

Compacité, connexité par arcs

Conventions du TD :

- ▶ Si les lettres E et/ou F sont utilisées sans définition dans un exercice, il s'agit d'espaces vectoriels normés dont les normes sont notées $\|\cdot\|$. Il est même possible qu'ils soient supposés non réduits à un élément.
- ▶ La boule ouverte de centre a et de rayon r est notée $B(a, r)$, et la boule fermée de centre a et de rayon r est notée $B_f(a, r)$ ou $\overline{B}(a, r)$. Diverses décorations pourront être ajoutées pour préciser l'espace et la norme sous-entendus.

Compacité

Compacité, généralités

Exercice 1. *Cône engendré par un compact.*

Soit K un compact de E tel que $0 \notin K$.

1. Montrer que $\mathbb{R}_+K = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}_+, x \in K\}$ est fermé.
2. Montrer, en construisant un contre-exemple, que le résultat serait faux si on supposait seulement K fermé.

♠ **Exercice 2.** *Précompacité.*

Une partie A d'un espace vectoriel normé est dite *précompacte* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble fini $C \subseteq A$ tel que $A \subseteq \bigcup_{c \in C} \overline{B}(c, \varepsilon)$.

1. Montrer que toute partie compacte d'un espace vectoriel normé est précompacte.
2. Soit E un espace préhilbertien. Montrer que sa boule unité est précompacte si et seulement si E est de dimension finie.

♠ **Exercice 3.** *Théorème des compacts emboîtés.*

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides de E .

1. Démontrer que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est un compact non vide.
2. **Application.** Soit $f : E \rightarrow F$ continue. Montrer $f\left[\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n\right] = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f[K_n]$.

♠★ **Exercice 4.** *Théorème de Borel-Lebesgue.*

Soit K un compact de E .

1. Soit $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ un *recouvrement ouvert* de K , c'est-à-dire une famille d'ouverts telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$.
(a) Montrer que $\mathcal{U}$ possède un *nombre de Lebesgue*, c'est-à-dire un rayon $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in K, \exists i \in I : B(x, \rho) \subseteq U_i.$$

- (b) En déduire qu'il existe une partie finie $J \subseteq I$ telle que $K \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$.
- Réciproquement, soit K une partie de E possédant la *propriété de Borel-Lebesgue* : de tout recouvrement ouvert $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ de K , on peut extraire un sous-recouvrement fini. Montrer que K est compact.
 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ est une partie compacte de E , en utilisant puis sans utiliser la propriété de Borel-Lebesgue.

Compacité et fonctions

Exercice 5. *Compacité et uniformité.*

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert contenant $\overline{B}(0, 1)$. Montrer qu'il existe $R > 1$ tel que $\Omega \supseteq B(0, R)$.

Exercice 6. *Inverse d'une fonction lipschitzienne.*

Soit K un compact de E et $f : K \rightarrow \mathbb{C}^*$ une fonction lipschitzienne.

Montrer que $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est lipschitzienne et que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de compacité.

Exercice 7. *Pseudocompacité.*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$ tel que toute fonction continue $A \rightarrow \mathbb{R}$ soit bornée. Montrer que A est compact.

Exercice 8. *Distance entre deux parties.*

- Soit A et B deux compacts non vides de E . Montrer que « la distance entre A et B est atteinte, » c'est-à-dire qu'il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $\|a - b\| = \min \{\|x - y\| \mid x \in A, y \in B\}$.
- Montrer que la propriété ne reste plus vraie si A et B sont simplement supposés fermés.

Exercice 9. *Graphe fermé.*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E .

- Montrer que si une application $f : A \rightarrow F$ est continue, son graphe est un fermé de $A \times F$.
- Montrer que la réciproque est fautive en général.
- Montrer que si f est à valeurs dans un compact $K \subseteq F$ et que son graphe est fermé de $A \times F$, alors elle est continue.

Exercice 10. *Les espaces vectoriels normés sont "compactly generated".*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés, A une partie de E et $f : A \rightarrow F$.

Montrer que f est continue si et seulement si sa restriction à toute partie compacte de A est continue.

Δ Exercice 11. *Point fixe d'une application strictement 1-lipschitzienne sur un compact.*

Soit A un compact non vide de E et $f : A \rightarrow A$ telle que $\forall x \neq y \in A, \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|$.

- Construire un contre-exemple montrant que les hypothèses n'entraînent pas que f est k -lipschitzienne pour un certain $k < 1$.
- Montrer que f admet un unique point fixe ℓ .
- Montrer que toute suite $u \in A^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ converge vers ℓ .

Δ **Exercice 12.** *Point fixe d'une application 1-lipschitzienne sur un compact convexe.*

Soit $C \subseteq E$ compact, convexe, non vide et $f : C \rightarrow C$ une application 1-lipschitzienne.

1. On fixe $a \in C$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $f_n : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{n}\right)f(x) + \frac{1}{n}f(a)$ est k_n -lipschitzienne pour un certain $k_n < 1$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application f_n admet un point fixe $x_n \in C$.
3. Montrer que f admet aussi un point fixe.

Δ★ **Exercice 13.** *Théorème de Markov-Kakutani.*

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé, u un endomorphisme continu et C un compact convexe et non vide de E stable sous u .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, C est stable sous u_n .
2. Montrer que u admet un point fixe dans C .
3. Soit $u_1, \dots, u_r$ des endomorphismes continus de E commutant deux à deux entre eux et stabilisant C . Montrer qu'ils ont un point fixe commun dans C .

Δ **Exercice 14.** *Théorème ergodique en dimension finie.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|$.

1. Montrer que $\ker(u - \text{id}_E) = \ker(u - \text{id}_E)^2$.
2. En déduire $E = \ker(u - \text{id}_E) \oplus \text{im}(u - \text{id}_E)$.
3. Montrer que la suite $\varphi_p = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} u^k$ converge vers le projecteur sur $\ker(u - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{im}(u - \text{id}_E)$.

Exercice 15. *Partie fortement invariante.*

Soit K un compact non vide de E et $f : K \rightarrow K$ continue.

Montrer qu'il existe $X \subseteq K$ non vide telle que $f[X] = X$.

Exercice 16. *Bijection continue sur un compact.*

Soit K un compact de E et $f : K \rightarrow F$ continue et injective. On note $L = f[K]$.

Montrer que f induit un *homéomorphisme* $K \rightarrow L$, c'est-à-dire une application continue, bijective, de réciproque continue.

Exercice 17. *Théorème d'Auerbach.*

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension finie n , dont on note B la boule unité fermée et f une forme n -linéaire alternée non nulle sur E .

1. Montrer que $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ atteint un maximum sur B^n .
2. En une famille $(e_1, \dots, e_n)$ où le maximum est atteint, montrer que :
 - (a) $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E ;
 - (b) les e_i sont unitaires;
 - (c) les formes linéaires coordonnées $e_1^*, \dots, e_n^*$ vérifient $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|e_j^*\| = 1$.

Exemples

Exercice 18. Compacts dénombrables.

Soit K une partie compacte, dénombrable et infinie d'un espace vectoriel normé E .

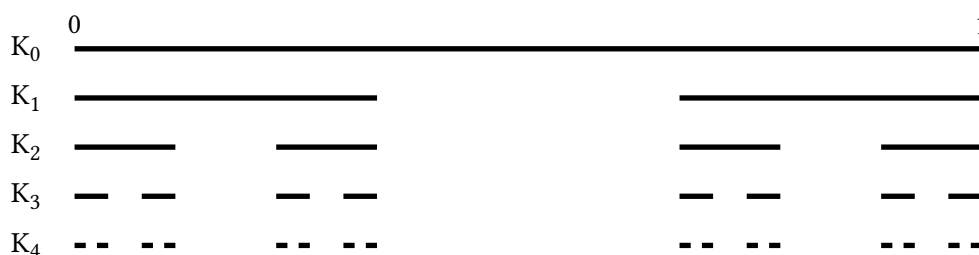
Un point $a \in K$ est dit *isolé* si $a \notin \overline{K \setminus \{a\}}$.

1. Montrer que les points de K ne sont pas tous isolés.
2. Donner un exemple de tel compact ayant un unique point non isolé, puis un exemple avec une infinité de points non isolés.

♠ Exercice 19. Ensemble de Cantor : première construction.

On définit une suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $[0, 1]$ de la façon suivante :

- ▶ $K_0 = [0, 1]$;
- ▶ $K_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$;
- ▶ pour tout $n \in \mathbb{N}$, K_n est l'union de 2^n segments de taille 3^{-n} : on passe de K_n à K_{n+1} en enlevant à chacun de ces segments $[\alpha, \beta]$ son « tiers central ouvert » $\left]\frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\beta, \frac{1}{3}\alpha + \frac{2}{3}\beta\right]$.



1. Montrer que l'ensemble $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, appelé *ensemble de Cantor*, est un compact non vide de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que K est d'intérieur vide.
3. Trouver une manière $w \mapsto S(w)$ de « numérotter » les 2^n segments de K_n par les 2^n « mots » de longueur n sur « l'alphabet » $\{0, 1\}$, de telle sorte que si w_1 est un « préfixe » de w_2 , alors $S(w_2) \subseteq S(w_1)$.
4. En déduire l'existence d'une injection $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow K$.

Exercice 20. Ensemble de Cantor : développements triadiques.

Soit $K = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$.

1. Montrer que K est un compact de $\mathbb{R}$, d'intérieur vide.
2. Montrer que K n'est pas dénombrable, mais qu'il existe des parties dénombrables denses dans K .
3. Montrer que l'ensemble K est en fait égal à l'ensemble de l'exercice précédent.

Exercice 21. Ensemble de Julia rempli.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 2 . Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on définit la suite $(u_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$u_0(z) = z \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(z) = P(u_n(z)).$$

On note K l'ensemble des z pour lesquels la suite $(u_n(z))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Montrer que K est compact.

Exemples en dimension infinie

Exercice 22. *L'ensemble de Cantor, dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.*

Soit $C = \left\{ \left(\frac{a_n}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \mid (a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}^*} \right\}$, vu comme une partie de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$.

1. Montrer que C est compact.
2. Construire une bijection continue $C \rightarrow K$, où $K \subseteq \mathbb{R}$ est l'ensemble de Cantor.

Exercice 23. *Une injection compacte.*

ÉNS

On fixe une suite w strictement positive telle que $w_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

On considère $E_w = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^1(\mathbb{N})\}$, muni de la norme $\|u\|_w = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n |u_n|$.

1. Montrer que $E_w \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ est une partie dense.
2. Montrer que la boule unité fermée B de E_w (pour la norme $\|\cdot\|_w$) est une partie compacte de $\ell^1(\mathbb{N})$.

★ **Exercice 24.** *Compacité des fonctions 1-lipschitziennes.*

ÉNS

On note K l'ensemble des fonctions 1-lipschitziennes $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$.

1. Montrer que K est compact pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Pour $\delta > 0$, on note $N(\delta)$ le cardinal minimal d'un ensemble fini $C \subseteq K$ tel que $K \subseteq \bigcup_{c \in C} \overline{B}(c, \delta)$.

Donner un équivalent de $\ln(\ln N(\delta))$ lorsque δ tend vers 0.

Dimension finie

Applications topologiques

Exercice 25. *Caractérisation des boules.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et Ω un ouvert borné non vide de E . On suppose que, pour tous $x, y \in \Omega$, il existe une boule ouverte incluse dans Ω et contenant x et y .

Montrer que Ω est une boule.

Exercice 26. *Limite finie à l'infini.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} \ell$.

Montrer que f est bornée et uniformément continue sur E .

Exercice 27. *Optimalité de l'exercice précédent.*

Soit $h : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, continue, nulle sur $[1/2, +\infty[$ et telle que $h(0) = 1$.

On note $e_k = (\mathbb{1}_{k=n})_{n \in \mathbb{N}}$, vue comme un élément de $\ell^2(\mathbb{N})$.

Montrer que $\varphi : u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} k h(\|u - e_k\|)$ est bien définie, continue, de limite nulle en l'infini et non bornée.

Exercice 28. *Cantorvals.*

Soit F un espace vectoriel normé de dimension finie et $u \in \ell^1(\mathbb{N}; F)$.

Montrer que $C = \left\{ \sum_{n \in A} u_n \mid A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \right\}$ est compact.

Exercice 29. *Systèmes dynamiques discrets.*

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ et $u_0 \in \mathbb{R}^d$. On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une unique valeur d'adhérence ℓ , alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

Exercice 30. *Fonction maximale.*

ÉNS

On munit $\mathbb{R}^d$ d'une norme $\|\cdot\|$. Soit $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On définit $M : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ r \mapsto \sup_{x \in \overline{B}(0, r)} f(x) \end{cases}$.

1. Montrer que M est bien définie et continue.
2. Montrer que si f est lipschitzienne, M aussi.

Exercice 31. *Fermé invariant.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle et $f : E \rightarrow E$ une application continue. On notera $f^n = f \circ \dots \circ f$ les itérées de f .

On se propose de montrer qu'il existe un fermé X de E non trivial ($X \neq \emptyset, E$) invariant sous f . On suppose par l'absurde que ça n'est pas le cas.

1. Montrer que f est *minimale*, c'est-à-dire que, pour tout $x \in E$, l'orbite $\{f^n(x) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense.
2. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| \leq 1$ et $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \|f^k(x)\| \geq 1$.
3. En déduire une contradiction.

Exercice 32. *Centre de symétrie.*

X

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tous $a, b, c \in K$ il existe s dans K tel que $2s - a, 2s - b, 2s - c$ soient dans K .

Montrer qu'il existe $s \in \mathbb{R}^n$ tel que $\forall x \in K, 2s - x \in K$.

★ **Exercice 33.** *Le plan n'est pas réunion de cercles disjoints.*

On veut montrer que $\mathbb{R}^2$ n'admet pas de recouvrement disjoint par des cercles (non triviaux, c'est-à-dire de rayon > 0) On suppose le contraire.

1. Soit C l'un de ces cercles, de centre a et de rayon r , et C' celui qui passe par a . Montrer que C' est inclus dans le disque ouvert $B(a, r)$ et que son rayon est inférieur à $r/2$.
2. Conclure.
3. Qu'en est-il de $\mathbb{R}^3$?

★ **Exercice 34.** *Listes non contenues dans un demi-espace.*

Soit E un espace vectoriel normé réel de dimension n , dont on notera S la sphère unité.

Un *demi-espace fermé* est une partie $H(f) = f^{-1}[\mathbb{R}_+]$, où f est une forme linéaire non nulle.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note Ω_p l'ensemble des p -uplets $(x_1, \dots, x_p) \in S^p$ tels qu'aucun demi-espace fermé ne contienne tous les x_i . Montrer que Ω_p est un ouvert de S^p .

★ **Exercice 35.** *Théorème du rayon.*

ÉNS

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble convexe, fermé et non borné. Montrer que A contient une demi-droite.

Exercice 36. *Rayon de Чебышев.*

Soit K une partie bornée non vide d'un espace vectoriel normé E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal incluant K .
2. Donner un exemple (en choisissant bien l'espace vectoriel normé) montrant qu'il n'y a en général pas unicité de cette boule.
3. Montrer qu'il y a unicité dans le cas où la norme est euclidienne.
4. On suppose la norme euclidienne. Montrer que toute isométrie $f : E \rightarrow E$ (c'est à dire toute application $f : E \rightarrow E$ vérifiant $\forall x, y \in E, \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$) stabilisant K admet un point fixe.

Exercice 37. *Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires.*

Mines (PC)

Soit $F \subseteq [0, 1]^2$ une partie fermée. On suppose que, pour tout $x \in [0, 1]$, $\{y \in [0, 1] \mid (x, y) \in F\}$ est un intervalle non vide.

Montrer que F rencontre la droite d'équation $y = x$.

Applications à des problèmes d'extrema

♠ **Exercice 38.** *Fonctions coercives.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que toute application continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$ admet un minimum sur E .

Exercice 39. *Meilleure approximation affine.*

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

Montrer que la fonction $(a, b) \mapsto \max_{x \in [0, 1]} |f(x) - ax - b|$ admet un minimum sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 40. *Minimum en norme L^1 .*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on décide de noter A_n l'espace affine constitué des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ unitaires et de degré n .

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $a_n := \inf \left\{ \int_0^1 |P(t)| dt \mid P \in A_n \right\}$ est strictement positif.
Cette borne inférieure est-elle atteinte ?
2. Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Δ **Exercice 41.** *Caractérisation extrême L^∞ des polynômes de Чебышев de première espèce.*

Dans cet exercice, $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme sur $C^0([-1, 1])$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_k = \cos(k\pi/n)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.
Préciser son degré, son coefficient dominant, $\|T_n\|$ et les valeurs $T_n(x_k)$.
2. Soit P un polynôme unitaire de degré n .
Montrer que $\|P\| \geq 2^{1-n}$, avec égalité si et seulement si $P = 2^{1-n} T_n$.

★ **Exercice 42.** *Théorème d'équioscillation de Чебышев.*

Une famille $x_0 < x_1 < \dots < x_N$ constituée de $N + 1$ points de $[-1, 1]$ sera dite *alternante* pour une fonction continue $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ si $\forall j \in \llbracket 0, N \rrbracket, g(x_j) = \pm \|g\|_\infty$, avec des signes $\pm$ qui alternent quand j parcourt $\llbracket 0, N \rrbracket$.

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $E_n(f) = \min \{\|f - P\|_\infty \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$ est bien défini.
2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = E_n(f)$.
Montrer qu'il existe une famille alternante à $n + 2$ points pour $f - P$.
3. En déduire qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\|f - P\|_\infty = E_n(f)$.
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel qu'il existe une famille alternante à $n + 2$ points pour $f - P$.
Montrer que $\|f - P\|_\infty = E_n(f)$.

Exercice 43. *Distance non atteinte à un fermé.*

Dans $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère

$$F = \left\{ f \in E \mid f(0) = f(1) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t) dt = 1 \right\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace affine fermé de E .
2. Montrer que la distance de 0 à F n'est pas atteinte.

Exercice 44. *Distance au graphe de $\cos^n$.*

X

On note Γ_n le graphe de la fonction $x \mapsto \cos^n x$, vu comme partie de $\mathbb{R}^2$ (muni de sa norme euclidienne usuelle).

1. Montrer que $d_n = \inf_{p \in \Gamma_n} \|p\|$ est bien défini et atteint.
2. Calculer la limite de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
3. Donner un équivalent de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Applications algébriques diverses

Exercice 45. *Majoration d'un terme de suite récurrente linéaire.*

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$. On pose $E = \{u \in \mathbb{C}^\mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n\}$.

Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\forall u \in E, |u_{1854}| \leq A(|u_0| + |u_1| + |u_2|)$.

Exercice 46. *Normes presque sous-multiplicatives.*

1. Soit N une norme sur $M_n(K)$. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall A, B \in M_n(K), N(AB) \leq cN(A)N(B)$.
2. Construire une norme sur $K[X]$ telle que

$$\forall c > 0, \exists A, B \in K[X] : N(AB) > cN(A)N(B).$$

Exercice 47. *Domination par un automorphisme.*

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $v \in GL(E)$.

Montrer $\exists A \geq 0 : \forall x \in E, \|u(x)\| \leq A\|v(x)\|$.

Exercice 48. $\ker f = \ker f^2$.

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$.

Montrer que $\ker f = \ker f^2$ si et seulement si il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leq C\|f^2(x)\|$.

Exercice 49. *Applications linéaires ouvertes.*

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. On dit que f est *ouverte* si l'image de tout ouvert par f est un ouvert.

Montrer que f est surjective si et seulement si elle est ouverte.

Exercice 50. *Limite des puissances d'une matrice.*

Montrer $\left\{L \in M_d(\mathbb{R}) \mid \exists A \in M_d(\mathbb{R}) : A^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L\right\} = \{P \in M_d(\mathbb{R}) \mid P^2 = P\}$.

Exercice 51. *Calcul complexe simple.*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\theta}{n} \\ \frac{\theta}{n} & 1 \end{pmatrix}$. Étudier la convergence de la suite $(A_n^n)_{n \geq 1}$.

♠ **Exercice 52.** *Les familles libres forment un ouvert.*

Soit E un K -espace vectoriel normé de dimension finie. On note $\ell_n(E)$ l'ensemble des familles libres de E à n éléments. Montrer que $\ell_n(E)$ est un ouvert de E^n .

Exercice 53. *Union « compacte » de fermés.*

Soit $K \subseteq GL_n(\mathbb{R})$. Étant donné $A \subseteq \mathbb{R}^n$, on définit

$$KA = \{ka \mid (k, a) \in K \times A\}.$$

1. Montrer que si A est ouvert, KA également.
2. Montrer que si A est fermé et K compact, alors KA est fermé.
3. Est-il vrai que si A et K sont fermés, alors KA aussi ?

Exercice 54. *Sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.*

Déterminer les sous-groupes compacts de $\mathbb{C}^*$.

Δ ★ **Exercice 55.** *Sous-groupes discrets de $\mathbb{R}^n$.*

ÉNS

Si A est une partie de $\mathbb{R}^n$ et $a \in A$, on rappelle que a est *isolé* si $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$.

Soit L un sous-groupe additif de $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que 0 est un point isolé de L si et seulement si tous les points de L sont isolés. (On dit alors que L est *discret*.)
2. On suppose L discret. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et une famille libre $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $L = \left\{ \sum_{i=1}^p a_i u_i \mid a_1, \dots, a_p \in \mathbb{Z} \right\}$.

♠★ **Exercice 56.** *Inversibles d'une algèbre normée de dimension finie.*

Soit A une $\mathbb{R}$ -algèbre de dimension finie sur $\mathbb{R}$, munie d'une norme d'algèbre $\|\cdot\|$.

1. Montrer que $B(1, 1) \subseteq A^\times$.
2. En déduire que $A^\times$ est ouvert.

★ **Exercice 57.** *Iidéaux maximaux de $C([0, 1]; K)$.*

1. **Propriété de Borel-Lebesgue pour les segments.** Soit $\mathcal{U} = (U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ un recouvrement ouvert de $[0, 1]$, c'est-à-dire une famille d'ouverts telle que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$. Montrer que $\mathcal{U}$ possède un sous-recouvrement fini, c'est-à-dire qu'il existe $\Lambda_0 \subseteq \Lambda$ fini tel que $[0, 1] \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} U_\lambda$.
2. Pour tout $a \in [0, 1]$, on note $\mathfrak{m}_a = \{f \in C([0, 1]; K) \mid f(a) = 0\}$. Montrer que $\mathfrak{m}_a$ est un *idéal maximal* de $A = C([0, 1]; K)$, c'est-à-dire un idéal strict de A tel que, pour tout idéal $I \trianglelefteq A$, les inclusions $\mathfrak{m}_a \subseteq I \subseteq A$ entraînent $I = \mathfrak{m}_a$ ou $I = A$.
3. Réciproquement, soit I un idéal maximal de A . Montrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $I = \mathfrak{m}_a$.

Applications aux polynômes♠ **Exercice 58.** *Applications propres.*

Soit E et F des espaces vectoriels normés de dimension finie et $f : E \rightarrow F$ continue.

On dit que f est *propre* si, pour tout compact K de F , $f^{-1}[K]$ est un compact de E .

1. Montrer que f est propre si et seulement si $\|f(x)\| \xrightarrow{\|x\| \rightarrow +\infty} +\infty$.
2. On suppose que f est propre. Montrer que l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F .
3. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^d & \rightarrow \mathbb{R}_d[X] \\ (z_1, \dots, z_d) & \mapsto \prod_{j=1}^d (X - z_j) \end{cases}$ est propre et en déduire que l'ensemble des polynômes unitaires et scindés de degré d est un fermé de $\mathbb{R}_d[X]$.

Exercice 59. *Contrôle de la divisibilité.*

X

On munit $E = \mathbb{R}_d[X]$ d'une certaine norme.

Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de polynômes unitaires appartenant à E .

On suppose $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bornée et $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \mid Q_n$. Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Exercice 60. *Fermeture de l'ensemble des polynômes unitaires scindés.*

Soit $d \in \mathbb{N}$. On munit $E = \mathbb{R}_d[X]$ d'une norme quelconque.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré d .
Montrer que P est scindé si et seulement si $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \geq |\operatorname{Im}(z)|^d$.
2. En déduire que l'ensemble des polynômes unitaires scindés est fermé dans E .

♠★ **Exercice 61.** *Continuité des racines.*

Fixons $n \geq 2$. On munit dans cet exercice $K_n[X]$ d'une norme $\|\cdot\|$ et on s'intéresse à l'hyperplan affine A_n^K constitué des polynômes unitaires de degré n . Pour simplifier, on note $A_n = A_n^{\mathbb{C}}$.

1. Soit $P \in A_n$ admettant un zéro ζ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que tout polynôme $Q \in A_n \cap \overline{B}(P, \eta)$ possède une racine $\omega \in \mathbb{C}$ telle que $|\zeta - \omega| \leq \varepsilon$.
2. Déterminer si les parties suivantes de $A_n^{\mathbb{R}}$ ou A_n sont ouvertes ou fermées. Déterminer à chaque fois leur intérieur et leur adhérence.
 - (i) L'ensemble des polynômes réels, dans A_n ;
 - (ii) l'ensemble des polynômes à racines simples, dans A_n ;
 - (iii) l'ensemble des polynômes réels à racines (complexes) simples, dans $A_n^{\mathbb{R}}$;

- (iv) l'ensemble des polynômes réels scindés à racines simples, dans $A_n^{\mathbb{R}}$;
- (v) l'ensemble des polynômes réels scindés, dans $A_n^{\mathbb{R}}$.

♠★ **Exercice 62.** *Ouverture et fermeture des fonctions polynomiales.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant. On note $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application polynomiale associée.

1. Soit $F \subseteq \mathbb{C}$ un fermé. Montrer que $f[F]$ est fermé.
2. Soit $O \subseteq \mathbb{C}$ un ouvert. Montrer que $f[O]$ est ouvert.

★ **Exercice 63.** *Parties bornées de $\mathbb{C}$ stables sous $z \mapsto z^2 \pm z + 1$.*

Le but de cet exercice est de déterminer les ensembles bornés $B \subseteq \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in B, z^2 \pm z + 1 \in B.$$

1. On considère d'abord une partie K compacte, non vide, stable par $z \mapsto z^2 \pm z + 1$.
 - (a) Montrer que $m = \max_{z \in K} |z|$ est bien défini.
 - (b) Montrer que $m = 1$ et décrire $K \cap \mathbb{U}$.
 - (c) Montrer $K = \{\pm i\}$.
2. Conclure.

★★ **Exercice 64.** *Théorème de Hutchinson-Kurtz.*

Soit $n \geq 2$ et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}_+^*$. On note $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

1. On suppose que P est scindé et que -1 en est une racine multiple. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ tel que $a_k^2 \leq 4a_{k-1}a_{k+1}$.
2. Montrer que si $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k^2 > 4a_{k-1}a_{k+1}$, alors P est scindé à racines simples.

Autour du théorème de Riesz

Exercice 65. *Deux cas particuliers du théorème de Riesz.*

1. On munit l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites réelles bornées de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que sa sphère unité n'est pas compacte.
2. On munit l'espace $E = C^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_2 = \left(\int_0^{2\pi} f^2 \right)^{1/2}$.
 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n : x \mapsto \cos(nx)$.
 - (a) Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\|f_n - f_p\|_2$.
 - (b) En déduire que la boule unité de E n'est pas compacte.

♠★ **Exercice 66.** *Théorème de Riesz.*

1. Soit X un espace vectoriel normé et $Y \subseteq X$ un sous-espace vectoriel fermé propre. Montrer le *lemme de Riesz* : $\forall \varepsilon > 0, \exists \xi \in X : (\|\xi\| = 1 \text{ et } d(\xi, Y) \geq 1 - \varepsilon)$.
2. Soit X un espace vectoriel normé de dimension infinie.
 - (a) Montrer que l'on peut construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1 \text{ et } \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \Rightarrow \|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}.$$

- (b) En déduire que la boule unité et la sphère unité de X ne sont pas compactes.
3. Construire explicitement une telle suite dans $(C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$ et dans $(C^0([0, 1]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 67. *Optimalité du lemme de Riesz.*

On munit $X = \{f \in C^0([0, 1]) \mid f(0) = 0\}$ de la norme uniforme et on considère $Y = \left\{f \in X \mid \int_0^1 f = 0\right\}$.

1. Montrer que Y est un sous-espace vectoriel fermé et propre de X .
2. Soit $f \in X$. Calculer la distance $d(f, Y)$.
3. Montrer qu'on ne peut pas trouver un vecteur $\xi \in X$ tel que $\|\xi\|_\infty = 1$ et $d(\xi, Y) = 1$.

★ **Exercice 68.** *Parties bornées à frontière compacte.*

ÉNS

Soit E un espace préhilbertien de dimension infinie et K une partie bornée de E dont la frontière est compacte. Montrer que K est d'intérieur vide dans E .

Peut-on généraliser le résultat à n'importe quel espace vectoriel normé de dimension infinie ?

Convexité

Exercice 69. *Adhérence et intérieur d'un convexe.*

Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E .

1. Montrer que $\overline{A}$ est convexe.
2. Montrer que $\overset{\circ}{A}$ est convexe.
3. Montrer que si $a \in \overline{A}$ et $b \in \overset{\circ}{A}$, alors $]a, b[:= \{(1 - \lambda)a + \lambda b \mid \lambda \in]0, 1[\}$ $\subseteq \overset{\circ}{A}$.
4. On suppose A d'intérieur non vide. Montrer que $\overline{\overset{\circ}{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{\overline{A}} = \overset{\circ}{A}$.

Exercice 70. *Intérieur relatif d'un convexe.*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie et C un convexe non vide de E .

Montrer que C est d'intérieur non vide dans le plus petit sous-espace affine de E incluant C .

Δ★ **Exercice 71.** *Théorème de Hahn-Banach en dimension finie.*

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel normé de dimension finie, F un sous-espace vectoriel strict de E , et φ une forme linéaire sur F telle que $\|\varphi\| = 1$.

1. Soit $a \in E$. Montrer $\forall x, y \in F, \varphi(x) - \|x - a\| \leq \varphi(y) + \|a - y\|$.
2. Montrer qu'il existe un prolongement de φ en une forme linéaire $\tilde{\varphi}$ sur E telle que $\|\tilde{\varphi}\| = 1$.
3. Soit $x \in E$. Montrer $\|x\| = \max\{|\varphi(x)| \mid \varphi \in \overline{B}(0, 1)\}$, où la boule $B(0, 1)$ est celle du dual $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, muni de la norme subordonnée.

Δ★ **Exercice 72.** *Théorème de Carathéodory.*

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

- ▶ on note Δ_k l'ensemble des $(k + 1)$ -uplets $(\lambda_0, \dots, \lambda_k)$ de nombres réels positifs tels que $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$;
- ▶ étant donné un $(k + 1)$ -uplet $(p_0, \dots, p_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^n$, on définit l'ensemble

$$H(p_0, \dots, p_k) = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i p_i \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \in \Delta_k \right\}.$$

Enfin, soit $A \subseteq \mathbb{R}^n$. On définit son *enveloppe convexe* :

$$\text{co}(A) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcup_{(p_0, \dots, p_k) \in A^{k+1}} H(p_0, \dots, p_k).$$

1. Montrer que $\text{co}(A)$ est un ensemble convexe, que $A \subseteq \text{co}(A)$, et que toute partie convexe C de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $A \subseteq C$ vérifie automatiquement $\text{co}(A) \subseteq C$.

2. Soit $p_0, \dots, p_k \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une relation de liaison non triviale $\sum_{i=0}^k \mu_i p_i = 0$ telle que

$$\sum_{i=0}^k \mu_i = 0. \text{ Montrer qu'alors } H(p_0, \dots, p_k) = \bigcup_{i=0}^k H(p_0, p_1, \dots, p_{i-1}, p_{i+1}, \dots, p_k).$$

3. Montrer le *théorème de Carathéodory* :

$$\text{co}(A) = \bigcup_{(p_0, \dots, p_n) \in A^{n+1}} H(p_0, \dots, p_n).$$

4. En déduire que si A est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, alors $\text{co}(A)$ est également compacte.

♠★ **Exercice 73.** *Projection sur un convexe fermé.*

Soit E un espace euclidien, soit C une partie non vide de E , convexe et fermée.

1. Soit $x \in E$. Démontrer qu'il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = d(x, C)$. On notera $y = p_C(x)$.
2. Démontrer que le vecteur $y = p_C(x) \in C$ est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall u \in C, \langle x - y, u - y \rangle \leq 0.$$

3. Prouver que l'application $p_C : E \rightarrow E$ ainsi définie est 1-lipschitzienne et vérifie $p_C \circ p_C = p_C$.

Connexité par arcs

Faire des dessins !

Exercice 74. *Intérieur d'un connexe par arcs.*

L'intérieur d'un ensemble connexe par arcs est-il nécessairement connexe par arcs ?

Exercice 75. *Un exemple amusant.*

Dessiner un exemple de deux ouverts disjoints, bornés, connexes par arcs et non vides dans $\mathbb{R}^2$ possédant la même frontière.

Exercice 76. *Connexité de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.*

X

1. Montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs.
2. Plus généralement, montrer que pour $d \geq 2$, le complémentaire dans $\mathbb{R}^d$ d'une partie dénombrable est connexe par arcs.

Exercice 77. *Complémentaire du lieu d'annulation d'un polynôme.*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul. Montrer que $\{z \in \mathbb{C} \mid P(z) \neq 0\}$ est connexe par arcs.
2. Plus généralement, soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme non nul. Montrer que $\{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(z_1, \dots, z_n) \neq 0\}$ est connexe par arcs.
3. Ce résultat reste-t-il vrai sur $\mathbb{R}$?

Exercice 78. *Traçable sans lever le crayon.*

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont le graphe est connexe par arcs. Montrer que f est continue.
2. Construire une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ discontinue partout mais dont le graphe est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^3$.

Généralités

Exercice 79. *Produit et somme de connexes par arcs.*

Soit A et B deux parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé E .

1. Le produit cartésien $A \times B$ est-il connexe par arcs ?
2. Montrer que $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ est connexe par arcs.

Exercice 80. *Composantes connexes par arcs d'un ouvert.*

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$.

1. Montrer que les composantes connexes par arcs de Ω sont ouvertes.
2. Montrer que Ω possède un nombre au plus dénombrable de composantes connexes par arcs.

Exercice 81. *Un connexe par arcs est non dénombrable.*

Un ensemble connexe par arcs peut-il être dénombrable ?

Exercice 82. *Une caractérisation amusante des espaces connexes par arcs.*

Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$ un ensemble connexe par arcs. Soit $X \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\alpha \neq \omega \in X$. Montrer qu'étant donné deux points quelconques $x, y \in C$, il existe une application continue $f : X \rightarrow C$ telle que $f(\alpha) = x$ et $f(\omega) = y$.

Exercice 83. *Intersection de deux quadriques complexes.*

Soit $a \in \mathbb{R}^n$ et E l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^n$ tels que :

$$\sum_{k=1}^n |z_k|^2 = 1 \text{ et } \sum_{k=1}^n a_k |z_k|^2 = 1.$$

Montrer que E est connexe par arcs.

Exercice 84. *Deux parties complémentaires denses et connexes par arcs.*

Est-ce qu'il existe une partie $D \subseteq \mathbb{R}^3$ telle que D et son complémentaire soient à la fois denses et connexes par arcs ?

Applications

♠ **Exercice 85.** *Projecteurs en dimension finie.*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $X \subseteq \mathcal{L}(E)$ un ensemble de projecteurs connexe par arcs. Montrer que $\operatorname{rg}|_X$ est constante.

Exercice 86. *Projecteurs continus et rang.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{L}_c(E)$.

On considère le rang comme une application $\text{rg} : \mathcal{L}_c(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

1. Soit p et $q \in \mathcal{L}_c(E)$ deux projecteurs de rangs différents. Montrer que $\|p - q\| \geq 1$.
2. Soit $X \subseteq \mathcal{L}_c(E)$ un ensemble de projecteurs connexe par arcs. Montrer que $\text{rg}|_X$ est constante.

Δ Exercice 87. *Retirer un point.*

Deux parties A et B d'espaces vectoriels normés sont dites *homéomorphes* quand il existe une bijection continue $f : A \rightarrow B$ dont la réciproque est continue.

1. Montrer que si A et B sont homéomorphes, pour tout point $a \in A$, il existe un point $b \in B$ tel que $A \setminus \{a\}$ et $B \setminus \{b\}$ sont homéomorphes.
2. En déduire :
 - ▶ que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes ;
 - ▶ que $[0, 1]$ et $\mathbb{U}$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 88. *Exhaustions, bouts et homéomorphismes.*

Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un ouvert. On appelle *exhaustion* de Ω toute suite croissante $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties compactes de Ω dont les intérieurs recouvrent Ω .

On note $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ le disque unité ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ et $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$.

1. Soit $C \subseteq \Omega$ un compact et $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une exhaustion de Ω . Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $C \subseteq K_N$.
2. Montrer que Δ^* ne possède pas d'exhaustion $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Delta^* \setminus K_n$ soit connexe par arcs.
3. En déduire que Δ et Δ^* ne sont pas homéomorphes, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de bijection continue $\Delta \rightarrow \Delta^*$ de réciproque continue.

★ Exercice 89. *Milieux de points de la sphère unité.*

Mines

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace normé réel de dimension $n \geq 2$. Montrer que tout point x de la boule unité fermée peut s'écrire comme milieu de deux points de la sphère unité.

Exercice 90. *Frontière d'un convexe borné.*

ÉNS

Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie $n \geq 2$ et C une partie non vide, convexe et bornée de E . Montrer que la frontière de C est connexe par arcs.

★ Exercice 91. *Niveaux et extrema.*

ÉNS

Soit $d \geq 2$ et $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}\{c\}$ soit un singleton. Que dire de c ?
2. Supposons qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f^{-1}\{c\}$ soit compact et non vide. Montrer que f admet un extremum global.
3. On suppose que pour tout $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}\{c\}$ est compact. Montrer que $f(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice 92. *Pas de logarithme continu sur $\mathbb{C}^*$.*

Démontrer qu'il n'existe pas d'application $f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ continue telle que $\forall z \in \mathbb{C}^*, \exp f(z) = z$.

Autres formes de connexité

Exercice 93. *Passage des douanes.*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie de E .

1. Soit $f : [0, 1] \rightarrow E$ continue. On suppose que $f(0) \in A$ et $f(1) \notin A$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c)$ soit sur la frontière de A .
2. Soit Γ une partie connexe par arcs de E qui rencontre à la fois l'intérieur de A et celui de son complémentaire. Montrer que Γ rencontre $\text{Fr}(A)$.
3. En déduire que si $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, alors $\text{Fr}(A) \neq \emptyset$.

Δ Exercice 94. *Ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite « lente ».*

X

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite u n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints.

Exercice 95. *Théorème de Darboux par la connexité.*

Soit E un espace vectoriel normé et $C \subseteq E$.

1. On suppose C connexe par arcs. Montrer que toute fonction continue $C \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
2. Soit $C \subseteq \mathbb{R}$ une partie telle que toute fonction continue $C \rightarrow \{0, 1\}$ soit constante. Montrer que C est connexe par arcs.
3. Soit $C \subseteq E$ connexe par arcs et $K \subseteq E$ tel que $C \subseteq K \subseteq \overline{C}$. Montrer que toute fonction continue $K \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.
4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable. En appliquant ce qui précède à $C = \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \mid x \neq y \in \mathbb{R} \right\}$, montrer que l'image $\{f'(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ est un intervalle.

Δ Exercice 96. *Sinusoïde du topologue.*

Soit G le graphe de $f : \begin{cases}]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{cases}$.

1. Montrer que G est connexe par arcs.
2. Décrire $\overline{G}$ et montrer que les seules applications continues $\overline{G} \rightarrow \{0, 1\}$ sont les constantes. (On dit que G est *connexe*).
3. Montrer que $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 97. *Ensembles connexes par chaînes.*

Soit $A \subseteq \mathbb{R}^d$, $x, y \in A$ et $\varepsilon > 0$. Une ε -chaîne joignant x à y dans A est une suite finie

$$x = s_0, s_1, \dots, s_n = y$$

d'éléments de A telle que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \|s_j - s_{j-1}\| \leq \varepsilon$.

La partie A est dite *connexe par chaînes* si pour tous $x, y \in A$ et $\varepsilon > 0$, il existe une ε -chaîne joignant x à y dans A .

1. Montrer que toute partie connexe par arcs A est connexe par chaînes.
2. Donner un exemple de partie fermée de $\mathbb{R}^2$ connexe par chaînes mais pas connexe par arcs.
3. Soit $C \subseteq \mathbb{R}^d$ une partie compacte et connexe par chaînes. Montrer que toute fonction continue $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ est constante.

Un peu de complétude

Les deux premiers exercices de la section doivent être faits en premier et peuvent être librement utilisés dans les suivants.

△ Exercice 98. Complétude par les suites de Cauchy.

Soit E un espace vectoriel normé et $A \subseteq E$.

- Une *suite de Cauchy* à valeurs dans A est une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N, \|x_n - x_m\| \leq \varepsilon.$$

- L'ensemble A est dit *complet* si toute suite de Cauchy à valeurs dans A converge dans A .

1. On suppose $A \subseteq B$ et B complet.

Montrer que A est complet si et seulement si c'est un fermé relatif de B .

2. On suppose E de dimension finie. On veut montrer que E est complet.

- (a) Montrer que toute suite de Cauchy est bornée.
- (b) En déduire que toute suite de Cauchy converge.

♠ Exercice 99. Espaces de Banach.

- Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que E est complet si et seulement si toute série absolument convergente à valeurs dans E est en fait convergente.

On dit dans ce cas que E est un *espace de Banach*.

- Montrer à nouveau que tout espace vectoriel normé de dimension finie est un espace de Banach.

♠ Exercice 100. Théorème du point fixe de Picard.

Soit E un espace de Banach et $X \subseteq E$ fermée non vide.

Soit $f : X \rightarrow X$ une application *contractante*, c'est-à-dire k -lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.

1. Montrer que toute suite récurrente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 \in X$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$ converge.
2. En déduire que f possède un unique point fixe.

Exercice 101. $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ est un espace de Banach.

On munit $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ de sa norme usuelle $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Montrer que toute série absolument convergente dans $\ell^1(\mathbb{C})$ est convergente.

Exercice 102. L'espace de Hilbert séparable.

On munit $H = \ell^2(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ de sa structure préhilbertienne et, notamment, de sa norme $\|\cdot\|$.

1. Montrer que l'espace préhilbertien H est de Banach. (On dit alors qu'il s'agit d'un espace de Hilbert).
2. Montrer que toute forme linéaire continue $H \rightarrow \mathbb{R}$ est le produit scalaire avec un certain vecteur $v \in H$.
3. Plus précisément, montrer que $\varphi : \begin{cases} H \rightarrow \mathcal{L}_c(H, \mathbb{R}) \\ v \mapsto \langle v, \cdot \rangle \end{cases}$ est à la fois un isomorphisme et une isométrie (c'est-à-dire que $\forall v \in H, \|\varphi(v)\| = \|v\|$).

L'exercice qui suit est utilisé dans tous les suivants.

Δ **Exercice 103.** *Lemme de Baire pour les espaces de Banach.*

Soit E un espace de Banach. Dans cet exercice, le mot *boule* signifie tacitement « boule fermée de rayon non nul ».

1. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille décroissante de boules de E dont les rayons tendent vers 0.
Montrer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \emptyset$.
2. Soit $F \subseteq E$ un fermé d'intérieur vide et B une boule de E .
Montrer qu'il existe une boule B' incluse dans B et disjointe de F .
3. **Lemme de Baire.**
 - (a) Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties fermées de E , toutes d'intérieur vide.
Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide.
 - (b) Traduire l'énoncé précédent en termes d'ouverts denses.
4. **Application.** Montrer qu'un espace de Banach ne peut pas avoir de base infinie dénombrable.

★ **Exercice 104.** *Les points de continuité d'une fonction forment un G_δ .*

Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$, on définit l'oscillation de f en a :

$$\omega(a) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\sup_{[a-\delta, a+\delta]} f - \inf_{[a-\delta, a+\delta]} f \right)}_{=\Delta_a(\delta)}.$$

1. Montrer que $\omega(a)$ est un élément de $[0, +\infty]$ bien défini et que $\omega(a) = 0$ si et seulement si f est continue en a .
2. Montrer que l'ensemble $C(f)$ des points de continuité est un G_δ , c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts.
3. À l'aide du lemme de Baire (pour $\mathbb{R}$), montrer que $\mathbb{Q}$ n'est pas un G_δ et en déduire qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $C(f) = \mathbb{Q}$.
4. Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $C(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

★ **Exercice 105.** *Théorème de Banach-Steinhaus par le lemme de Baire.*

Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. On considère une suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$ d'opérateurs continus $E \rightarrow F$ telle que, pour tout $x \in E$, la suite $(T_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \in F^{\mathbb{N}}$ soit bornée (pour la norme subordonnée).

L'objectif est de montrer que la suite d'opérateurs $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}(E, F)^{\mathbb{N}}$ est elle-même bornée.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons $E_k = \{x \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, \|T_n(x)\| \leq k\}$.
Montrer que ces parties de E sont fermées et déterminer $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k$.
2. En utilisant le lemme de Baire, montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $r > 0$ tels que $B_{<r}(0) \subseteq E_{2n}$.
3. Conclure.

Indications

Exercice 1.

- ▶ La compacité de K permet de trouver $\delta > 0$ tel que $K \cap B(0, \delta) = \emptyset$. La convergence $\lambda_n x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ entraîne alors le caractère borné de $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- ▶ Comme souvent, la considération d'une hyperbole dans $\mathbb{R}^2$ est éclairante.

Exercice 2.

1. On pourra raisonner par l'absurde et définir une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ « ε -séparée ».
2. Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, les éléments d'une famille orthonormée ne pourront pas se trouver dans la même boule $\overline{B}(c, \varepsilon)$.

Exercice 3.

1. La compacité est claire. Si l'on fixe un élément $a_n \in K_n$ pour tout n , on notera que $(a_n)_{n \geq n_0}$ est une suite à valeurs dans K_{n_0} .
2. L'une des inclusions est automatique. Pour l'autre, on notera que les « niveaux » $\{x \in K_n \mid f(x) = y\}$ sont compacts.

Exercice 4.

1. (a) On procèdera par l'absurde et on utilisera la négation de l'assertion à montrer pour $\rho = 1/n$ afin de construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans le compact K .
(b) On utilisera la *précompacité* de K : il existe une partie finie $C \subseteq K$ telle que $K \subseteq \bigcup_{c \in C} B(c, \rho)$.
2. Si $u \in K^{\mathbb{N}}$ est une suite et que $x \in K$ n'est pas une valeur d'adhérence de u , il existe un ouvert contenant x mais ne contenant qu'un nombre fini de valeurs de la suite.

Exercice 5. On trouvera la bonne fonction continue et le bon compact à qui appliquer le théorème des bornes atteintes.

Exercice 6. On pourra commencer par réduire au même dénominateur l'expression $\frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)}$.

Exercice 7. Il suffit de montrer que A est borné et fermé. Pour ce dernier point, un éventuel point $a \in \overline{A} \setminus A$ donne facilement naissance à une fonction non bornée.

Exercice 8.

1. On peut revenir à des suites minimisantes, mais le théorème des bornes atteintes, convenablement appliqué, tue la question.
2. En faisant des dessins de courbes (non compactes !) on peut trouver deux fermés de $\mathbb{R}^2$ disjoints mais à distance nulle.

Exercice 9.

1. On peut écrire le graphe de f comme le lieu d'annulation d'une application continue $A \times F \rightarrow F$.
2. L'hyperbole $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 1\}$ est une bonne source de contre-exemples, même s'il faut ici la modifier un peu pour obtenir le graphe d'une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
3. Valeur d'adhérence unique.

Exercice 10. Si $u \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite convergente, on pourra montrer que $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n\}$ est compact.

Exercice 11.

1. Le théorème des accroissements finis permet facilement de comprendre la différence entre les deux conditions sur $A = [0, 1]$.
2. L'unicité est immédiate. Pour l'existence, on peut considérer la fonction $x \mapsto \|f(x) - x\|$.
3. Valeur d'adhérence unique.

Exercice 12.

1. Un calcul direct montre que $k_n = 1 - \frac{1}{n}$ convient.
2. L'application f_n est toujours continue $C \rightarrow C$, par convexité. Une application très classique du lemme de la valeur d'adhérence unique conclut alors.
3. En revenant à la définition de f_n , on voit que f « déplace très peu » x_n , et la compacité permet de conclure.

Exercice 13.

1. Rédaction automatique, en se rappelant que C est convexe.
2. On fixera $a \in C$ et on considèrera la suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Récurrence sur r , en remarquant que l'ensemble des points fixes de u_r dans C est convexe (comme intersection d'un convexe et d'un sous-espace vectoriel), non vide (d'après ce qui précède) et compact. Il sera crucial de noter que si deux endomorphismes commutent, chacun stabilise l'ensemble des points fixes des autres.

Exercice 14.

1. Dans le sens non trivial, on fixe $x \in \ker(u - \text{id}_E)^2$. Montrer $\forall k \in \mathbb{N}, u^k(x) = x + k(u(x) - x)$ par récurrence, ou en effectuant la division euclidienne de X^k par $(X - 1)^2$.
2. Rédaction automatique : il suffit de montrer que les deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe.
3. Grâce aux propriétés de la dimension finie, il suffit de montrer $\forall x \in \ker(u - \text{id}_E), \varphi_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} x$ (trivial) et $\forall x \in \text{im}(u - \text{id}_E), \varphi_p(x) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$ (pas très dur).

Exercice 15. On pourra définir une suite « d'images itérées » : $X_0 = K$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = f[X_n]$, et utiliser le théorème des compacts emboîtés.

Exercice 16. La seule chose non triviale est que f^{-1} soit continue, ce qui peut se faire par caractérisation séquentielle.

Exercice 17.

1. Continuité automatique et théorème des bornes atteintes.
2. Les deux premiers points sont essentiellement immédiats et entraînent $\forall j, \|e_j^*\| \geq 1$. Pour montrer $\|e_1^*\| \leq 1$, on pourra calculer $f(v, e_2, \dots, e_n)$ pour un vecteur v unitaire.

Exercice 18.

1. Tout ensemble dénombrable contient une suite injective.
2. La démonstration de la question précédente donne un exemple fondamental : celui d'une suite et de sa limite. En « greffant » de tels exemples les uns sur les autres, on fabrique facilement un tel exemple. Une autre possibilité est de ne considérer qu'une seule suite, mais possédant un comportement plus compliqué qu'une simple convergence.

Exercice 19.

1. Compacts emboîtés.

2. Si K n'était pas d'intérieur vide, il contiendrait des intervalles non triviaux. Mais K_n ne contient déjà pas d'intervalles de longueur $> 3^{-n}$.
3. On peut par exemple construire cette numérotation de manière récursive, en disant que $S(b_1, b_2, \dots, b_n, 0)$ (resp. $S(b_1, b_2, \dots, b_n, 1)$) est le premier (resp. le troisième) tiers de $S(b_1, b_2, \dots, b_n)$.
Par exemple, $S(0, 0, 1) = [2/27, 1/9]$.
4. D'après le théorème des compacts emboîtés, si $w \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ est un mot infini dont on note w_n le préfixe formé des n premières « lettres », alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} S(w_n)$ est un singleton $\{\varphi(w)\}$.
Il reste à montrer l'injectivité de φ , mais des mots différents de même longueur (finie) ont déjà donné naissance à des segments disjoints.

Exercice 20.

1. On peut essayer d'écrire K comme une intersection de compacts emboîtés (en anticipant sur la dernière question) ou faire une démonstration par extraction diagonale.
Entre deux réels, on en trouve facilement un troisième dont le développement en base 3 est unique et contient un chiffre 1.
2. La non-dénombrabilité est claire. On vérifie par exemple que les « triadiques » (nombres dont le développement en base 3 contient uniquement des zéros à partir d'un certain rang) appartenant à K en forment une partie dense.
3. En notant $\tilde{K}$ l'ensemble de Cantor obtenu par découpage (et $\tilde{K}_n$ ses étapes de construction) on vérifie facilement que $\tilde{K}_n$ est l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ ne possédant pas de 1 parmi leurs n premiers « chiffres » de l'un de leurs développements en base 3 : la subtilité est qu'il faut par exemple prendre en compte le fait que $1/3$ peut s'écrire à la fois 0,1 (ce qui semble l'exclure de $\tilde{K}_1$) mais aussi 0,02222222... (ce qui montre qu'il appartient en fait à K).

Exercice 21. Comme $\deg P \geq 2$, on peut vérifier que les points z suffisamment loin de l'origine vérifient $|P(z)| \geq 2|z|$ et sont donc « éjectés » vers l'infini. On a ainsi trouvé un rayon $R > 0$ tel que $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(P \circ \dots \circ P)}_{n \text{ fois}}^{-1}[\overline{B}(0, R)]$, ce qui finira par montrer le caractère fermé de K .

Exercice 22.

1. Extraction diagonale.
2. On peut utiliser la construction de K par développements triadiques.

Exercice 23.

1. L'inclusion $E_w \subseteq \ell^1(\mathbb{N})$ vient du fait que la suite w possède un minimum.
On peut montrer que le sous-espace vectoriel c_{00} des suites presque nulles est déjà dense dans $\ell^1(\mathbb{N})$.
2. Extraction diagonale.

Exercice 24.

1. Extraction diagonale en « discrétisant » le segment $[0, 1]$.
2. On pourra considérer les fonctions de K affines sur chaque $[k/m, (k+1)/m]$, de pente ± 1 .

Exercice 25. L'ensemble des rayons r tels qu'il existe une boule $B(a, r)$ incluse dans Ω est non vide et majoré, donc il admet une borne supérieure ρ . L'hypothèse force alors $\forall x, y \in \Omega, \|x - y\| < 2\rho$.

Diverses caractérisations séquentielles permettent de trouver un centre tel que $B(a, \rho) \subseteq \Omega$. La majoration du paragraphe précédent permet alors de montrer $\Omega \subseteq \overline{B}(a, \rho)$ et on a presque fini.

Exercice 26. L'hypothèse asymptotique permet de se ramener à une (grande) boule $\overline{B}(0, R)$, sur laquelle le théorème de Heine et le théorème des bornes atteintes finissent le travail.

Exercice 27. La somme infinie peut faire peur, mais les boules $\overline{B}(e_k, 1/2)$ sont disjointes (et même nettement séparées) donc la continuité en tout point est presque évidente par opérations.

La fonction φ est même nulle en-dehors d'une boule et elle vérifie pourtant $\varphi(e_k) = k$.

Exercice 28. Extraction diagonale.

Exercice 29. Soit $\varepsilon > 0$: si la suite u n'était pas à valeurs dans $\overline{B}(\ell, \varepsilon)$ à partir d'un certain rang, on pourrait lui trouver une deuxième valeur d'adhérence dans le compact $f[\overline{B}(\ell, \varepsilon)] \setminus B(\ell, \varepsilon)$.

Exercice 30.

1. La bonne définition vient du théorème des bornes atteintes. Il est par ailleurs clair que M est croissante. On pourra montrer la continuité de M en comparant les limites à droite et à gauche en un point r .
2. Rédaction automatique.

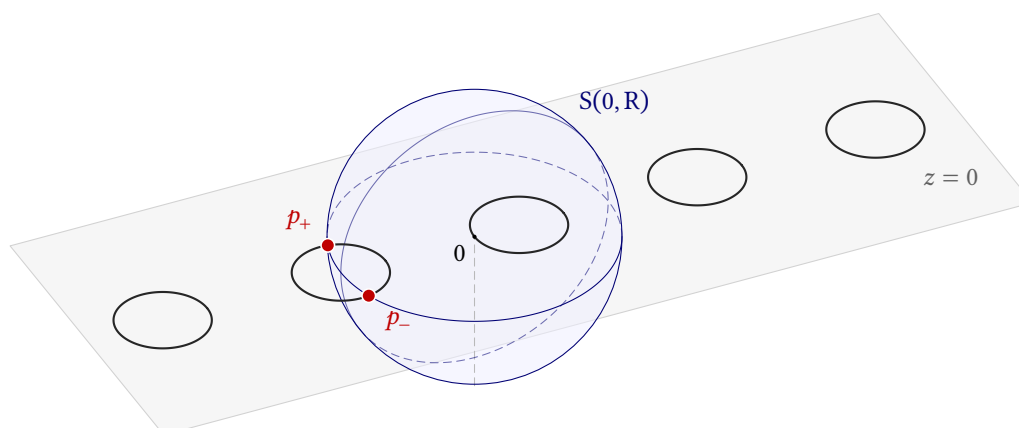
Exercice 31.

1. L'adhérence de l'orbite est un fermé invariant.
2. Notons B la boule unité fermée. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, l'union $\bigcup_{k=0}^p f^k[B]$ est un compact, qui ne saurait donc contenir l'orbite de tous les points de B (à cause de la question précédente). Il faut donc que certains points de B s'aventurent arbitrairement longtemps hors de B .
3. En notant x_p un point vérifiant les hypothèses de la question précédente, la locale compacité de E nous permet de trouver une valeur d'adhérence x_∞ à $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$. On montre alors que l'orbite de x_∞ quitte immédiatement la boule unité (ouverte) de E pour ne plus jamais y revenir, ce qui est impossible.

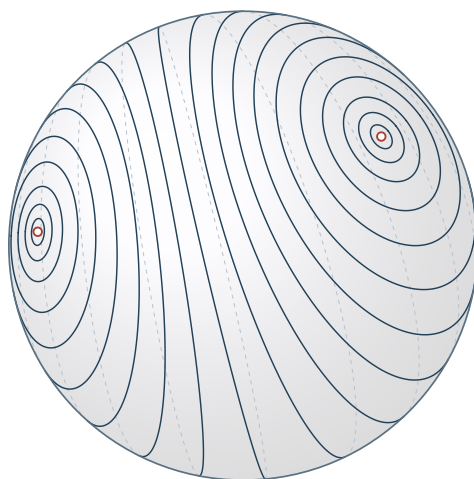
Exercice 32. On pourra considérer deux points $a, b \in K$ à distance maximale l'un de l'autre. Le centre s correspondant à un triplet $(a, b, ?)$ est alors fixé.

Exercice 33.

2. On itère la construction actuelle, et on applique le théorème des compacts emboîtés aux disques dont les cercles successifs sont les frontières.
3. C'est étonnamment possible, mais très futé !
On enlève les cercles horizontaux, de centres $(4k + 1, 0, 0)$ ($k \in \mathbb{Z}$) et de rayon 1 : on obtient ainsi une famille de cercles dont l'union possède l'étonnante propriété de rencontrer toute sphère centrée en 0 en deux points exactement.



Il ne reste plus qu'à partitionner en cercles une sphère privée de deux points quelconques.



Exercice 34. On montrera plutôt que le complémentaire est fermé. Si une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $S^p \setminus \Omega_p$ converge vers un élément $X \in S^p$, on peut fixer pour tout $n \in \mathbb{N}$ un demi-espace fermé $H(f_n)$ contenant les coordonnées de X_n .

Un argument de normalisation, puis de compacité, permet alors de « faire comme si » $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait vers une forme linéaire non nulle f . Il reste alors à montrer que toutes les coordonnées de X appartiennent à $H(f)$.

Exercice 35. On peut fixer une « origine » $o \in A$ et considérer une suite non bornée $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A dont la norme tend vers $+\infty$. L'objectif est d'utiliser un argument de compacité pour expliquer qu'une sous-suite de la suite des segments $[o, a_n]$ va « converger vers une demi-droite ».

Concrètement, la compacité ne s'utilisera pas dans un espace de parties de A , mais dans l'espace des « directions » des segments, qui est un objet connu.

Exercice 36.

1. Pour tout point $a \in E$, il existe un rayon minimal $r(a)$ tel que $K \subseteq B(a, r(a))$. Il reste à montrer que cette fonction r possède un minimum, ce qui est un argument d'*extremum* assez classique dans ce contexte de dimension finie.
2. Vu la question suivante, il faut choisir un exemple de norme non euclidienne. Il est tout à fait possible d'en trouver avec des normes classiques sur $\mathbb{R}^2$.
3. Pour une norme euclidienne, la fonction r^2 possède une propriété de convexité forte (il est possible de relier $r\left(\frac{a+b}{2}\right)$ à $r(a)$ et $r(b)$) qui garantit cette unicité.
4. L'application f stabilisera la boule (fermée) B dont parle la question précédente. On en déduira $f[B] = B$, puis que le centre de B est un point fixe de f .

Exercice 37. Si F ne rencontrait pas la diagonale, les parties $F_- = \{(x, y) \in F \mid y < x\}$ et F_+ (*idem* avec l'autre inégalité) seraient deux compacts disjoints.

Les propriétés de « séparation » entre compacts contrediraient alors l'hypothèse.

Curieusement, il ne semble pas possible de faire une démonstration de ce résultat en utilisant des idées de connexité par arcs.

Exercice 38. L'hypothèse asymptotique permet de se ramener à une grande boule $\overline{B}(0, R)$, et le théorème des bornes atteintes conclut alors.

Exercice 39. C'est un problème de distance à un fermé (que l'on identifiera) dans un espace vectoriel normé de dimension finie (que l'on identifiera aussi).

Exercice 40.

1. C'est un problème de distance à un fermé dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
2. La décroissance n'est pas complètement évidente parce que $A_n \not\subset A_{n+1}$, mais on trouve sans difficulté une recette associant à un certain polynôme $P \in A_n$ un autre polynôme $Q \in A_{n+1}$ dont la norme L^1 est plus petite.

Exercice 41.

1. Unicité par rigidité, existence par récurrence sur le degré (ce qui a l'avantage de donner une relation de récurrence exploitable) ou en « délinéarisant » courageusement $\cos(n\theta)$. Vous devez savoir faire ça même réveillés par une alarme incendie à 3h du matin.
Le terme dominant de T_n est $2^{n-1}X^n$.
2. Il existe par des arguments généraux de distance à un fermé en dimension finie un polynôme unitaire $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n minimisant $\|P\|$. En étudiant le signe de $P - 2^{1-n}T_n$ sur les x_k , on obtient par rigidité $P = 2^{1-n}T_n$.

Exercice 42.

1. C'est un problème de distance à un fermé dans un espace vectoriel normé de dimension finie.
2. On peut supposer que f n'est pas la fonction polynomiale associée à un polynôme de degré $\leq n$.
Par uniforme continuité, on peut découper $[-1, 1]$ en sous-segments trop courts pour contenir deux points successifs d'une famille alternante pour $f - P$. Cela permet de trier les sous-segments entre des segments positifs, neutres, ou négatifs, de telle sorte que deux segments de signes opposés soient séparés par au moins un segment neutre.
Si le nombre d'alternances de signes (de segments) est trop faible, on peut alors fabriquer un polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ dont les signes sont prescrits pour que $P + \delta Q$ soit une meilleure approximation de f sur le segment $[-1, 1]$.
3. Si P et Q sont deux solutions, leur moyenne $M = \frac{P+Q}{2}$ convient aussi. Une famille alternante pour $f - M$ est alors nécessairement alternante à la fois pour $f - P$ et $f - Q$, ce qui force P et Q à coïncider trop souvent.
4. Supposons par l'absurde que $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ est tel que $\|f - Q\|_\infty < \|f - P\|_\infty$. En comparant les valeurs de P et Q aux points d'une famille alternante pour $f - P$, on obtient d'après le théorème des valeurs intermédiaires suffisamment de points d'annulation de $P - Q$ pour aboutir à une contradiction.

Exercice 43.

1. F est définie à l'aide de formes linéaires continues pour la norme uniforme.
2. On voit facilement que $d(0, F) = 1$. Si l'on relâchait les hypothèses $f(0) = f(1) = 0$, on voit par stricte positivité de l'intégrale que la distance serait atteinte en $f = 1$, et seulement en ce point.

Exercice 44.

1. C'est un problème de distance à un fermé.
2. On peut par exemple faire une démonstration epsilonesque et utiliser le point $(\varepsilon, \cos^n \varepsilon) \in \Gamma_n$ pour majorer d_n par 2ε à partir d'un certain rang.
3. On a $d_n = \sqrt{x_n^2 + \cos^{2n}(x_n)}$, où le point x_n minimise une certaine quantité. Une étude de fonction permet d'en déduire la relation implicite $x_n = n \cos^{2n-1}(x_n) \sin(x_n)$ et c'est alors du calcul asymptotique bête et méchant.

Exercice 45. E est un espace de dimension finie (pourquoi?) sur lequel toutes les normes sont donc équivalentes.

Exercice 46.

1. Continuité automatique en dimension finie.
2. On peut par exemple construire une norme à partir des coefficients qui se comporte de manière très différente sur les degrés pairs et impairs.

Exercice 47. On pourra par exemple vérifier que $x \mapsto \|v(x)\|$ est une norme sur E .

Exercice 48. Le sens réciproque est tautologique.

Dans le sens direct, on pourra par exemple fixer un supplémentaire S de $\ker f = \ker f^2$ et comparer des normes définies sur ce sous-espace.

Exercice 49. Le sens réciproque est immédiat si on se souvient que les sous-espaces vectoriels sont presque toujours d'intérieur vide.

Dans le sens direct, on pourra commencer par montrer qu'une application de projection $\pi : \begin{cases} \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, y) \mapsto x \end{cases}$ est bel et bien ouverte. Le théorème du rang montre entre autres que toute application linéaire surjective $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est essentiellement équivalente à ce modèle π , et les divers théorèmes de topologie en dimension finie permettent alors de voir que l'ouverture de π se traduira en celle de f .

Exercice 50. Continuité (automatique) du produit matriciel.

Exercice 51. Par l'identification usuelle de $\mathbb{C}$ à une sous-algèbre de $M_2(\mathbb{R})$, on se rend compte qu'il s'agit d'un calcul bien connu : $\left(1 + \frac{\theta}{n}i\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{i\theta}$. On peut rendre rigoureux ce passage par les complexes en étudiant les propriétés topologiques de l'isomorphisme $a + ib \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 52. On peut se ramener au cas $E = K^d$ ($d \geq n$) et montrer que l'ensemble $\{A \in M_{d,n}(K) \mid \operatorname{rg} A = n\}$ est ouvert, en vérifiant que son complémentaire est le lieu d'annulation commun de diverses applications polynomiales (déterminants de sous-matrices).

Exercice 53.

1. On peut écrire KA comme une (grosse) union d'ouverts.
2. Passer par la caractérisation séquentielle.
3. La réponse est non, même si A est un singleton.

Exercice 54. On montre facilement qu'un tel sous-groupe G est inclus dans $\mathbb{U}$. En notant $\pi : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{U} \\ t \mapsto e^{it} \end{cases}$, qui est à la fois une application continue et un morphisme de groupes, on peut alors étudier $\tilde{G} = \pi^{-1}[G]$, qui est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$. Il y en a peu !

Exercice 55.

1. Facile. Les applications $x \mapsto a + x$ (pour $a \in L$) sont des applications continues, bijectives, d'inverse continu : elles permettent de déplacer en 0 tout « problème » dans L .
2. Par récurrence sur $\dim \operatorname{Vect}(L)$. Dans l'hérédité, on trouve facilement une droite D contenant des vecteurs non triviaux de L . Si H est un supplémentaire de cette droite, on ne raisonnera pas avec $L \cap H$ (qui pourrait « manquer » plein de vecteurs du réseau), mais avec $p[L]$, où p est le projecteur sur H parallèlement à D . Essentiellement, si l'on sait montrer que ce sous-groupe « projeté » est encore discret, la démonstration s'écrit toute seule.

Exercice 56.

1. Un élément de $B(1, 1)$ s'écrit $1+h$, avec $\|h\| < 1$. La série géométrique $\sum_n h^n$ (convergente car absolument convergente), ou plutôt l'une de ses variantes, permet de construire un inverse à $1+h$.
2. On déduit de la question précédente que pour tout $a \in A^\times$, $aB(1, 1) \subseteq A^\times$.

Exercice 57.

1. On pourra considérer la borne supérieure de l'ensemble S des $s \in [0, 1]$ tels qu'une sous famille finie de $\mathcal{U}$ recouvre déjà $[0, s]$.
2. Rédaction automatique, ou passer par le fait que $\mathfrak{m}_a$ est le noyau d'un morphisme d'anneaux dont l'image est un corps.
3. On montre que le seul idéal I de A qui ne soit pas inclus dans un $\mathfrak{m}_a$ est l'anneau tout entier. On peut en effet trouver dans un tel idéal (grâce à la propriété de Borel-Lebesgue) une famille finie de fonctions $f_1, \dots, f_r \in I$ n'ayant aucun zéro en commun. On peut alors trouver (comment ?) un élément $F \in I$ ne s'annulant jamais, ce qui conclut (pourquoi ?).

Exercice 58.

1. Le sens direct est assez clair. Dans le sens réciproque, on utilise l'hypothèse asymptotique pour se ramener à une grande boule $\overline{B}(0, R) \subseteq E$.
2. Caractérisation séquentielle, en utilisant le fait qu'une suite convergente est bornée, et donc ici à valeurs dans un compact.
3. Les bornes type « bornes de Cauchy » permettent d'utiliser la première question. Le caractère fermé des polynômes scindés s'en déduit immédiatement.

Exercice 59. Les inégalités type « borne de Cauchy » montrent qu'une suite de polynômes unitaires de degré fixé est bornée si et seulement si ses racines restent confinées dans une région bornée de l'espace. Cette condition est stable par passage à un diviseur.

Exercice 60.

1. Même si la condition est bizarre, elle est immédiate en revenant à une factorisation de P .
2. La question 1 permet d'écrire l'ensemble comme une (grosse) intersection de fermés.

Exercice 61.

1. $P \mapsto P(X+a)$ est un automorphisme de $K_n[X]$ préservant les polynômes unitaires. Par continuité automatique, lui et sa réciproque sont continus. On peut donc se contenter de montrer le résultat pour $\zeta = 0$, où il est assez facile grâce aux relations coefficients-racines.
2. (i) C'est un sous-espace affine (réel) : il est automatiquement fermé, d'intérieur vide.
 (ii) La première question permet de montrer son caractère ouvert. On montre facilement à la main qu'il est dense.
 (iii) Il s'agit de l'intersection de $A_n^{\mathbb{R}}$ et de l'exemple précédent, donc il hérite du caractère ouvert (relatif).
 Le caractère dense se fait à la main, comme dans le cas complexe.
 (iv) Un polynôme réel scindé à racines simples présente une alternance de signes : on va trouver $x_0 < x_1 < \dots < x_n \in \mathbb{R}$ tel que les signes de $P(x_j)$ alternent (au sens strict : $P(x_j)P(x_{j+1}) < 0$). Cela montre que les polynômes proches garderont la propriété, si bien que l'ensemble est ouvert.
 Je tempore avant de traiter la question de son adhérence.
 (v) La première question montre que la présence d'une racine non réelle persiste quand on perturbe un polynôme réel non scindé, ce qui montre que les polynômes non scindés forment une partie ouverte, et donc que les polynômes scindés forment une partie fermée.

En notant SRS (resp. S) l'ensemble des polynômes scindés à racines simples (respectivement scindés), on a obtenu aux deux dernières questions que SRS était ouvert, que S est fermé, et il est clair que $\text{SRS} \subseteq S$. On a ainsi automatiquement $\text{SRS} \subseteq \dot{S}$ et $\overline{\text{SRS}} \subseteq S$.

Il est facile de perturber un polynôme scindé pour rendre ses racines différentes. Cela montre l'inclusion manquante de $\overline{\text{SRS}} = S$.

Si un polynôme possède une racine multiple réelle t , il est possible de le perturber pour créer deux racines complexes conjuguées proches $t \pm i\varepsilon$. Cela montre l'inclusion manquante de $\text{SRS} = \dot{S}$.

Exercice 62.

1. Caractérisation séquentielle : on a $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ avec des notations implicites.
Le fait que $|f(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$ montre que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, ce qui ouvre la voie à des arguments de compacité.
2. On peut montrer que son complémentaire est fermé, en appliquant un argument de compacité à « tous » les antécédents par f d'un nombre complexe donné.

Exercice 63.

1. (a) Bornes atteintes.
(b) Si $z \in K$ est un point de module m , les points $z^2 \pm z + 1$ sont de module $\leq m$ et à distance $2m$ l'un de l'autre ce qui rigidifie complètement la situation.
(c) On pourra regarder les points de K les plus proches possibles de 1.
2. On vérifiera que $\overline{B}$ vérifie les hypothèses de la question 1, sauf dans un cas vraiment stupide.

Exercice 64.

1. Pour la première question, on pourra écrire $P = (1 + X)^2 Q$ et examiner le plus grand coefficient de Q et les deux coefficients voisins (en remarquant qu'ils sont tous positifs).
2. Pour la deuxième question, on pourra procéder par récurrence en écrivant $P = a_0 + XQ$ et en faisant croître h de 0 à a_0 dans $P_h = XQ + h$: les racines ne peuvent pas « sortir de $\mathbb{R}$ » sans devenir d'abord multiples, ce qu'interdit la question 1 (appliquée à $P_h(\lambda X)$).

Exercice 65.

1. On pourra considérer les diverses suites $e_k = (\mathbb{1}_{n=k})_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Linéarisation.

Exercice 66.

1. On s'inspirera du cas euclidien (avec des dessins !) où il suffirait de prendre un vecteur de norme 1 dans $Y^\perp$. L'orthogonalité n'a plus de sens dans ce cas général, mais on peut chercher à prendre un point en dehors de Y et à le relier de façon (presque) optimale à un élément de Y .
2. Par récurrence, en utilisant le fait que $\text{Vect}(x_0, \dots, x_n)$ est automatiquement fermé.
3. On cherchera des fonctions à supports disjoints.

Exercice 67.

1. Y est le noyau d'une forme linéaire continue.
2. On obtient $d(f, Y) = \left| \int_0^1 f \right|$, l'inégalité $\geq$ provenant simplement du « contrôle uniforme de l'intégrale » :

$$\left| \int_0^1 f \right| \leq \|f\|_\infty.$$

3. Si f est continue, non nulle, et nulle en 0, l'inégalité $\left| \int_0^1 f \right| \leq \|f\|_\infty$ ne peut pas être une égalité.

Exercice 68. Quitte à traduire et dilater, il suffit de montrer par exemple que $B(0, 1) \not\subset K$. Supposons au contraire que K contienne cette boule unité.

Pour tout vecteur unitaire u , on trouve alors un rayon $\rho(u) \geq 1$ tel que $\rho(u)u \in \text{Fr}(K)$, ce qui permet de définir une application continue surjective $\text{Fr}(K) \rightarrow S(0, 1)$. La sphère unité est donc compacte.

Si E est préhilbertien, la considération d'une famille infinie orthonormée conclut la démonstration. Dans le cas général, on a besoin du théorème de Riesz (hors programme).

Exercice 69.

1. Rédaction automatique.
2. Faire un dessin.
3. Faire un dessin.
4. La question précédente traite l'un des cas. Dans l'autre, on peut « prolonger » un peu le segment $[a, x]$ au-delà de x .

Exercice 70. En traduisant, on peut supposer $0 \in C$, si bien que le plus petit sous-espace affine dont parle l'énoncé est simplement $\text{Vect}(C)$. En se restreignant à ce sous-espace vectoriel, il s'agit donc de montrer que si C contient 0 et une base de E , il est d'intérieur non vide.

Exercice 71.

1. Application directe de $\|\varphi\| \leq 1$ et de l'inégalité triangulaire.
2. Par récurrence, il suffit de savoir prolonger φ à $F + \text{Vect}(a)$ pour un certain élément $a \notin F$ sans augmenter la norme subordonnée.
Un tel prolongement est entièrement déterminé par la valeur $\lambda = \tilde{\varphi}(a)$. Pour que ce prolongement n'ait pas une norme $> \|\varphi\|$, il faut que λ appartienne à un certain intervalle, dont la question précédente garantira la non-vacuité.
3. On définit une forme linéaire intelligente sur $\text{Vect}(x)$, que l'on prolonge à l'aide de la question précédente.

Exercice 72.

1. Rédaction automatique.
2. Soit $a \in H(p_0, \dots, p_k)$. En combinant linéairement l'écriture de a comme combinaison convexe des p_i et la relation de liaison non triviale de l'énoncé, on obtient une « famille à un paramètre » d'écritures de a . Toutes ne sont pas des combinaisons convexes (les coefficients peuvent devenir négatifs) mais « au moment » où l'un d'entre eux devient négatif, on a une écriture ne mettant pas en jeu tous les p_i .
3. Étant donné $n + 2$ vecteurs en dimension n , on possède nécessairement une relation non triviale dont la somme des coefficients est nulle.
4. L'image continue d'un compact est compacte.

Exercice 73.

1. L'existence est générale : c'est un problème de distance à un fermé. Pour l'unicité, on a besoin d'utiliser explicitement que la norme est euclidienne, en faisant intervenir les produits scalaires.
2. Pour $u \in C$, la fonction $t \mapsto \|x - ((1-t)y + tu)\|^2$ est minimale (sur $[0, 1]$) quand $t = 0$.

Exercice 74. Non. Le passage à l'intérieur peut détruire des liaisons vitales. Faire un dessin.

Exercice 75. Penser au symbole du yin et du yang, mais le rendre beaucoup plus énervé pour que le cercle

extérieur soit dans la frontière commune.

Exercice 76. Si l'on fabrique une famille indénombrable de chemins dans $\mathbb{R}^2$ entre a et b disjoints (sauf en leurs extrémités, évidemment), une partie dénombrable ne peut pas tous les détruire simultanément.

Exercice 77.

1. Il s'agit du complémentaire d'un ensemble fini. Faire des dessins.
2. On se ramènera à la question précédente à l'aide de droites affines (complexes).
3. Bien sûr que non !

Exercice 79. Rédaction automatique.

Exercice 80.

1. Les boules sont convexes, et donc connexes par arcs.
2. On peut trouver un élément $r \in \mathbb{Q}^d$ dans chaque composante connexe par arcs.

Exercice 81. Non si « dénombrable » veut dire « infini dénombrable » : une application continue $f : [0, 1] \rightarrow D$ avec D dénombrable est nécessairement constante (même si ça n'est pas si facile à montrer quand D n'est pas une partie de $\mathbb{R}$). On peut se ramener à ce cas en considérant des fonctions $t \mapsto \|f(t) - a\|$.

Exercice 82. Il existe une fonction continue $X \rightarrow [0, 1]$ envoyant α sur 0 et ω sur 1 (à l'aide par exemple de distances), et on peut utiliser directement la définition des connexes par arcs.

Exercice 84. Oui mais, pour le coup, faire un dessin n'aide pas trop. On pourra chercher à prendre un ensemble D tout petit ($\mathbb{Q}^3$ n'est pas connexe par arcs, mais on peut par exemple essayer de le rendre connexe par arcs en ajoutant relativement peu de points).

Exercice 85. Penser à la trace.

Exercice 86.

1. Si $\text{rg } p > \text{rg } q$, la restriction de q à $\text{im } p$ ne peut pas être injective.
2. Soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ un chemin continu. Le théorème de Heine et la question précédente montrent que $\text{rg} \circ \gamma$ est constant.

Exercice 87.

2. Deux espaces homéomorphes sont soit tous les deux connexes par arcs, soit tous les deux non connexes par arcs.

Exercice 88.

1. Procéder par l'absurde, et donner naissance à une suite.
2. Appliquer la question précédente au cercle C de centre 0 et de rayon $1/2$.
3. Deux ensembles homéomorphes ont les mêmes propriétés topologiques. Parmi les propriétés topologiques : avoir (ou pas) une exhaustion par des compacts dont les complémentaires sont connexes par arcs.

Exercice 89. On appliquera de manière créative le théorème des valeurs intermédiaires sur la sphère.

Exercice 91. À chaque fois, c'est la propriété de connexité d'un certain complémentaire qui nous sauve la mise : le complémentaire d'un singleton est connexe par arcs, et la partie du complémentaire d'un compact située suffisamment loin de l'origine aussi.

Exercice 92. On obtiendrait une application (nécessairement continue) $n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $f(e^{i\theta}) = i\theta + i2\pi n(\theta)$. Une telle application est nécessairement constante, mais l'assertion précédente est alors contradictoire.

Exercice 93.

1. On pourra essayer de donner naissance au « dernier moment » où f est dans A .
2. Application directe de la question précédente.
3. E lui-même est connexe par arcs.

Exercice 94. Si c'était le cas, il serait possible de créer une « zone démilitarisée » compacte d'une certaine épaisseur entre les deux fermés, et la lenteur de la suite la forcerait à passer une infinité de fois dans cette zone démilitarisée, créant une valeur d'adhérence problématique.

Exercice 96.

1. C'est l'image continue d'un connexe par arcs.
2. Le montrer d'abord sur G (en utilisant la connexité par arcs), et conclure par densité.
3. Supposer qu'il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow \overline{G}$ reliant $(0, 0)$ à $(1, \sin(1))$. Construire « le dernier instant » c où $\gamma(c)$ est d'abscisse nulle, puis montrer qu'il existe une suite $(x_n^\pm)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers c telle que $\gamma(x_n^\pm)$ appartienne à la droite $y = \pm 1$ et aboutir à une contradiction.

Exercice 97.

1. Utiliser un chemin et le théorème de Heine.
2. Le contre-exemple officiel : une hyperbole !
3. Pourquoi tant de Heine ?

Exercice 98.

1. Rédaction automatique.
2. On montrera qu'une suite de Cauchy possédant une valeur d'adhérence converge.

Exercice 99. Un sens est facile : les sommes partielles d'une série absolument convergente forment une suite de Cauchy. Dans l'autre sens, il faut être prêt à utiliser une extractrice pour aggraver le ralentissement de la suite. Heureusement, une suite de Cauchy converge dès qu'elle possède une sous-suite convergente.

Exercice 100. On peut montrer à la main qu'il s'agit d'une suite de Cauchy, ou utiliser le lien suite-série en remarquant que $\sum_n (x_{n+1} - x_n)$ est absolument convergente.

Exercice 101.

- ▶ Coordonnée par coordonnée, on obtient une série complexe absolument convergente, donc convergente, ce qui définit une suite-somme.
- ▶ La théorie des familles sommables montre que la suite-somme est elle-même dans $\ell^1(\mathbb{C})$.
- ▶ Il reste à montrer que la série converge bel et bien au sens de la norme ℓ^1 . Le fait que le « reste absolu » $\sum_{k=n}^{+\infty} |u_k|$ d'une famille sommable $u \in \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ puisse être rendu aussi petit que nécessaire est utile.

Exercice 102. La première question n'est pas directement utilisée dans les suivantes : la construction de v se fait complètement à la main.

Exercice 103. Dans la première question, on pourra commencer par supposer la suite des rayons sommables.

Exercice 104.

2. D'après la question précédente, $C(f) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \{a \in \mathbb{R} \mid \omega(a) < 2^{-p}\}$.
3. Si $\mathbb{Q}$ était une intersection dénombrable d'ouverts, ce serait une intersection dénombrable d'ouverts denses. Or, le lemme de Baire entraîne que la classe des G_δ denses est stable par intersection. Et, pour le coup, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est bel et bien un G_δ .
4. Un exemple très classique est la *fonction de Thomae* (ou *pop-corn function*) envoyant p/q (sous forme irréductible) sur $1/q$ et les irrationnels sur 0.

Exercice 105. Pour la deuxième question, on pourra remarquer que $\forall x_1, x_2 \in E_n, x_1 - x_2 \in E_{2n}$.