sur les suites injectives. Comme elles ne forment pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathbb{N}$, le raisonnement ne peut pas s'arrêter là.

Exercice 25. La condition de commutation fait que u stabilise $\ker v$ et induit sur ce sous-espace vectoriel un endomorphisme $\overline{u}$.

Le cas $j = 1$ correspond alors à une remarque très simple au sujet de $\overline{u}$, et il n'est pas difficile d'en déduire le résultat général.

Exercice 26.

1. On introduit un terme « mixte » pour pouvoir continuer à jouer à saute-moutons : en notant la composition comme une multiplication,

$$f^2g - gf^2 = f^2g - fgf + fgf - gf^2 = f(fg-gf) + (fg-gf)f = 2f$$

et, de même,
$$\begin{aligned} f^{n+1}g - gf^{n+1} = f^{n+1}g - f^ngf + f^ngf - gf^{n+1} &= f^n(fg-gf) + (f^ng - gf^n)f \\ &= f^n + (f^ng - gf^n)f, \end{aligned}$$

ce qui permet de répondre à la question, par récurrence.

2. Si, par l'absurde, $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ était liée, l'élément f de l'algèbre $\mathscr{L}(\mathrm{E})$ posséderait un polynôme minimal non nul Π_f. Mais la relation de la question précédente donne une formule simple pour $\mathrm{P}(f)\circ g - g\circ\mathrm{P}(f)$, quel que soit le polynôme P, que l'on peut exploiter ici.

Exercice 27.

1. En utilisant la décomposition d'un polynôme en parties « paires » et « impaires », on arrive à écrire φ comme la somme de deux endomorphismes $a, b \in \mathscr{L}(\mathbb{R}[\mathrm{X}])$ tels que $a^2 = b^2 = 0$.
   En particulier, on peut s'assurer que $\mathrm{id}_\mathrm{E} \pm a$ et $\mathrm{id}_\mathrm{E} \pm b$ sont des automorphismes.
2. On peut déterminer tous les endomorphismes commutant avec φ et constater que bien peu d'entre eux sont des automorphismes.

Exercice 28. *Abstract nonsense* : si vous arrivez à définir une application intelligente entre l'un des espaces vectoriels et l'autre, ce qui reste à faire est probablement facile.

Pour les deux questions, il est probablement plus facile de définir les applications dans le sens suggéré par l'énoncé.

Exercice 29. Le contre-exemple « officiel » de trois droites dans le plan suffit à montrer que la formule « du crible » est fausse en général.

Le point-clef est qu'il est possible de trouver une base adaptée à deux sous-espaces vectoriels, mais pas à trois (pour une certaine définition de « adaptée »).

Exercice 30. Commencer par faire des diagrammes !

1. On pourra fixer un supplémentaire S de $\ker f_2$ dans E_2 : l'application linéaire f_2 induit donc un isomorphisme $\varphi : \mathrm{S} \to \operatorname{im} f_2$.
   En supposant $\operatorname{im} f_1 \subseteq \operatorname{im} f_2$, on peut alors définir une application $u : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{S} \subseteq \mathrm{E}_2$.
2. On pourra fixer un supplémentaire S de $\ker f_1$ dans E : l'application linéaire f_1 induit donc un isomorphisme $\varphi : \mathrm{S} \to \operatorname{im} f_1$. En fixant également un supplémentaire T de $\operatorname{im} f_1$ dans F_1, on pourra utiliser la propriété universelle des sommes directes pour définir séparément v sur $\operatorname{im} f_1$ (en utilisant l'isomorphisme φ) et sur T.

Exercice 31. On pourra construire a et b à l'aide d'une base de E (c'est le plus simple), ou appliquer le lemme de factorisation (ce qui a l'avantage de montrer que le résultat reste vrai en dimension infinie).

Exercice 32. On montre facilement que $2\dim \mathrm{F} \leq \dim \mathrm{E}$ est une condition nécessaire. À l'aide de bases bien choisies, on peut montrer qu'il s'agit également d'une condition suffisante.

Exercice 33. Il est peut-être plus simple de traiter le cas général : étant donné un espace vectoriel de dimension finie V et une symétrie $s \in \mathscr{L}(\mathrm{V})$, quelle est la dimension de $\left\{u \in \mathscr{L}(\mathrm{V}) \,\middle|\, u\circ s = s\circ u\right\}$?

Dans notre cas, on pourra construire un isomorphisme entre l'espace de l'exercice et $\mathscr{L}(\mathrm{S}_n(\mathbb{R})) \times \mathscr{L}(\mathrm{A}_n(\mathbb{R}))$.

Exercice 34.

2. On peut raisonner dans une base de E adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$ ou montrer l'existence d'un isomorphisme (d'algèbres, mais on s'en moque) $\mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathrm{F}_1) \times \mathscr{L}(\mathrm{F}_2)$.
3. La solution la plus « algébrique » serait d'étudier l'image et le noyau de l'application linéaire naturelle $\varphi : \mathscr{A} \to \mathscr{L}(\mathrm{F}_1) \times \mathscr{L}(\mathrm{F}_2)$ (qui est en fait même un morphisme d'algèbres). Bien qu'elle ne soit *a priori* ni injective (si on connaît $\varphi(u)$, on ne connaît u que sur $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$) ni surjective (l'intersection $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ impose des contraintes sur $\varphi(u)$), on peut déterminer les dimensions de $\ker\varphi$ et $\operatorname{im}\varphi$, ce qui permet de conclure.
   Il est cependant plus simple de raisonner avec des bases : étant donné deux sous-espaces vectoriels F_1

et F_2 de E, il existe des bases « adaptées » à la situation.
La formule finale pour la dimension n'est guère éclairante.

Exercice 35. On pourra penser à introduire une application linéaire adaptée (par exemple, une application linéaire dont la non-injectivité fournirait un triplet (λ, μ, ν) tel que celui demandé par l'énoncé).

Exercice 36. Une démonstration très rapide passe par la considération d'une certaine application linéaire

$$\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n) \to \mathrm{Vect}(f_1', \dots, f_n').$$

Exercice 37.

1. On peut trouver une forme linéaire $E \to \mathbb{R}$ dont le noyau est constitué de fonctions constantes.
2. Si $(f_1, \dots, f_n)$ est une famille de fonctions, que peut-on dire du rang de la famille des restrictions $\mathscr{F}_r = \left((f_1)_{|[-r,r]}, \dots, (f_n)_{|[-r,r]}\right)$ en fonction de r?

Exercice 38. On pourra montrer que $\ker(f) \oplus \ker(f - \mathrm{id}_E) \subseteq E$, avec égalité si et seulement si f est un projecteur.

Exercice 39. Notons $n = \dim E$ et $r = \mathrm{rg}\, u$. Des constructions explicites fournissent facilement les inégalités $\mathrm{rg}\, L_u \geq nr$ et $\dim \ker L_u \geq n(n-r)$, ce qui conclut.

Exercice 40.

1. On commencera par montrer la *sous-additivité du rang* à laquelle le titre fait allusion : $\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$.
2. Au-delà de la condition de dimension de la question précédente, on peut montrer que l'existence de v force l'égalité $E = \ker u + \mathrm{im}\, u$.
   Réciproquement, si $E = \ker u + \mathrm{im}\, u$, on peut raisonner matriciellement dans une base adaptée.

Exercice 41. (Le fait que les applications soient des endomorphismes ne sert qu'à simplifier les notations.) On pourra montrer l'inégalité sous la forme $\mathrm{rg}(vw) - \mathrm{rg}(uvw) \leq \mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(uv)$ en remarquant qu'étant donné deux endomorphismes, $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(fg)$ est la dimension du noyau de la restriction $f_{|\mathrm{im}\, g}$.

Exercice 42.

1. Les solutions les plus efficaces utilisent l'écriture de V comme intersection de $\dim F - \dim V$ hyperplans. Il est également possible (mais plus pénible) d'appliquer le théorème du rang et la formule de Grassmann.
2. On appliquera la question précédente à une application linéaire f induite par u.

Exercice 43. Le cours de sup permet de construire une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p)$ soit particulièrement simple.

Exercice 44. La condition entraîne que les p_k sont des projecteurs dont les images sont emboîtées.

Il serait alors facile de construire par récurrence une base $(e_j)_{j=1}^n$ de E telle que $\forall k \in [\![0, n]\!], \mathrm{im}\, p_k = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ mais celle-ci ne convient pas immédiatement : il faut imposer une condition supplémentaire au vecteur e_{k+1}.

Exercice 45. La formule trace-rang montre déjà $\mathrm{rg}\, A = \mathrm{tr}\, A = \mathrm{tr}\, A^2$. Reste à utiliser la condition de symétrie et l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 46. Le problème est invariant par équivalence de matrices...

Exercice 47. Le problème est au moins invariant par équivalence simultanée (c'est-à-dire si l'on remplace A et B par PAQ et PBQ, pour $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$). À vrai dire, il est encore plus invariant que cela.

Exercice 48.

1. On pourra raisonner par récurrence descendante sur le rang de A, qui est la taille maximale d'une sous-matrice inversible : la rédaction est plus simple si le « bloc nord-est » de A est une telle sous-matrice, mais les phénomènes restent fondamentalement les mêmes.
2. Quels que soient $A \in GL_{r-1}(K)$, $B \in M_{r-1,n-r+1}(K)$ et $C \in M_{n-r+1,r-1}(K)$, il est possible de choisir le bloc marqué d'un point d'interrogation pour que la matrice $\begin{pmatrix} A & B \\ C & ? \end{pmatrix}$ soit de rang $r-1$.

Exercice 49. Dans les deux cas, on développera abstraitement (et sans binôme de Newton) la puissance $(A+B)^k$ et on raisonnera en fonction des mots apparaissant, à l'aide de la cyclicité de la trace $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$.

Exercice 50. On peut par exemple utiliser des matrices triangulaires (mais il y a plein de façons de faire).

Exercice 51. On pourra essayer de modifier la base canonique afin de remplacer les $E_{i,j}$ par des matrices inversibles.

Exercice 52. On montrera $\ker A = \{0\}$.

Exercice 53. On pourra se ramener au cas $\lambda = 0$ et raisonner en termes d'endomorphismes.

Exercice 54.

1. C'est l'exercice précédent (dans le cas $\lambda = 0$), plus une petite récurrence.
2. On pourra montrer que $[DM - MD]_{i,j} = (i-j)[M]_{i,j}$.
3. Seule l'inclusion directe n'est pas triviale, mais c'est une conséquence assez directe des deux questions précédentes.

Exercice 55.

1. C'est l'argument crucial avec la série géométrique : $I_n + N$ est inversible.
2. On peut facilement exprimer une matrice inversible bien choisie comme somme de deux matrices nilpotentes, ce qui règle un cas. Pour l'autre, si N est une matrice nilpotente n'appartenant pas à H, on pourra s'intéresser à l'intersection $H \cap \mathrm{Vect}(I_n, N)$.

Exercice 56. Si $E = S + \operatorname{im} u$, alors $E = S + u[S + \operatorname{im} u] = \cdots$.

Exercice 57. Opérations par blocs.

Exercice 58.

1. C est une matrice de permutation, et spécifiquement d'un n-cycle.
2. On résout explicitement l'équation. Les vecteurs dirigeant les différentes droites forment une famille libre, et donc une base.
3. On écrira la grande matrice comme un polynôme en C.

Exercice 59. On peut obtenir une relation de récurrence à l'aide d'opérations sur les lignes et les colonnes.

Exercice 60. On pourra exprimer $[A]_{i,j}$ comme une somme mettant en jeu des indicatrices telles que $\mathbb{1}_{(k|i)}$.

Exercice 61. Par transvections successives, on peut remplacer chaque P_i par son terme dominant, et ainsi presque obtenir un déterminant de Vandermonde.

Exercice 62. Par transvections successives, on peut remplacer chaque P_i par son terme dominant, et ainsi presque obtenir un déterminant de Vandermonde.

Il reste à remarquer que $n \mapsto \binom{n}{k}$ est polynomiale, de degré k.

Exercice 63. Le déterminant à calculer ressemble à un mineur. Il s'agit donc de le « compléter » en un déterminant $(n+1)\times(n+1)$ dans lequel on pourra *identifier* le mineur correspondant à la k-ième colonne (et une certaine ligne).

Exercice 64.

- Pour la deuxième question, il n'est pas nécessaire d'utiliser le processus d'orthonormalisation.
- Pour la quatrième question, on pourra montrer $\forall M \in M_n(\mathbb{R}), \ker\left(M^T M\right) = \ker(M)$.

Exercice 65.

1. Identité de polarisation.
2. Calculer dét(2G) modulo 8.

Exercice 66. Deux idées possibles :

- utiliser la positivité des déterminants de Gram vue dans un exercice précédent ;
- voir E comme un hyperplan de vecteur normal unitaire e_0 dans un espace euclidien $\hat{E}$ (comment est-ce possible ?) et considérer la famille orthogonale $(e_0 + x_1, \dots, e_0 + x_p)$.

Exercice 67. Dans la base canonique, l'endomorphisme f a une matrice d'une forme très particulière.

Exercice 68. Écrire la matrice de la dérivation dans une base pertinente.

Exercice 69. Examiner la fonction polynomiale $t \mapsto \text{dét}(A + tB)$. Que dire de son degré ?

Exercice 70.

1. Utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant.
2. Le cas $a \neq b$ est facilement fait, grâce à la question précédente. Un argument topologique permet d'en déduire le cas exceptionnel $a = b$.
3. Conséquence du calcul précédent (noter que d'autres démonstrations d'inversibilité sont possibles).
4. Soit $p_1, \dots, p_n$ des points non alignés et $D_1, \dots, D_p$ les droites définies par ces points. Considérer la matrice « d'incidence » points × droites $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par $[A]_{i,j} = \mathbb{1}_{p_i \in D_j}$. Le calcul de AA^T permettra de montrer que A est de rang n et donc que $n \leq p$.

Exercice 71. Un sens se fait par multiplicativité du déterminant, la formule pour l'inverse à partir de la comatrice traite le sens significatif.

Exercice 72. L'application $t \mapsto \text{dét}(A + tB)$ est polynomiale, de degré ≤ 2.

Exercice 73.

2. Vandermonde.
3. L'inversibilité du déterminant de Vandermonde est une reformulation de la rigidité polynomiale. Il s'agit ici de démontrer un théorème du même genre sur les « polynômes exponentiels », par exemple par récurrence sur le nombre de termes.
   La positivité s'ensuit par un (joli) argument de connexité.

Exercice 74. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a (avec des notations parlantes) $B\big(\text{Ré}\, P + t\, \text{Im}\, P\big) = \big(\text{Ré}\, P + t\, \text{Im}\, P\big)A$, et il reste à montrer que pour t bien choisi, la matrice entre parenthèses est inversible.

Exercice 75.

1. On peut prendre $a_i = t^{N_i}$ pour des exposants N_i bien choisis, de telle sorte que le déterminant soit toujours une fonction polynomiale non nulle, les degrés des différents termes étant différents, ce qui empêchera les compensations.
2. On est en train de chercher du foin dans une meule de foin : il est possible de montrer que les n^2-uplets de coefficients qui conviennent forment un ouvert dense.

Exercice 76. L'implication réciproque est évidente. Dans le sens direct, on peut trouver, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, un vecteur $v_i \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $(A + t_i B)v_i = 0$.

On définit alors $V = \mathrm{Vect}(v_0, \dots, v_n)$ et $W = \mathrm{Vect}(Bv_0, \dots, Bv_n)$.

Exercice 77. Le déterminant montre le caractère nécessaire, le caractère suffisant peut se faire par la construction d'un exemple très simple (par exemple en s'appuyant sur le cas $n = 2$).

Exercice 78. Exo bidouillesque à mort. Il faut arriver à $M^3 = I_n$ pour une certaine matrice bien choisie, et en déduire $\det(M) = 1$.

Exercice 79. On pourra essayer d'utiliser le caractère multilinéaire alterné du déterminant.

Exercice 80. Se ramener à l'unicité (à constante multiplicative près) des formes n-linéaires alternées.

Exercice 81. Le titre est assez *spoiler*. On retombe en calculant sur la définition « sans λ » de la convexité, où λ est remplacé par sa valeur $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \in]0, 1[$.

Exercice 82. Seul le sens direct est substantiel. On peut construire par récurrence finie sur k des points tels que la « multi-évaluation » $f \mapsto \big(f(x_1), \dots, f(x_k)\big)$ soit surjective $\mathrm{Vect}(f_1, \dots, f_n) \to \mathbb{R}^k$.

Exercice 83.

1. Oui si $n = 1$... Sinon, cela se saurait, et donnerait des propriétés de stabilité suspectes aux matrices non inversibles.
2. Comme dans la première question, il vaut mieux supposer $n \geq 2$. Des arguments d'homogénéité ramènent la condition à $\forall B \in M_n(\mathbb{R}), \det(A + B) = \det B$, et on arrive facilement à $A = 0$.

Exercice 84. Opérations par blocs.

Exercice 85. On pourra utiliser des opérations élémentaires, en raisonnant « par blocs ».

Exercice 86. Dans l'expression AUA, la matrice U « isole » les deux occurrences de A, au point que le « codomaine » de A et son « domaine » ne sont pas directement en contact. Autrement dit, si on réfléchissait au niveau des applications linéaires canoniquement associées, on pourrait traiter celle de A comme une **application linéaire** entre deux espaces vectoriels (qui se trouvent être de même dimension, mais qu'on peut considérer comme différents) et pas nécessairement comme un **endomorphisme**.

En résumé, il est ici pertinent de raisonner à équivalence près, ce qui permet de se ramener à J_r.

Exercice 87.

1. Cf. l'exercice « lemmes de factorisation ».
2. Pour tout sous-espace vectoriel $F \subseteq E$, on vérifie que $\mathscr{K}_F = \big\{u \in \mathscr{L}(E) \,\big|\, F \subseteq \ker u\big\}$ est un idéal à gauche de $\mathscr{L}(E)$.
   Pour montrer que tous les idéaux à gauche sont de cette forme, l'étape-clef est de construire, à partir de $u_1, u_2 \in I$, un élément $v \in I$ tel que $\ker v = \ker u_1 \cap \ker u_2$. Une base adaptée aux deux noyaux peut aider.

3. Faire confiance à votre sens de la symétrie.
4. Il « suffit » de comparer les deux listes obtenues aux deux questions précédentes.
5. Que dire du noyau de φ ?

Exercice 88.

1. Les conditions entraînent que les $u_{i,i}$ sont des projecteurs et qu'au moins l'un des $u_{i,i}$ n'est pas nul. Mettons qu'il s'agit de $u_{1,1}$ et fixons un vecteur non nul v dans son image.
   On vérifie alors que les $v_i = u_{i,1}v$ sont des vecteurs non nuls, que chaque vecteur v_i dirige $\operatorname{im} u_{i,i}$, qu'ils forment collectivement une base, et que cette base convient.
   Le passage par la trace pour montrer que $n = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rg} u_{i,i}$ peut être utile.
2. Appliquer la question précédente aux endomorphismes canoniquement associés aux $\varphi(\mathrm{E}_{i,j})$.

Exercice 89. On vérifie immédiatement que $\sum_{v\in\mathrm{V}} \operatorname{im} v \subseteq \bigcap_{v\in\mathrm{V}} \ker v$.
Dans une base adaptée à ces deux sous-espaces (qu'est-ce que ça veut dire, exactement ?), la matrice d'un élément de V prend une forme assez restrictive.

Exercice 90.

1. Construire un isomorphisme $\mathscr{A}(p) \to \mathscr{L}(\ker p)$.
2. On pourra s'intéresser à la décomposition de id_E.

Exercice 91. On pourra montrer que tout élément d'une telle sous-algèbre A s'écrit comme une combinaison linéaire de matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}$ appartenant à A.

Exercice 92. Grâce à la notion de fonction indicatrice, on peut assimiler chacune de ces parties à un vecteur $\mathbb{1}_{\mathrm{E}_i} \in \mathbb{Q}^n$.
Il reste à « redescendre » d'une relation $\mathbb{Q}$-linéaire non triviale entre ces vecteurs à une égalité comme celle de l'énoncé. On pourra notamment raisonner sur le signe des coefficients apparaissant dans la relation de liaison.

Exercice 93.

1. Il est possible de raisonner avec le déterminant mais le plus simple est de s'intéresser au produit $\mathrm{X}^\mathrm{T}\mathrm{AX}$, où $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^d$: il peut difficilement être nul.
   (Cette idée a l'air très astucieuse, elle le sera moins quand on étudiera plus en profondeur les espaces euclidiens et les matrices symétriques.)
2. On pourra s'intéresser à la matrice BB^T.

Exercice 94.

1. On montre à la main que $p_\mathrm{G}^2 = p_\mathrm{G}$ et que $\operatorname{im} p_\mathrm{G} = \left\{x \in \mathrm{K}^n \,\middle|\, \forall g \in \mathrm{G}, gx = x\right\}$.
2. On pourra remarquer que la matrice p_G doit vérifier $gp_\mathrm{G} = p_\mathrm{G} = p_\mathrm{G}g$ pour toute matrice $g \in \mathrm{G}$. Dans le cas des matrices de permutation, cela est très contraignant.

Exercice 95. Appliquer la formule rang-trace au projecteur $p_\mathrm{G} = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} g$.

Exercice 96. Appliquer la formule rang-trace au projecteur $p_\mathrm{G} = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{g\in\mathrm{G}} g$.

Exercice 97.

1. Si l'on note Π_n le sous-groupe des matrices de permutations et $\mathrm{T}_n = \left\{\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \,\middle|\, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}\right\}$, on constate facilement que $\mathscr{H}_n = \mathrm{T}_n\Pi_n$: cela ne conclut pas immédiatement, mais aide à rédiger.
2. Par symétrie, il suffit de montrer une implication.
   On pourra notamment montrer que $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}^n, \|\mathrm{X}\|_q = \max\left\{\dfrac{\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y}}{\|\mathrm{Y}\|_p} \,\middle|\, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$, en utilisant l'inégalité de Hölder.
3. L'inclusion réciproque est facile. Dans le sens direct, on pourra utiliser la question précédente pour noter que non seulement les colonnes de $\mathrm{A} \in \mathrm{G}_p$ sont unitaires pour la norme $\|\cdot\|_p$, mais en outre ses lignes sont unitaires pour la norme $\|\cdot\|_q$.
   On en déduit $\displaystyle\sum_{i,j} |[\mathrm{A}]_{i,j}|^p = \sum_{i,j} |[\mathrm{A}]_{i,j}|^q$, ce qui est extrêmement contraignant.

Exercice 98.

2. On pourra considérer un vecteur non nul de V possédant le moins possible de coordonnées non nulles.

Exercice 99.

2. On peut montrer par récurrence sur k que $\mathrm{V} \cap \mathrm{F}_k$ possède une unique base échelonnée réduite.
3. Pour la question (b), vérifier que σ envoie nécessairement une base échelonnée réduite sur une base échelonnée réduite. Cela permet de montrer qu'il existe une L-base de V constituée de vecteurs de K^n, et elle est alors une K-base de V_{K}.

Exercice 100.

1. On cherchera à construire une application linéaire injective $\mathrm{V} \to \mathrm{K}^n$.
2. En fait, tout morphisme de $\mathbb{Q}$-algèbres $\mathrm{F} \to \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ est automatiquement injectif.
3. On pourra chercher une matrice simple $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{Q})$ telle que $\mathrm{A}^n = 2\mathrm{I}_n$.

Exercice 101. On pourra retraduire le fait que les sous-espaces vectoriels sont en somme directe en l'injectivité d'une application linéaire.

Exercice 102. On peut chercher à se ramener à des sous-espaces vectoriels emboîtés.

Exercice 103. Rédaction automatique.

Exercice 104. Rédaction automatique.

Exercice 105. On peut utiliser un argument de dimension pour ne faire que la moitié du travail, ou utiliser une base particulièrement adaptée à la situation.

Exercice 106. Il est facile de montrer que l'endomorphisme est *idempotent* (égal à son carré), mais cela n'aide pas pour la suite de la question.

En revanche, on pourra montrer que $\mathrm{E} = (\ker p \cap \ker q) \oplus \mathrm{im}\, q \oplus \mathrm{im}\, p$.

Exercice 107. On montre assez facilement que $\mathrm{E} = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{r} \mathrm{im}\, f_i$. La vraie difficulté est de se rendre alors compte qu'on a terminé l'exercice, en examinant l'écriture d'un vecteur $x \in \mathrm{E}$ dans cette décomposition en somme directe.

Exercice 108.

- Dans le sens direct, observer que les facteurs L et U sont nécessairement inversibles, puis raisonner par blocs.

- Dans le sens réciproque, raisonner par récurrence, avec des matrices par blocs.

Exercice 109. En deux « opérations », on arrive à une matrice diagonale par blocs.

Exercice 110. Que devient $\begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} \\ M_{2,1} & M_{2,2} \end{pmatrix} \in M_{2n}(K)$ quand on la multiplie à gauche ou à droite par la matrice « élémentaire par blocs » $\begin{pmatrix} I_n & \pm I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$?

Exercice 111. On peut utiliser le critère des mineurs ou « dévisser » l'image de $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ à l'aide de l'application linéaire $\pi_2 : \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \mapsto X_2$.

Exercice 112.

1. On peut passer de $\begin{pmatrix} B & BC \\ AB & 0 \end{pmatrix}$ à $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & -ABC \end{pmatrix}$ en deux opérations.
2. Utiliser un exercice précédent.

Exercice 113. Une fois que l'on a compris que le rang ne dépendait pas de l'ordre dans lequel les S_i sont listées, on peut choisir un ordre intelligent. Par exemple, en choisissant bien l'ordre, on peut exprimer la matrice correspondant à l'entier $n+1$ comme une matrice par blocs dont certains blocs font intervenir la matrice correspondant à l'entier n.

Exercice 114. On pourra commencer par effectuer un changement de base pour se ramener à $B = J_r$.

Exercice 115. Il y a deux types de colonnes dans la partie droite de la matrice : celles pour lesquelles la j-ème colonne de B est combinaison linéaire des colonnes précédentes (de A et de B), et celles pour lesquelles c'est faux.

Dans le deuxième cas, quoi qu'on fasse, le rang augmentera. En revanche, dans le premier cas, on peut soigneusement choisir le bas de la colonne pour ne pas augmenter le rang.

Pour montrer que cette stratégie est optimale, mieux vaut raisonner directement et minorer le rang de la matrice, quelle que soit la façon dont elle est complétée. On peut par exemple « dévisser » l'image $\operatorname{im} M \subseteq K^{p+q}$ à l'aide de la projection $\pi : K^{p+q} \to K^p$ définie par $\pi : \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \mapsto X$: on aura ainsi d'après le théorème du rang $\operatorname{rg} M = \dim \operatorname{im} M = \dim \pi[\operatorname{im} M] + \dim(\operatorname{im} M \cap \ker \pi)$.

Pour information, la formule finale est

$$\min\left\{ \operatorname{rg}\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & Z \end{array}\right) \middle| Z \in M_{q,s}(K) \right\} = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} + \operatorname{rg}\begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix} - \operatorname{rg} A.$$

Exercice 116.

1. Si M_1 et M_2 sont des matrices carrées, dont l'une est inversible, alors M_1M_2 et M_2M_1 sont semblables.
2. On pourra s'intéresser à des matrices de la forme $\begin{pmatrix} U & V \\ 0 & I_p \end{pmatrix}$, dont le rang est facilement déterminable, par exemple à l'aide du théorème du rang.

Exercice 117.

1. On se ramène par opérations à une matrice diagonale par blocs.
2. Par équivalence, on peut se ramener au cas où $J_1 \in S$, ce qui permet d'utiliser facilement la question précédente.

3. Astuce diabolique : $\varphi : \begin{cases} W & \to M_{p,r}(\mathbb{R}) \\ (A,B) & \mapsto A - B^T \end{cases}$ est injective : c'est ici qu'il est utile d'être sur $\mathbb{R}$.
4. On se ramène ici aussi au cas où $J_r \in S$ et on peut « dévisser » le sous-espace vectoriel S à l'aide de l'application linéaire $\pi : \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \mapsto (A_{2,1}, A_{1,2}) : M_n(\mathbb{R}) \to M_{n-r,r}(\mathbb{R}) \times M_{r,n-r}(\mathbb{R})$: la question précédente limite la taille de $\pi[S]$, et le noyau $\ker \pi_{|S}$ ne peut pas non plus être trop gros.

Exercice 118. Dans le sens direct, prendre un vecteur x dirigeant l'image de la matrice. Dans le sens réciproque, examiner le bon coefficient pour s'assurer de la non-nullité de xy^T.

Exercice 119.

1. Par sous-additivité du rang, T_r est inclus dans l'ensemble des matrices de rang $\leq r$. Dans le sens réciproque, l'équivalence à J_r est une façon rapide de rédiger, mais il y en a d'autres.
2. Il est facile de calculer la matrice dans la base canonique de l'application $\mathscr{Y} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$ définie par $\mathscr{Y}(V) = (Y_1^T V, \dots, Y_r^T V)$, et d'en déduire que $\mathscr{Y}$ est surjective.
   Une fois cela fait, on obtient facilement $\operatorname{im} M = \operatorname{Vect}(X_1, \dots, X_r)$.

Exercice 120. Les trois premières identités se vérifient immédiatement en revenant à la définition. La dernière peut se démontrer en passant à la forme matricielle.

Exercice 121.

1. Dans ce cas, on peut vérifier que $K^n = \operatorname{im} M \oplus \ker M$ et se placer dans une base adaptée à cette décomposition en somme directe.
2. Dans ce cas, $\operatorname{im} M \subseteq \ker M$ et on peut se placer dans une base adaptée à ces deux sous-espaces.
3. On vérifie que $\operatorname{tr} M = \lambda$ dans le premier cas et $\operatorname{tr} M = 0$ dans le second, et on calcule.

Exercice 122. Rédaction automatique : que dire d'un sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ tel que $F \not\subseteq \ker u$?

Exercice 123. On peut factoriser de force par A et utiliser la réduction des matrices de rang 1 pour obtenir $I_n + A^{-1}H \in GL_n(K) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(A^{-1}H) \neq -1$ et, le cas échéant, une expression de l'inverse de $I_n + A^{-1}H$, et donc de $A + H$.

Exercice 124. Il est facile de tester si un endomorphisme de rang un est nilpotent, et on a $f \circ (v \otimes \alpha) = f(v) \otimes \alpha$.

Exercice 125. On pourra déjà « tester » la $\forall$-assertion sur les endomorphismes de rang un $y \otimes \alpha$.

Exercice 126.

1. Si l'on raisonne avec la base canonique, on voit que f doit envoyer $E_{1,2}$ et $E_{2,1}$ sur des matrices colinéaires, mais cela ne montre que $\operatorname{rg} f \leq 3$.
   Pour aller plus loin, il faut trouver d'autres matrices nilpotentes. Le fait que l'on sache calculer instantanément le carré d'une matrice de rang un est alors précieux.
2. On généralisera le raisonnement précédent en construisant une base de $M_n(K)$ dont tous les éléments sauf un sont nilpotents. On obtient $\operatorname{rg} f \leq 1 + \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Exercice 127.

1. Si F n'était pas surjective, $\operatorname{im} F$ serait incluse dans un hyperplan de K^r, ce qui fournirait des coefficients non tous nuls $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K$ tels que $\forall x \in V, \alpha_1 f_1(x) + \cdots + \alpha_r f_r(x) = 0$.
2. (a) La question précédente fait la moitié du travail, et la théorie de la dimension nous dispense de l'autre moitié.

(b) Il suffit de prendre l'image par φ^{-1} de la base canonique.

Exercice 128. Une possibilité est d'appliquer le lemme de factorisation à l'application linéaire $F : V \to K^n$ définie par $F(x) = \big(f_i(x)\big)_{i=1}^n$.

Une autre est de se ramener au cas où la famille $(f_1, \dots, f_r)$ est libre : l'application $\begin{cases} V \to & K^{r+1} \\ x \mapsto & \big(f_1(x), \dots, f_r(x), f(x)\big) \end{cases}$ n'est pas surjective, donc $(f_1, \dots, f_r, f)$ n'est plus libre, ce qui conclut.

Exercice 129.

1. Théorème du rang appliqué à la bonne application $\varphi : E \to K^k$.
2. C'est essentiellement la forme géométrique du théorème du rang (avec une espèce de réciproque : si φ induit un isomorphisme $S \to \operatorname{im}\varphi$, c'est que S est un supplémentaire du noyau de φ).

Exercice 130. On montre la liberté de la famille en évaluant une relation de liaison $\sum_{i,j} \lambda_{i,j}(w_i \otimes v_j^*)$ en les bons vecteurs.

Exercice 131.

1. On peut se ramener aux hyperplans $H_r = \big\{A \in M_n(K) \,\big|\, \operatorname{tr}(A J_r) = 0\big\}$.
2. Si $n = 2$, on peut vérifier que $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a, b \in K \right\}$ convient, et s'en inspirer pour donner un contre-exemple général.

Exercice 132.

1. La non-dégénérescence de la forme trace fournit un isomorphisme $\tau : \begin{cases} M_n(K) \to M_n(K)^* \\ A \quad \mapsto \operatorname{tr}(A-). \end{cases}$
   La base $(M_k')_{k=1}^{n^2}$ est alors l'image par τ^{-1} d'une base connue.
2. On peut vérifier la relation dans le cas particulier de la base canonique, puis vérifier que le résultat ne changera pas si on la remplace par une base quelconque. On peut d'ailleurs effectuer ce changement par une suite de petites opérations.