

Espaces vectoriels normés

Conventions du TD :

- ▶ Si la lettre E est utilisée sans définition dans un exercice, il s'agit d'un espace vectoriel normé dont la norme est notée $\|\cdot\|$. Il est même possible que, tacitement, E soit supposé non réduit à $\{0_E\}$.
- ▶ La boule ouverte de centre a et de rayon r est notée $B(a, r)$, et la boule fermée de centre a et de rayon r est notée $B_f(a, r)$ ou $\bar{B}(a, r)$. Diverses décorations pourront être ajoutées pour préciser la norme sous-entendue.

Normes

$$\mathbb{K}^d$$

Exercice 1. Norme sur $\mathbb{R}^2$ induite par deux vecteurs.

Soit $x, y \in E$ deux vecteurs. On définit $N : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (\alpha, \beta) & \mapsto & \|\alpha x + \beta y\|. \end{cases}$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur x et y pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^2$.

♠★ **Exercice 2.** Normes ℓ^p sur $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $p \geq 1$. Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$.
Montrer que $\|\cdot\|_p$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Déterminer la limite de $\|x\|_p$ quand $p \rightarrow +\infty$?
3. Soit $p, q \in [1, +\infty]$. Déterminer la plus petite constante C telle que $\forall x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p \leq C \|x\|_q$.

Espaces de suites

Exercice 3. Norme de Lipschitz sur c_0 .

Soit $E = \left\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \right\}$. Pour $u \in E$, on pose $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_{n+1} - u_n|$.

Montrer que cela définit une norme sur E , non équivalente à la norme uniforme.

Exercice 4. Norme bv sur c_{00} .

On note E l'espace vectoriel des suites réelles nulles à partir d'un certain rang.

Pour $u \in E$, on note $\|u\| = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k - u_{k+1}|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur E .
2. Montrer que $\|\cdot\|$ domine la norme uniforme.
3. Lui est-elle équivalente ?

Espaces de fonctions

Exercice 5. *Semi-normes uniformes sur un sous-espace de dimension finie.*

Soit $E = C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose $N_p(f) = \sup_{x \in [-p, p]} |f(x)|$.

Montrer qu'il existe un entier p_0 tel que N_{p_0} soit une norme sur F .

Δ **Exercice 6.** *Norme uniforme à poids.*

X

Soit $I = [a, b]$ un segment non trivial, $E = C^0(I, \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On pose, pour $f \in E$, $N(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante (sur φ) pour que N soit une norme sur E .
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ domine N .
3. À quelle condition N est-elle équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?

Δ **Exercice 7.** *Norme L^1 à poids.*

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $g \in E$, on définit $N_g(f) = \int_0^1 |f(t)g(t)| dt$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Montrer que $\|\cdot\|_\infty$ domine N_g .
3. Existe-t-il $g \in E$ telle que N_g soit équivalente à $\|\cdot\|_\infty$?
4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à $\|\cdot\|_1$.

Exercice 8. *Deux normes équivalentes sur C^1 .*

Montrer que $N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$ et $N_2(f) = \|f\|_1 + \|f'\|_\infty$ définissent des normes équivalentes sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

Exercice 9. *Norme via un opérateur différentiel.*

1. Montrer que $N : f \mapsto |f(0)| + \|f' - f\|_\infty$ définit une norme sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$.
2. La même formule définit-elle une norme sur l'espace $\mathcal{D}([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions dérivables sur $[0, 1]$?
3. Comparer N avec $\|\cdot\|_\infty$ sur $C^1([0, 1], \mathbb{R})$.

$\spadesuit$ **Exercice 10.** *Comparaison des normes L^p sur un segment.*

Pour tout $p \in [1, +\infty[$, on note $\|\cdot\|_p$ la norme L^p sur $E = C^0([a, b]; \mathbb{C})$, définie par

$$\forall f \in E, \|f\|_p = \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p}.$$

Soit $p, q \in [1, +\infty[$ tels que $p < q$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_q$ domine $\|\cdot\|_p$.
2. Montrer qu'en revanche, $\|\cdot\|_p$ ne domine pas $\|\cdot\|_q$.
3. Que deviennent ces résultats quand on autorise le cas $p = \infty$ (c'est-à-dire celui de la norme uniforme) ?

Δ Exercice 11. Norme uniforme sur une suite de points.

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0, 1]$. Pour $f \in C^0([0, 1])$, on note $\|f\|_a = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |f(a_n)|$.

1. À quelle condition $\|\cdot\|$ est-elle une norme sur $C^0([0, 1])$?
2. Que peut-on dire dans ce cas?

★ Exercice 12. Ceci n'est pas la norme L^1 .

Pour $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, on note $\|f\| = \sup_{J \subseteq [0, 1]} \left| \int_J f \right|$, où la borne supérieure porte sur les segments $J \subseteq [0, 1]$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.
2. La comparer aux normes uniforme et L^1 .
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall f, g \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \quad f \text{ monotone} \implies \left| \int_0^1 fg \right| \leq C \|f\|_\infty \|g\|.$$

★ Exercice 13. Un (cas particulier d'un) théorème de Grothendieck (1954).

Soit $V \subseteq C^0([0, 1])$ un sous-espace vectoriel et $A > 0$ tels que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq A \|f\|_2$.

1. Montrer que V est strictement inclus dans $C^0([0, 1])$.
2. Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une famille orthonormée de V .

(a) Pour tous $c_1, \dots, c_p \in \mathbb{R}$, majorer $\left\| \sum_{i=1}^p c_i f_i \right\|_\infty$ en fonction de $\sum_{i=1}^p c_i^2$.

(b) En déduire que $\sum_{i=1}^p f_i^2 \leq A^2$.

3. Dédurre de la question précédente que V est de dimension finie et que $\dim V \leq A^2$.
4. Montrer que pour tout n , il existe un sous-espace vectoriel $V \subseteq C_{\text{pm}}^0([0, 1])$ de dimension n et tel que $\forall f \in V, \|f\|_\infty \leq \sqrt{n} \|f\|_2$.

Espaces de polynômes

Exercice 14. Norme uniforme sur une partie.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour $P \in E$, on pose $N(P) = \sup_{x \in A} |P(x)|$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que N soit bien définie, puis pour que N soit une norme sur E .

Exercice 15. Normes pondérées sur $\mathbb{R}[X]$.

Soit $\lambda = (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs. Pour $P = \sum_{k \in \mathbb{N}} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$N_\lambda(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k |a_k|.$$

1. Justifier que N_λ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\mu = (\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une autre suite de réels strictement positifs. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que les normes N_λ et N_μ soient équivalentes.

♠★ **Exercice 16.** *Principe du maximum pour les polynômes complexes.*

Centrale

On note $\bar{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$. Pour $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\|P\| = \max\{|P(z)| \mid z \in \bar{\Delta}\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{C}[X]$.
2. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que $|P(0)| \leq \|P\|$.
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 , $z_0 \in \mathbb{C}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Établir l'existence de $c \in \mathbb{C}$ et $q \in \mathbb{N}$ tels que

$$P(z_0 + re^{i\theta}) - P(z_0) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} cr^q e^{iq\theta}.$$

4. Montrer que pour $P \in \mathbb{C}[X]$, $\|P\| = \sup\{|P(z)| \mid z \in \bar{\Delta}\}$.

★ **Exercice 17.** *Polynômes : valeurs contre coefficients.*

On se place dans $\mathbb{R}[X]$.

1. **Normes uniformes.** Comparer les normes $\|P\|_\infty = \sup_{[-1,1]} |P|$ et $N_\infty(P) = \max_{n \in \mathbb{N}} |\text{coeff}_n(P)|$.
2. **Normes L^1/ℓ^1 .** Comparer les normes $\|P\|_1 = \int_{-1}^1 |P|$ et $N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |\text{coeff}_n(P)|$.

Boules

Exercice 18. *Somme de deux boules.*

Soit $a, b \in E$ et $r, s > 0$.

1. Montrer que $B(a, r) + B(b, s) := \{x + y \mid x \in B(a, r), y \in B(b, s)\} = B(a + b, r + s)$.
2. Que se passe-t-il si l'une et/ou l'autre des deux boules est remplacée par la boule fermée ?

♠ **Exercice 19.** *Inclusion de boules.*

Centrale

Soit $a, b \in E$ et $r, s > 0$. Montrer $\bar{B}(a, r) \subseteq \bar{B}(b, s)$ si et seulement si $\|b - a\| \leq s - r$.

Exercice 20. *Unicité du centre et du rayon.*

Soit $a, b \in E$ et $r, s \geq 0$.

1. On suppose $\bar{B}(a, r) = \bar{B}(b, s)$. Montrer $a = b$ et $r = s$.
2. La propriété reste-t-elle vraie pour les boules ouvertes ?

Exercice 21. *Stricte convexité de la boule unité.*

Un espace vectoriel normé E est dit *strictement convexe* si, étant donné deux vecteurs $x \neq y$ de norme 1, on a $\forall \lambda \in]0, 1[, \|(1 - \lambda)x + \lambda y\| < 1$.

1. Montrer que tout espace préhilbertien réel est strictement convexe.
2. Donner un exemple d'espace vectoriel normé non strictement convexe.
3. Montrer que E est strictement convexe si et seulement si, étant donné deux vecteurs $x \neq y$ de norme 1, on a $\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1$.

Δ Exercice 22. *Jauge d'un convexe.*

Soit E un espace vectoriel réel.

- On munit E d'une norme $\|\cdot\|$ et on note C la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|$. Montrer que C
 - est convexe;
 - est absorbant : $\bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} tC = E$;
 - est symétrique : $\forall x \in C, -x \in C$;
 - ne contient aucune droite de E .
- Réciproquement, soit $C \subseteq E$ une partie absorbante contenant 0. Montrer l'égalité

$$p_C(x) := \inf \{t \in \mathbb{R}_+^* \mid x \in tC\} = \left(\sup \{r \in \mathbb{R}_+^* \mid rx \in C\} \right)^{-1}$$

et que $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+, p_C(\lambda x) = \lambda p_C(x)$.

La fonction p_C est la *jauge* (de Minkowski) de la partie C .

- On suppose en outre C convexe, symétrique et ne contenant aucune droite. Montrer que p_C est une norme sur E .
- Montrer que $B(0, 1) \subseteq C \subseteq \overline{B}(0, 1)$. L'une de ces inclusions est-elle nécessairement une égalité?

Suites dans un espace vectoriel normé

♠ Exercice 23. *Suite non bornée.*

Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace vectoriel normé E est non bornée si et seulement si elle admet une sous-suite qui tend vers l'infini, c'est à dire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\|u_{\varphi(n)}\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 24. *Unicité de la limite, vraiment ?*

- Trouver une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Généraliser à une base quelconque de $\mathbb{R}[X]$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle $X^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P$.
- Ce résultat n'est-il pas contradictoire avec l'unicité de la limite ?

Exercice 25. *Norme de Lipschitz.*

Soit L l'ensemble des fonctions lipschitziennes $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

- Montrer que « la meilleure constante de Lipschitz » fournit une application (que l'on définira plus proprement) $k : L \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant l'homogénéité et l'inégalité triangulaire.
- En déduire que $\|f\|_L = |f(0)| + k(f)$ est une norme sur L .
- Comparer $\|\cdot\|_L$ et la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$ sur L .
- On considère la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ définie par

$$f_n : x \in [0, 1] \mapsto \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } x \in [0, n^{-2}] \\ \sqrt{x} & \text{si } x \in [n^{-2}, 1] \end{cases}.$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $C^0([0, 1])$ (muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$) et L (muni de $\|\cdot\|_L$).

Exercice 26. *Théorème de Cesàro.*

Étant donné $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée, on note $\omega(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

On définit $v = \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k \right)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer $\omega(v) \subseteq [\min \omega(u), \max \omega(u)]$.
2. Justifier le titre de l'exercice.

Δ★ Exercice 27. *Valeur d'adhérence simultanée.*

Soit $z_1, \dots, z_p \in \mathbb{U}$. Montrer que p est une valeur d'adhérence de $(z_1^n + \dots + z_p^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ouverts et fermés, intérieur et adhérence

Généralités

Exercice 28. *Ouvert disjoint d'une partie.*

Soit A et U deux parties de E , U étant ouverte.

Montrer que $A \cap U = \emptyset \Rightarrow \overline{A} \cap U = \emptyset$.

♠ Exercice 29. *Adhérence et intérieur d'un sous-espace vectoriel.*

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Si $F \neq E$, montrer que F est d'intérieur vide.

♠ Exercice 30. *Hyperplan fermé ou dense.*

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé E . Montrer que H est fermé dans E ou dense dans E .

Exercice 31. *Intérieur, adhérence et frontière d'un produit.*

Soit E et F deux espaces vectoriels normés. On munit $E \times F$ de la norme produit $\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$.

Soit $A \subseteq E$ et $C \subseteq F$. Quels sont l'intérieur, l'adhérence et la frontière de $A \times C$ dans $E \times F$?

Exercice 32. *Ensemble rare.*

Une partie $A \subseteq \mathbb{R}^n$ est dite *rare* si $\overline{A}$ est d'intérieur vide.

1. Montrer que A est rare si et seulement si, pour tout ouvert non vide U de $\mathbb{R}^n$, il existe un ouvert non vide $V \subseteq U$ tel que $A \cap V = \emptyset$.
2. Montrer que l'union de deux parties rares est rare.
3. Une union dénombrable de parties rares est-elle rare?

Exercice 33. *Parties discrètes.*

Soit $A \subseteq E$.

1. Soit $\delta > 0$. On suppose A δ -séparée, c'est-à-dire telle que $\forall x \neq y \in A, \|x - y\| \geq \delta$. Montrer que A est fermée.
2. La partie A est dite *discrète* si tous ses points x sont *isolés*, c'est-à-dire si $\forall x \in A, x \notin \overline{A \setminus \{x\}}$. Est-ce que cela entraîne que A soit fermée?

Exercice 34. *Exemples sur la droite réelle.*

1. Donner deux parties $A, B \subseteq \mathbb{R}$ telles que les ensembles $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient deux à deux distincts. Quelles inclusions sont inévitables ?
2. Donner deux intervalles $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tels que $A \cap \overline{B}$ ne soit pas inclus dans $\overline{A \cap B}$.

Exercice 35. *Frontière de la frontière.*

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E . On note $\text{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ sa frontière.

1. Comparer $\text{Fr}(\text{Fr}(A))$ à $\text{Fr}(A)$.
2. Comparer $\text{Fr}(\text{Fr}(\text{Fr}(A)))$ à $\text{Fr}(\text{Fr}(A))$.

Exercice 36. *L'exercice le plus vieillot de l'univers.*

Soit X une partie d'un espace vectoriel normé E .

1. Comparer $\overline{\overline{X}}$ et $\overline{\overset{\circ}{X}}$ ainsi que $\overset{\circ}{\overline{X}}$ et $\overset{\circ}{\overset{\circ}{X}}$.
2. Comparer $\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}$ et $\overline{\overset{\circ}{\overset{\circ}{X}}}$ ainsi que $\overset{\circ}{\overline{\overline{X}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{X}}}}$.
3. En déduire qu'en appliquant successivement à X des passages à l'intérieur et à l'adhérence, on obtient au plus 7 parties distinctes (X compris). Donner une partie X de $\mathbb{R}$ pour laquelle ces 7 parties sont distinctes.

Exercice 37. *Ouvert contenant les valeurs d'adhérence.*

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe bornée et $\omega(u)$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence.

Montrer que tout ouvert Ω tel que $\omega(u) \subseteq \Omega$ contient les valeurs de la suite, à partir d'un certain rang.

★ **Exercice 38.** *« Classification » des fermés de $\mathbb{R}^d$.*

1. Soit $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ une bijection. Quelles sont les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$?
2. Montrer que tout fermé de $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite.

Exemples en dimension finie**Exercice 39.** *Spirale logarithmique.*

Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $S = \{(e^{-t} \cos t, e^{-t} \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ dans $\mathbb{R}^2$.

★ **Exercice 40.** *Ensemble de triangles.*

Centrale (PSI)

Soit $T \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ l'ensemble des triplets (p_1, p_2, p_3) tels que l'enveloppe convexe de $\{p_1, p_2, p_3\}$ contienne le disque fermé $B_f(0, 1)$ de centre 0 et de rayon 1.

L'ensemble T est-il ouvert ? fermé ?

Exemples en dimension infinie

Exercice 41. *Hyperplan affine dans ℓ^1 .*

On munit l'espace $\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C})$ des suites complexes sommables de sa norme $\|\cdot\|_1$. On pose

$$F = \left\{ a \in \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{C}) \mid \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1 \right\}.$$

L'ensemble F est-il ouvert ? fermé ? borné ?

Exercice 42. *Fonctions dérivables en norme uniforme.*

On munit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de la norme uniforme.

L'ensemble $D([0, 1]; \mathbb{R})$ des fonctions dérivables est-il ouvert ? est-il fermé ?

Exercice 43. *Fonctions qui s'annulent en au moins p points.*

Mines

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et S un segment de $\mathbb{R}$ non réduit à un point. On note $E = C^0(S, \mathbb{R})$, que l'on munit de la norme uniforme. On note Z_p l'ensemble des éléments de E qui s'annulent en au moins p points.

1. Montrer que Z_1 est fermé dans E .
2. Déterminer l'adhérence de Z_p pour n'importe quel p dans $\mathbb{N}^*$.

♠ **Exercice 44.** *Adhérence de c_{00} .*

On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Quels sont l'intérieur et l'adhérence de l'ensemble c_{00} des suites presque nulles ?

Même question avec les suites stationnaires.

Exercice 45. *Parties de ℓ^∞ .*

Centrale

On munit l'espace ℓ^∞ des suites réelles bornées de la norme $\|u\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Les parties suivantes de ℓ^∞ sont-elles fermées ?

1. l'ensemble D des suites décroissantes ;
2. l'ensemble c_0 des suites convergeant vers 0 ;
3. l'ensemble c des suites convergentes ;
4. l'ensemble Z des suites admettant 0 comme valeur d'adhérence ;
5. l'ensemble P des suites périodiques.

Δ **Exercice 46.** *Ensembles de fonctions.*

X

Soit I (resp. S , B) l'ensemble des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ injectives (resp. surjectives, bijectives). Vus comme parties de l'espace vectoriel normé $(C^0([0, 1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, ces ensembles sont-ils ouverts ? fermés ?

★ **Exercice 47.** *Fonctions injectives en norme C^1 .*

On munit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ de sa norme naturelle $\|f\|_{C^1} = \max(\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty)$.

On considère l'ensemble $X \subseteq E$ des fonctions injectives.

1. X est-il ouvert ? Est-il fermé ?
2. Décrire l'intérieur et l'adhérence de X .

★ **Exercice 48.** *Somme de deux sous-espaces fermés.*

On munit $E = \ell^1(\mathbb{N}^*)^2$ de la norme $\|(x, y)\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n| + \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|$.

1. Montrer que $F = \ell^1(\mathbb{N}^*) \times \{0\}$ et $G = \{(x, y) \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = ny_n\}$ sont fermés.
2. Montrer que $F + G$ n'est pas fermé.

★ **Exercice 49.** *Adhérence et intérieur de sous-espaces.*

On se place dans $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ et l'on considère $H_1 = \left\{ a \in \ell^2(\mathbb{N}^*) \mid \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n} = 0 \right\}$ ainsi que l'ensemble H_2 des suites

$a \in \ell^2(\mathbb{N}^*)$ telles que la série $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ converge et vérifie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 0$.

Décrire l'adhérence et l'intérieur de chacun de ces deux ensembles.

Densité : généralités

Exercice 50. *Ensembles rencontrant toute partie dense.*

Déterminer les parties de E rencontrant toute partie dense.

Exercice 51. *Ouverts réguliers.*

1. Montrer que l'intersection d'une famille finie d'ouverts denses de E est un ouvert dense de E .
2. Soit Ω un ouvert dense de E et $V \subseteq E$ une partie dense dans E . Montrer que $\Omega \cap V$ est dense dans E .
3. Soit U et V deux ouverts disjoints de E . Montrer que $\overset{\circ}{U} \cap \overset{\circ}{V} = \emptyset$.
4. Soit U un ouvert de E . Montrer que $U = \overset{\circ}{U}$ si et seulement si U et $\overline{U}$ ont la même frontière.

Densité : exemples en dimension finie

★ **Exercice 52.** *Convexes denses.*

ENS (PC)

Déterminer les ensembles convexes denses de $\mathbb{R}^d$.

♠★ **Exercice 53.** *Sous-groupes de $\mathbb{R}$ et théorème de Kronecker.*

1. Montrer que tout sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit monogène soit dense.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et b un réel non nul. Montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}$ est irrationnel.
3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue, périodique et non constante. Montrer que l'ensemble des périodes de f , correctement défini, est un sous-groupe monogène de $\mathbb{R}$ et en déduire une définition de la période minimale d'une telle application.
4. **Théorème de densité de Kronecker.** Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
 - (a) Montrer que $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
 - (b) En déduire que $\{e^{i2\pi n\theta} \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{U}$ et $\{\sin(2\pi n\theta) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.
 - (c) Montrer que $\{n\theta - [n\theta] \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Δ **Exercice 54.** *Premiers chiffres d'une puissance de 2.*

Mines

1. Montrer que $\ln 2 / \ln 10 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il existe une infinité de puissances de 2 dont l'écriture décimale commence par 1854.

Exercice 55. Adhérence de $\{u_p - u_q\}$.

1. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
Montrer que $\{u_p - u_q \mid p, q \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle non majorée. Déterminer l'adhérence dans $\mathbb{R}$ de $\{a_p - \ln q \mid p, q \in \mathbb{N}^*\}$.

Δ★ **Exercice 56.** Théorème d'approximation de Dirichlet (1842) : une application.

1. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Montrer qu'il existe une infinité de couples $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

2. On admet que la suite $\left(\frac{1}{n \sin n} \right)_{n \geq 1}$ est bien définie. Montrer qu'elle diverge.

★★ **Exercice 57.** Polynômes à coefficients entiers et nombres transcendants.

ENS

1. Si $x \in \mathbb{R}$, on définit $A(x) = \{P(x) \mid P \in \mathbb{Z}[X]\}$.
Donner une condition nécessaire et suffisante sur x pour que $A(x)$ soit dense dans $\mathbb{R}$.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, on note abusivement $\{-1, 0, 1\}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et $B(x) = \{P(x) \mid P \in \{-1, 0, 1\}[X]\}$.
Montrer que si $\tau \in]1, 2[$ est transcendant, $B(\tau)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Densité : exemples en dimension infinie

Exercice 58. Densité de c_{00} .

Tous les espaces vectoriels normés suivants contiennent le sous-espace vectoriel c_{00} des suites nulles à partir d'un certain rang. Déterminer à chaque fois s'il est dense.

1. Le sous-espace vectoriel $l^\infty(\mathbb{N})$ des suites bornées, muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$.
2. Le sous-espace vectoriel $\ell^1(\mathbb{N})$ des suites sommables, muni de la norme $\|\cdot\|_1$.
3. Le sous-espace vectoriel $bv(\mathbb{N})$ des suites u telles que $\|u\|_{bv} := |u(0)| + \sum_{k \in \mathbb{N}} |u(k+1) - u(k)| < +\infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_{bv}$.

★ **Exercice 59.** Translation et découplage, version topologique.

On munit $E = C^0(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ de sa norme usuelle $\|\cdot\|_1$ et on considère le sous-espace vectoriel $C_c^0(\mathbb{R})$ de E constitué des fonctions continues à support compact, c'est-à-dire nulles en dehors d'un segment.

1. Montrer que $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans E .
2. Montrer $\forall f \in E, \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t - \lambda) - f(t + \lambda)| dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 2\|f\|_1$.

★ **Exercice 60.** Espaces séparables.

Un espace vectoriel normé E est dit *séparable* s'il contient une partie dénombrable dense.

1. Montrer que K^d , muni de la norme produit, est séparable.
2. Montrer que l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites réelles bornées, muni de la norme uniforme, n'est pas séparable, mais que le sous-espace vectoriel $c \subseteq \ell^\infty(\mathbb{N})$ des suites convergentes l'est.
3. Soit E un espace préhilbertien réel de dimension infinie.
Montrer que E est séparable si et seulement s'il existe une suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ totale, c'est-à-dire telle que $\text{Vect}(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit dense dans E .

Limites et continuité

Limites

Exercice 61. Limites en 0 de fonctions de deux variables.

1. L'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \\ x \mapsto \frac{x}{\|x\|} \end{cases}$ admet-elle une limite au point 0 ?
2. Même question pour $g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2 - xy + y^2} \end{cases}$.
3. Même question pour $h : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 - xy + y^2} \end{cases}$.

Exercice 62. La fonction $(x, y) \mapsto x^y$.

On adopte dans cet exercice la convention raisonnable $\forall y > 0, 0^y = 0$ et on définit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x^y \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue.
2. Admet-elle une limite en $(0,0)$?
3. Admet-elle une limite « en l'infini » : existe-t-il $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) \xrightarrow{\|(x,y)\| \rightarrow +\infty} \ell$?

★ **Exercice 63.** Limites le long des rayons.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

1. Est-il vrai que la convergence « le long des rayons » $\forall u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(tu) \xrightarrow{t \rightarrow 0} a$ entraîne $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} a$?
2. Même question si l'on suppose f continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

Continuité : généralités

Exercice 64. Continuité en un point isolé.

Soit E et F deux espaces vectoriels normés et A une partie de E .

Un point $a \in A$ est dit *isolé* si $a \notin \overline{A \setminus \{a\}}$.

1. Montrer qu'une fonction $A \rightarrow F$ est continue en tout point isolé de son domaine de définition.
2. Quelles sont les applications continues $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$?
3. Quelles sont les applications continues $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$?

Exercice 65. Continuité et adhérence.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Montrer que $f : E \rightarrow F$ est continue si et seulement si pour toute partie A de E , on a $f[\overline{A}] \subseteq \overline{f[A]}$.

Exercice 66. Fonctions semi-continues inférieurement.

X

Une fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *semi-continue inférieurement* (que l'on abrègera en *sci*) si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le sous-niveau $f^{-1}([-\infty, \alpha])$ est fermé.

1. Montrer que si une fonction est continue, alors elle est sci.

- Donner un exemple de fonction discontinue mais sci.
- Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que f est sci si et seulement si, pour tout $x \in E$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $\forall y \in V, f(y) > f(x) - \varepsilon$.
- Soit $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de fonctions continues $E \rightarrow \mathbb{R}$ indexée par un ensemble non vide Λ . On suppose que, pour tout $x \in E$, la borne supérieure $\varphi(x) := \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$ existe (et est finie). Montrer que φ est alors sci.

Exercice 67. *Continuité séparée et monotonie.*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les applications partielles $f(a, \cdot)$ et $f(\cdot, a)$ sont continues et monotones. Montrer que f est continue.

Exercice 68. *Prolongement de McShane.*

Soit A une partie non vide de E et $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ une application k -lipschitzienne.

- Montrer que $\tilde{f} : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sup_{a \in A} (f(a) - k\|x - a\|) \end{cases}$ est une application bien définie, k -lipschitzienne, et qu'elle prolonge f .
- Déterminer $\tilde{f}$ dans le cas où $E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1]$, et $f : x \mapsto x^2$ (en déterminant au passage la constante de Lipschitz optimale).

Continuité : exemples

Exercice 69. *Continuité du max et du min.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les fonctions $\max : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $\min : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues.

★ **Exercice 70.** *Opérateur de composition.*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. On munit $C^0([0, 1])$ de la norme uniforme et on note $T : \begin{cases} C^0([0, 1]) \rightarrow C^0([0, 1]) \\ f \mapsto \varphi \circ f \end{cases}$.

- Montrer que T est continu.
- À quelle condition sur φ l'opérateur T est-il uniformément continu ? lipschitzien ?

★ **Exercice 71.** *Rétraction sur la boule.*

On définit une application $r : E \rightarrow E$ envoyant tout vecteur $x \in E$ sur $\frac{x}{\|x\|}$ si $\|x\| \geq 1$, et sur x lui-même sinon.

- Montrer que r est 2-lipschitzienne.
- Améliorer la majoration quand E est un espace préhilbertien réel.

★★ **Exercice 72.** *Homéo₊([0, 1]) est un groupe topologique.*

On note G l'ensemble des applications continues $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ strictement croissantes et bijectives, que l'on considère comme une partie de l'espace vectoriel normé $C^0([0, 1])$, muni de la norme uniforme.

- Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.
- Montrer que $\begin{cases} G^2 \rightarrow G \\ (f, g) \mapsto g \circ f \end{cases}$ est continue.
- Montrer que $\begin{cases} G \rightarrow G \\ f \mapsto f^{-1} \end{cases}$ est continue.

Δ Exercice 73. *Fonction continue en un point.*

Saclay

Trouver une fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ discontinue partout sauf en 0.

Continuité et densité**Δ Exercice 74.** *Prolongement continu.*

ÉNS

Soit $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ le disque unité ouvert. Soit $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $p \in \mathbb{U}$, f admette un prolongement continu à $\Delta \cup \{p\}$. Montrer que f admet un prolongement continu à tout $\overline{\Delta}$.

Exercice 75. *Un argument de densité bien utile.*

Soit E un espace vectoriel normé et $D \subseteq E$ une partie dense. On se donne des fonctions f_n (pour $n \in \mathbb{N}$) et $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, toutes continues, et l'on suppose $\forall x \in D, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$.

1. On suppose la suite de fonctions *équicontinue*, c'est à dire

$$\exists K \in \mathbb{R}_+ : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1, x_2 \in E, |f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leq K \|x_1 - x_2\|.$$

Montrer que $\forall x \in E, f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Montrer que l'on ne peut pas renforcer le résultat de la question précédente en ne supposant plus la suite équicontinue, mais simplement que toutes les fonctions de la suite sont lipschitziennes.
3. Inventer une notion d'*équicontinuité* pour la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui suffise à obtenir le résultat de la première question. Notamment, une suite constante $(f)_{n \in \mathbb{N}}$ devra être équicontinue si et seulement si f est continue.

Distance**♠ Exercice 76.** *Fermés disjoints à distance nulle.*

Existe-t-il dans $\mathbb{R}^2$ deux fermés disjoints à distance nulle ? Et dans $\mathbb{R}$?

Exercice 77. *Ensembles séparés.*

Soit $A, B \subseteq E$ tels que $\inf_{(a,b) \in A \times B} \|a - b\| > 0$.

Montrer qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $A \subseteq U$ et $B \subseteq V$.

Exercice 78. *Distance et diamètre de l'adhérence.*

Soit E un espace vectoriel normé et A une partie bornée et non vide de E .

Le *diamètre* d'une telle partie est $\text{diam}(A) = \sup_{a_1, a_2 \in A} \|a_1 - a_2\|$.

1. Montrer que $d(x, A) = d(x, \overline{A})$ pour tout $x \in E$.
2. Montrer que A et $\overline{A}$ ont le même diamètre.

♠ Exercice 79. *ε -voisinages d'une partie.*

Soit $A \subseteq E$. Pour $\varepsilon > 0$, on note $\mathcal{U}_\varepsilon(A) = \{x \in E \mid d(x, A) < \varepsilon\}$.

1. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathcal{U}_\varepsilon(A)$ est un ouvert.
2. Déterminer $\bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{U}_\varepsilon(A)$.
3. En déduire que tout fermé de E est un G_δ , c'est-à-dire une intersection dénombrable d'ouverts, et que tout ouvert est un F_σ , c'est-à-dire une réunion dénombrable de fermés.

♠ **Exercice 80.** *Lemme d'Urysohn.*

1. Soient a et b deux points distincts de E . Construire $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.
2. Soient F_0 et F_1 deux fermés disjoints non vides.
 - (a) Trouver une fonction continue égale à 1 sur F_1 et nulle sur F_0 .
 - (b) En déduire l'existence d'ouverts disjoints U_0 et U_1 tels que $F_0 \subseteq U_0$ et $F_1 \subseteq U_1$.
3. Soient $F_1, \dots, F_r$ des fermés deux à deux disjoints et $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une fonction f continue envoyant le fermé F_j sur a_j .

Applications linéaires continues

Normes subordonnées en dimension finie

♠ **Exercice 81.** *Normes subordonnées usuelles sur $M_{n,p}(K)$.*

On identifie canoniquement $M_{n,p}(K)$ à l'espace des applications linéaires $K^p \rightarrow K^n$.

1. Déterminer les normes subordonnées aux normes $\|\cdot\|_\infty$ de K^p et K^n .
2. Même question pour les normes $\|\cdot\|_1$.
3. Même question si l'on munit K^p de la norme $\|\cdot\|_1$ et K^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$.
4. Même question si l'on munit K^p de la norme $\|\cdot\|_2$ et K^n de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

♠ **Exercice 82.** *Norme de Frobenius sous-multiplicative.*

1. Montrer que $\|A\| = \sqrt{\text{tr}(A^T A)}$ est une norme *sous-multiplicative* sur $M_n(\mathbb{R})$ c'est-à-dire telle que $\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$.
2. La norme $\|\cdot\|_F$ est-elle subordonnée à une norme sur $\mathbb{R}^n$?

Exercice 83. *Pourquoi se contenter de la sous-multiplicativité?*

Existe-t-il sur $M_n(\mathbb{C})$ une norme vérifiant $\forall A, B \in M_n(\mathbb{C}), \|AB\| = \|A\| \|B\|$?

Exercice 84. *Norme duale.*

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$. On pose, pour $A \in M_n(\mathbb{R}), \|A\|^* = \sup_{\|B\|=1} |\text{tr}(AB)|$.

1. Montrer que $\|\cdot\|^*$ est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$, appelée *norme duale de $\|\cdot\|$* .
2. Quelle est la norme duale de $\|B\|_\infty = \max_{1 \leq i, j \leq n} |[B]_{i,j}]$.
3. Quelle est la norme duale de la norme de Frobenius?

Exercice 85. *Calcul d'une norme subordonnée.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}_n[X]$ de la norme $N(P) = \sum_{k=0}^n |P(k)|$.

Calculer la norme subordonnée de la forme linéaire $P \mapsto P(n+1)$.

Exemples en dimension infinie

Exercice 86. *Opérateur de Cesàro sur $\ell^\infty(\mathbb{N})$.*

On munit $\ell^\infty(\mathbb{N})$ de la norme uniforme, et T l'endomorphisme de $\ell^\infty(\mathbb{N})$ défini par $T(u)_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n u_k$.

Montrer que T est continu, et calculer sa norme subordonnée.

Exercice 87. *Sommes partielles sur ℓ^1 .*

Soit $E = \ell^1(\mathbb{N}, K)$ muni de sa norme naturelle $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

1. Montrer que les formes linéaires $S_n : u \mapsto \sum_{k=0}^n u_k$ et $S : u \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ sont continues, et déterminer leurs normes subordonnées.
2. Dans l'espace des formes linéaires continues sur E , muni de la norme subordonnée, a-t-on $S_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} S$?

Exercice 88. *Continuité de formes linéaires intégrales.*

X

On considère l'espace vectoriel normé $E = C^0([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $g \in E$.

1. Montrer que la forme linéaire $u_g : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 f g \end{cases}$ est continue et en déterminer la norme subordonnée.
2. La forme linéaire $\varphi : \begin{cases} E \rightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_0^1 \frac{f(t)}{\sqrt{t}} dt \end{cases}$ est-elle continue?
3. Reprendre les questions en munissant plutôt E de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 89. *Norme de Sobolev.*

Soit $E = C^\infty([0, 1])$. On considère les fonctions définies par

$$\forall f \in E, \quad \|f\|_{C^0} = \max |f|, \quad \|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 f^2} \quad \text{et} \quad \|f\|_{H^1} = \sqrt{\int_0^1 f^2 + \int_0^1 (f')^2}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de trois normes sur E .
2. Les comparer.
3. Pour chacune des normes, dire si la forme linéaire $\text{év}_0 : f \mapsto f(0)$ est continue.

Exercice 90. *Continuité de l'intégrale.*

ENS

On considère l'espace vectoriel $E = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f(1) = 0\}$, muni de la norme $\|f\| = \|f'\|_\infty$.

Montrer que $f \mapsto \int_0^1 f$ est une forme linéaire continue sur E et déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 91. *Dérivation jamais continue sur C^∞ .*

Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $C^\infty([0, 1], \mathbb{R})$ pour laquelle la dérivation est continue.

Exercice 92. Opérateur de Volterra.

X

Soit E le sous-espace vectoriel de $C^0([0, 1])$ constitué des fonctions d'intégrale nulle. Si $f \in E$, on note $T(f)$ l'unique primitive de f appartenant à E .

1. On munit E de la norme uniforme. T est-il continu ?
2. Même question si on munit E de la norme L^1 .

★ **Exercice 93.** Continuité d'un endomorphisme en norme L^1 .

Centrale

On note E l'espace des fonctions $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continues et intégrables, que l'on munit de la norme $\|\cdot\|_1$.

Pour tout $f \in E$, on définit $\varphi(f) : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt. \end{cases}$

Montrer que φ est un endomorphisme continu de E .

Exercice 94. Opérateur d'interpolation.

X (PC)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $a < b$ deux réels, $I = [a, b]$ et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$ dans I .

On note $\Lambda : C^0([a, b]) \rightarrow C^0([a, b])$ l'opérateur d'interpolation de Lagrange : pour tout $f \in C^0([a, b])$, $\Lambda(f)$ est l'unique élément de $\mathbb{R}_n[X]$ coïncidant avec f aux nœuds $x_0, \dots, x_n$, vu comme une fonction continue.

Montrer que, si l'on munit $C^0([a, b])$ de la norme uniforme, l'opérateur Λ est continu.

Exercice 95. Évaluation et formes linéaires.

On considère, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\|P\| = \sup\{|P(x)| \mid x \in [-1, 1]\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Étant donné $a \in \mathbb{R}$, la forme linéaire $\text{év}_a : P \mapsto P(a)$ est-elle continue ?

Exercice 96. Trois normes sur $\mathbb{R}[X]$.

Centrale (PC)

À $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on associe $N_1(P) = \sum_{k=0}^d |a_k|$, $N_2(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$ et $N_3(P) = \sup_{[0,1]} |P|$.

1. Montrer que ce sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. La forme linéaire $P \mapsto P(0)$ est-elle continue pour ces normes ?
3. Sont-elles équivalentes ?

Exercice 97. L'opérateur d'Euler n'est jamais continu.

X

1. Donner deux exemples de normes sur $\mathbb{R}[X]$, l'une rendant $D : P \mapsto P'$ continue, l'autre pas.
2. Montrer qu'aucune norme ne peut rendre simultanément D et $M : P \mapsto XP$ continues.

Plus théoriqueΔ **Exercice 98.** Norme subordonnée non atteinte.

On munit $C^0([0, 1])$ de la norme uniforme et on considère la forme linéaire définie par

$$\varphi : f \mapsto \int_0^{1/2} f(t) dt - \int_{1/2}^1 f(t) dt.$$

1. Montrer que φ est continue et calculer sa norme subordonnée.
2. La norme subordonnée est-elle atteinte ?

Δ Exercice 99. *Formes linéaires positives.*

Mines

Soit $E = C^0([0, 1])$. Une forme linéaire $L : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *positive* si $f \geq 0 \implies L(f) \geq 0$.

1. Montrer qu'une forme linéaire positive est continue lorsque l'on munit E de la norme uniforme.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on remplace la norme uniforme par la norme L^1 ?

★ Exercice 100. *Test de Schur et interpolation.*

ENS

Soient E l'espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang, et $T : E \rightarrow E$ un endomorphisme.

Montrer que si T est continu pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$, il est continu pour $\|\cdot\|_2$.

Exercice 101. *Approximations de rang fini de l'identité.*

Dans cet exercice, on considère l'espace $H = \ell^2(\mathbb{N})$ muni de sa norme habituelle, et on note $\mathcal{L}(H)$ l'algèbre des endomorphismes continus de H .

1. Construire une suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes de rang fini de H telle que $\forall x \in H, p_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.
2. Montrer en revanche qu'il n'existe pas de suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'endomorphismes de H de rang fini telle que $\|id_H - p_n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Δ Exercice 102. *Relation de Weyl-Heisenberg.*

Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel normé $E \neq \{0\}$ tels que $f \circ g - g \circ f = id_E$.

1. Montrer que E est nécessairement de dimension infinie.
2. Calculer $f \circ g^n - g^n \circ f$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que f et g ne peuvent pas être simultanément continues.

★★ Exercice 103. *Isomorphisme versus isométrie.*

On note c l'espace vectoriel des suites réelles convergentes et c_0 le sous-espace vectoriel de c constitué des suites convergeant vers 0. On les munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

1. Construire un isomorphisme $\varphi : c \rightarrow c_0$ continu, d'inverse continu.
2. Montrer qu'un isomorphisme comme celui de la première question ne peut pas être *isométrique*, c'est-à-dire vérifier $\forall u, v \in c, \|\varphi(u) - \varphi(v)\| = \|u - v\|$.

Constructions générales

★ Exercice 104. *Supplémentaires topologiques.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et une décomposition $E = F \oplus G$. On munit $F \times G$ de la norme produit.

1. Montrer l'équivalence entre les assertions suivantes :
 - (i) la réciproque de l'isomorphisme $F \times G \rightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ est continue ;
 - (ii) la projection sur F parallèlement à G est continue ;
 - (iii) $\exists \alpha > 0, \forall x \in G, \alpha \|x\| \leq d(x, F)$;
 - (iv) $\exists \beta > 0, \forall x \in F, \beta \|x\| \leq d(x, G)$;
 - (v) $x \mapsto d(x, F) + d(x, G)$ est une norme sur E équivalente à $\|\cdot\|$.
2. Lorsque ces conditions sont vérifiées, montrer que F et G sont fermés dans E .
3. Donner un exemple de décomposition $E = F \oplus G$ où F et G sont fermés dans E et ne vérifient pas les conditions de la première question.

Exercice 105. *Norme quotient.*

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et $q : E \rightarrow F$ une application linéaire surjective.

Pour $y \in F$, on note $\|y\|_* = \inf\{\|x\| \mid x \in q^{-1}\{y\}\}$.

1. Montrer que $\|\cdot\|_*$ est une norme sur F si et seulement si $\ker q$ est fermé dans E .
2. **Propriété universelle.** Soit N une norme sur F telle que $q : E \rightarrow (F, N)$ soit continue. Montrer qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que $\forall y \in F, N(y) \leq c\|y\|_*$.

Indications

Exercice 1. Seule la séparation « pose problème », et la séparation de $\|\cdot\|$ nous ramène à une question bien connue.

Exercice 2.

2. On montrera $\|x\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|x\|_\infty$ grâce à l'encadrement $\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n^{1/p} \|x\|_\infty$.
3. Remarquons qu'il suffit de raisonner avec des vecteurs unitaires, pour l'une ou l'autre des deux normes. Le cas $p = \infty$ ou $q = \infty$ est à traiter à part, mais n'est pas difficile. Si $p \geq q$, l'inégalité $\|x\|_p \leq \|x\|_q$ est alors facile à démontrer, et les vecteurs de la base canonique montrent qu'elle est optimale. Si $p \leq q$, on pourra utiliser l'inégalité de Hölder ou la convexité de $t \mapsto t^{q/p}$: on obtient l'inégalité $\|x\|_p \leq n^{1/p-1/q} \|x\|_q$, et l'égalité est atteinte pour un vecteur très simple.

Exercice 3. Pour la séparation, on constatera que la suite nulle est la seule suite constante appartenant à E. Il est par ailleurs clair que la norme uniforme domine la norme $\|\cdot\|$, donc il s'agit de démontrer que la relation de domination réciproque est fausse.

On trouve facilement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une suite presque nulle u_n telle que $\|u_n\| = 1$ mais $\|u_n\|_\infty = n$.

Exercice 4.

2. Un télescopage vers l'infini permet de montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, |u(k)| \leq \|u\|$.
3. La réponse est non, mais on se convainc facilement que ce n'est pas avec des suites monotones qu'on va le montrer.

Exercice 5. On pourra vérifier que N_p vérifie tous les axiomes d'une norme, sauf la séparation, et montrer que $\{f \in F \mid N_p(f) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de F dont la dimension est une application décroissante de p .

Exercice 6.

1. Seule la séparation pose problème. On pourra montrer que $f\varphi = 0 \Rightarrow f = 0$ si et seulement si l'ensemble des zéros de φ est d'intérieur vide, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle non trivial.
3. On pourra constater que si des fonctions se concentrent autour d'un point d'annulation de φ , alors leur norme N est significativement plus petite que leur norme uniforme.

Exercice 7.

1. Seule la séparation pose problème. On pourra montrer que $fg = 0 \Rightarrow f = 0$ si et seulement si l'ensemble des zéros de g est d'intérieur vide, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun intervalle non trivial.
4. On pourra constater que si des fonctions se concentrent autour d'un point d'annulation de g , alors leur norme N_g est significativement plus petite que leur norme L^1 .

Exercice 8. Le théorème fondamental $f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt$ permet de montrer que N_1 domine la norme N_2 (essentiellement en passant par la norme uniforme).

Dans l'autre sens, on montre que N_2 domine N_1 si l'on est capable de montrer une inégalité $|f(0)| \leq N_2(f)$, ou même $|f(x_\gamma)| \leq C' N_2(f)$, pour un point x_γ bien choisi. On peut alors par exemple méditer la notion de valeur moyenne.

Exercice 9.

1. Si $N(f) = 0$, f est solution d'un problème de Cauchy très simple.

- On montrera que $N(f)$ n'est pas en général définie si f est supposée simplement dérivable.
 - On résoudra l'équation $f' - f = g$ par variation de la constante, ce qui permettra de montrer que N domine la norme uniforme.
- Des contre-exemples classiques montrent que l'autre domination est fausse.

Exercice 10.

- Inégalité de Hölder, ou inégalité de Jensen avec la fonction convexe $t \mapsto t^{q/p}$ (dans sa version intégrale).
- Dans un cas extrême, on voit que les normes uniforme ($\|\cdot\|_\infty$) et L^1 ($\|\cdot\|_1$) réagissent différemment à un pic très haut et à une bosse très large. On peut s'en inspirer pour le cas général.

Exercice 11.

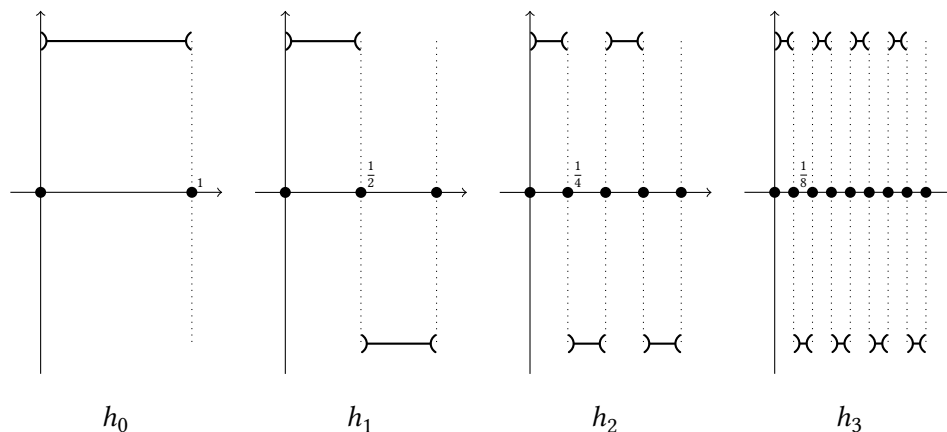
- On montrera que $\|\cdot\|$ est séparée si et seulement si la suite a est dense dans $[0, 1]$.
- Si a est dense, montrer que $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12.

- Pour la séparation, il s'agit de montrer qu'une fonction continue d'intégrale nulle sur tout segment est nulle. C'est faisable à la main, mais le théorème fondamental conclut beaucoup plus vite.
- On montre facilement que la norme L^1 , et donc la norme uniforme, dominant notre norme. Dans l'autre sens, prendre une suite de fonctions qui oscille de plus en plus, comme $s_n : x \mapsto \sin(nx)$.
- On pourra montrer et utiliser le « second théorème de la moyenne » : si f est monotone, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $\int_0^1 fg = f(0) \int_0^c g + f(1) \int_c^1 g$. Pour ce faire, des réductions permettent de se ramener à f décroissante telle que $f(0) = 1$, $f(1) = 0$. Il s'agit alors de montrer que $\int_0^1 fg$ est une valeur de la primitive $G : x \mapsto \int_0^x g$, c'est-à-dire que $\min G \leq \int_0^1 fg \leq \max G$.
Mais le fait que g ne soit pas de signe constant complique un peu les choses... Cela peut par exemple se faire par passage aux sommes de Riemann et transformation d'Abel.

Exercice 13.

- On appliquera la première sous-question à la famille $(c_i)_{i=1}^p = (f_i(x))_{i=1}^p$.
- La dimension d'un espace préhilbertien réel est la taille maximale d'une famille orthonormée.
- On pourra utiliser les *fonctions de Rademacher*.

**Exercice 14.**

- Le théorème des bornes atteintes permet de montrer que la norme est bien définie si A est incluse dans

un segment.

- Seule la séparation est un enjeu. La rigidité des polynômes vole à notre secours.

Exercice 15. En « testant » les normes sur la base canonique $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$, on voit qu'une équivalence de normes fournira (avec la notation Θ des informaticiens) une « équivalence » $\lambda_n = \Theta(\mu_n)$. Réciproquement, il n'est pas dur de vérifier que cette condition est suffisante.

Exercice 16.

2. Un polynôme complexe est une *fonction harmonique* (une distribution de température à l'équilibre) : il est partout égal à sa moyenne autour du point considéré. Une des incarnations de ce principe est la formule (facile à vérifier) $P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) d\theta$.
3. Considérer le monôme de $P(X) - P(z_0)$ de plus petit degré.
4. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet de montrer l'existence de $z \in \bar{\Delta}$ tel que $|P(z)| = \sup \{|P(z)| \mid z \in \bar{\Delta}\}$. Grâce à la question précédente, on peut exclure que ce point z soit de module < 1 , sauf dans le cas exceptionnel d'un polynôme constant.

Exercice 17.

1. Il n'y a pas de relation de domination entre ces normes : une somme de coefficients de taille modérée peut finir par prendre une grande valeur. L'autre sens est un peu plus subtil, mais on peut exploiter le fait que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme d'algèbre alors que les coefficients binomiaux peuvent faire exploser $N_\infty(P^n)$.
2. L'inégalité triangulaire montre que $\|\cdot\|_\infty \leq N_1$, ce qui montre *a fortiori* que N_1 domine $\|\cdot\|_1$. Encore une fois, une suite de puissances permet d'exclure l'autre domination.

Exercice 18. Inégalité triangulaire pour l'inclusion directe. Faire un dessin et/ou se ramener à $a = b = 0$ pour le sens réciproque.

Exercice 19. Faire un dessin pour l'implication directe, utiliser l'inégalité triangulaire pour l'implication réciproque.

Exercice 20. On pourra utiliser l'exercice précédent.

Exercice 21.

1. Identité remarquable.
2. Faire un dessin de la boule unité pour comprendre la définition. On connaît des espaces vectoriels normés dont les boules sont, par exemple, des polygones.
3. Dans le sens non trivial, écrire par exemple $(1 - \lambda)x + \lambda y$ (avec $\lambda < 1/2$) comme milieu de x et d'un autre élément du segment reliant x et y .

Exercice 22.

3. L'inégalité triangulaire de p_C est la propriété la plus difficile, et elle vient de la convexité de C . Précisément, si $x \in aC$ et $y \in bC$, on peut écrire $x + y$ comme une combinaison convexe de $\frac{a+b}{a}x$ et $\frac{a+b}{b}y$, qui appartiennent tous les deux à $(a+b)C$. Si on pouvait prendre $a = p_C(x)$ et $b = p_C(y)$, cet argument seul suffirait, mais il faut dans le cas général raisonner avec des petites « tolérances » en ε .
4. En « hésitant » entre les deux versions de la boule unité, on arrive à construire un exemple où C n'est ni la boule unité ouverte, ni la fermée.

Exercice 23. C'est essentiellement la même démonstration que dans $\mathbb{R}$.

Exercice 24.

1. Une norme pondérée sur les coefficients $N(P) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \lambda_k |\text{coeff}_k(P)|$ peut convenir. Cela continue à avoir un sens pour les coefficients relativement à une autre base.
2. En choisissant bien la base, c'est une conséquence immédiate de la première question.

Exercice 25.

1. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on montre que si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs vérifiant $\alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$, et qu'une fonction f est α_n -lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors elle est α -lipschitzienne.

Cela donne une définition précise de $k(f)$ comme un minimum :

$$k(f) = \min \{ \alpha \in \mathbb{R}_+ \mid \forall x, y \in [0, 1], |f(x) - f(y)| \leq \alpha |x - y| \}.$$

(Il n'est sans doute pas vital pour l'exercice que la borne inférieure de cet ensemble soit atteinte, mais c'est plaisant.)

On montre sans difficulté l'homogénéité et l'inégalité triangulaire.

3. L'inégalité des accroissements finis nous dit que $\|\cdot\|_L$ n'est pas si loin de la norme C^1 , même si elle est définie pour une classe plus générale de fonctions : on n'est donc pas surpris qu'elle domine la norme uniforme (c'est-à-dire la norme C^0) mais que ce ne soit pas réciproque. Tous les exemples de braves suites de fonctions dont les dérivées explosent peuvent d'ailleurs servir de contre-exemples.
4. La convergence dans $C^0([0, 1])$ ne pose pas de problème, mais la limite n'est pas lipschitzienne. On peut se servir de ce constat (et de la domination de la question précédente) pour comprendre qu'il y a divergence dans L .

Exercice 26. On montrera que, pour tout $\varepsilon > 0$, $u_n \in [\min \omega(u), \max \omega(u)]$ « à ε près », en précisant ce que cela signifie.

Exercice 27. On peut commencer par trouver une valeur d'adhérence $\ell \in \mathbb{U}^n$ pour la suite puis, en jouant avec l'extractrice, de montrer que $(1, \dots, 1) = \ell^{-1}\ell$ est également une valeur d'adhérence de la suite, ce qui serait facile si on avait le droit aux exposants négatifs.

Exercice 28. On peut raisonner par caractérisation séquentielle ou avec des boules, mais le plus simple est sans doute de remarquer que $A \cap U = \emptyset$ équivaut à $A \subseteq E \setminus U$.

Exercice 29.

1. Rédaction automatique.
2. S'il existe un vecteur $v \in E \setminus F$, on fabrique à la main une suite d'éléments de $E \setminus F$ convergeant vers l'élément de votre choix de F .

Exercice 30. Il suffit de remarquer que $\overline{H}$ est un sous-espace vectoriel de E tel que $H \subseteq \overline{H} \subseteq E$.

Exercice 31. Faire des dessins, puis de la rédaction automatique.

Exercice 32.

1. Dans le sens direct, U rencontre forcément l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \overline{A}$. Dans le sens réciproque, on voit que $\overline{A}$ ne peut pas contenir d'ouvert non vide.
2. Utiliser la première question.
3. Si c'était vrai, tous les ensembles dénombrables seraient rares.

Exercice 33.

1. La caractérisation séquentielle marche très bien.

2. On pourra vérifier que $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est discrète.

Exercice 34.

- On a tautologiquement $A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ et, de façon à peine plus compliquée $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$ (par caractérisation séquentielle ou parce que $\overline{A} \cap \overline{B}$ est un fermé contenant $A \cap B$).
Les autres inclusions sont fausses, et on peut le montrer avec des exemples simples (intervalles, ou $\mathbb{Q}$ versus $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Exercice 35.

- On pourra remarquer que $\text{Fr}(A)$ est toujours fermé et que, si F est fermé, $\text{Fr}(F)$ est un fermé d'intérieur vide, inclus dans F . Cela permet de montrer une inclusion, et on trouve facilement des exemples pour montrer que l'inclusion réciproque n'est pas nécessairement vraie.
- On pourra vérifier que si F est un fermé d'intérieur vide, $\text{Fr}(F) = F$.

Exercice 37. Si ce n'était pas le cas, on pourrait trouver grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass une valeur d'adhérence de u dans le fermé $\mathbb{C} \setminus \Omega$.

Exercice 38.

- Un point $x \in \mathbb{R}$ est une valeur d'adhérence de u si et seulement si tout voisinage de x contient une infinité « d'impacts » de la suite.
- On commence par se débarrasser du cas de l'ensemble vide. Soit F un fermé non vide de $\mathbb{R}^d$. Ensuite, on peut discrétiser $\mathbb{R}^d$, par exemple en considérant des « générations » de cubes, la ℓ -ième génération étant constituée par exemple de cubes de côté $2^{-\ell}$ quadrillant $[-2^\ell, 2^\ell]^d$. Pour chacun des cubes de cette génération contenant un élément du fermé F , on s'assure que la suite passe par l'un de ces éléments. Une fois ce passage fait, on passe à la génération suivante...

Exercice 39. Faire un dessin.

Exercice 40. Il est assez facile de montrer que T n'est pas ouvert. Pour montrer que c'est un fermé, on peut commencer par montrer que l'ensemble des triangles qui contiennent un point $q \in \mathbb{C}$ fixé, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \mid \exists \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in [0, 1] : \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \text{ et } q = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3\}$$

est déjà fermé. Pour ce faire, le théorème de Bolzano-Weierstrass (dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$) sera utile.

Exercice 41. Comme pour les sous-espaces vectoriels, les sous-espaces affines ne sont essentiellement jamais ouverts, ni bornés.

En revanche, F est fermé. Le plus simple est d'utiliser la continuité de $a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ mais cela peut se faire à la main si on n'a pas encore la notion.

Exercice 42. Les sous-espaces vectoriels ne sont pour ainsi dire jamais ouverts.

Un exemple élémentaire montrera que $D([0, 1]; \mathbb{R})$ n'est pas fermé.

Exercice 43.

- Théorème des bornes atteintes, ou de Bolzano-Weierstrass.
- La question précédente montre que l'adhérence est incluse dans Z_1 . Il y a en fait égalité : vous pouvez approcher (en norme uniforme) toute fonction qui s'annule par une fonction qui s'annule beaucoup.

Exercice 44.

- ▶ Les sous-espaces vectoriels ne sont presque jamais ouverts.
- ▶ On montrera que l'adhérence de c_{00} est l'espace vectoriel c_0 des suites de limite nulle. L'inclusion $c_0 \subseteq \overline{c_{00}}$ est en fait assez facile, et il reste à montrer que c_0 est fermé, ce qui se fait à la main (même si ça n'est pas absolument immédiat).

Exercice 45.

1. Oui : facile à la main (passage à la limite dans les inégalités larges).
2. Oui : pas absolument trivial mais se fait à la main.
3. Oui : pas beaucoup plus dur que le précédent.
4. Oui : idem.
5. Non : on peut par exemple écrire une somme normalement convergente de suites s_n dont la plus petite période est 2^n .

Exercice 46. Aucun des ensembles n'est ouvert, et seul S est fermé (car, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, un élément de S est simplement une application atteignant les valeurs 0 et 1).

Exercice 47.

1. X n'est ni ouvert, ni fermé : on peut facilement trouver une suite d'applications injectives convergeant (en norme C^1) vers une application non injective, et inversement.
2. X est l'ensemble des $f \in E$ telles que (au signe près), $f' \geq 0$, et f' ne s'annule sur aucun intervalle non trivial.

Exercice 48. On pourra montrer que $F + G$ contient tous les couples de suites presque nulles, mais pas tous les éléments de E .

Exercice 49. Les deux ensembles sont des sous-espaces vectoriels propres de $\ell^2(\mathbb{N}^*)$ donc ils sont d'intérieur vide.

On vérifie que H_1 est fermé : $\overline{H_1} = H_1$ (par continuité du produit scalaire si on a déjà cet argument, à la main sinon).

En revanche, en s'appuyant sur des suites presque nulles bien choisies, on peut montrer que H_2 est dense.

Exercice 50. « Rencontrer » signifie « avoir une intersection non vide avec ». C'est de la rédaction automatique : il s'agit des parties d'intérieur non vide.

Exercice 51. Dans les deux premières questions, on utilisera avec profit qu'une partie est dense si et seulement si elle rencontre tous les ouverts non vides.

Pour la troisième, on peut noter que l'intersection est automatiquement ouverte.

Pour la quatrième question, U et $\overset{\circ}{U}$ sont tous les deux inclus dans $\overline{U}$. Ils sont donc égaux si et seulement si leurs complémentaires dans $\overline{U}$ le sont.

Exercice 52. Il n'y en a qu'un : $\mathbb{R}^d$ lui-même. Le montrer par récurrence sur d en faisant des dessins pour comprendre que l'intersection entre un convexe dense de $\mathbb{R}^d$ et un hyperplan H est encore dense.

Exercice 53.

1. On raisonne sur $\alpha = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$, en montrant que cette borne inférieure est soit atteinte, soit nulle.
2. Il suffit de comprendre que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est monogène si et seulement si a/b est rationnel.
3. Le bon sous-groupe à considérer est $\{T \in \mathbb{R} \mid f(T + \cdot) = f\}$. Il ne peut pas être dense.
4. Grâce à la densité de $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}$, il est facile de trouver des $a + b\theta$ très proches de 0, avec $b \in \mathbb{N}$ très grand.

On peut ensuite les utiliser pour approcher des points de $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z}_{<0}$ par des points de $\mathbb{Z} + \theta\mathbb{N}$.
Les deux autres sous-questions s'en déduisent assez directement.

Exercice 54.

1. C'est une conséquence presque immédiate de l'unicité de la décomposition en facteurs premiers.
2. On utilisera le théorème de densité de Kronecker : $\left\{ n \frac{\ln 2}{\ln 10} - \left\lfloor n \frac{\ln 2}{\ln 10} \right\rfloor \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 55.

1. Étant donné une « cible » $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, on peut prendre un seuil N tel que, pour $k \geq N$, la suite ne fasse que des « pas » $u_{k+1} - u_k < b - a$. Pour $q \gg 0$ fixé et $p \geq N$ qui augmente progressivement, la quantité $u_p - u_q$ fera donc des petits pas, partira à gauche de la cible et finira par atteindre la droite de la cible.
2. L'adhérence sera $\mathbb{R}$, avec un argument très proche de celui de la question précédente (mais c'est en faisant varier q que la suite fait des petits pas).

Exercice 56.

1. On fixe $n \geq 1$ et on applique le principe des tiroirs aux chaussettes $kx - [kx]$, à répartir dans les n tiroirs $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n} \right]$, pour $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
L'irrationalité ne sert qu'à se convaincre qu'on obtient ainsi une infinité de couples différents.
Cette démonstration est la raison pour laquelle le principe des tiroirs est parfois appelé *principe de Dirichlet*.
2. L'assertion admise équivaut à l'irrationalité de π , qui permet de trouver deux suites d'entiers naturels $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tels que $p_n = O(q_n)$ et $|q_n \pi - p_n| \leq q_n^{-1}$. On en déduit que la suite de l'énoncé ne tend pas vers 0, et il n'est plus très difficile de montrer qu'elle diverge.

Exercice 57.

1. $A(x)$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$, et il est très rarement monogène.
2. On commencera par montrer que l'on peut trouver des éléments arbitrairement petits dans $B(x)$ en considérant l'application d'évaluation $P \in \{0, 1\}[X] \mapsto P(\tau)$ restreinte aux polynômes à coefficients 0 et 1 et en appliquant une forme de principe des tiroirs.
Pour passer de ces petits éléments à la densité dans $\mathbb{R}$, il faut améliorer l'étape précédente en n'utilisant que des polynômes supportés dans une « plage » fixée de degrés, pour pouvoir travailler avec des plages disjointes et librement ajouter les petits nombres réels ainsi obtenus.

Exercice 58.

1. La réponse est non.
L'adhérence de c_{00} est en fait le sous-espace vectoriel c_0 des suites convergeant vers 0.
2. La réponse est oui, par convergence vers 0 du « reste absolu » $\sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k|$.
3. La réponse est non, la suite constante égale à 1 étant par exemple à distance ≥ 1 de tous les éléments de c_{00} .

Exercice 59.

1. L'intégrabilité d'une fonction f force l'essentiel de sa masse à être concentrée sur un segment.
2. On commencera par montrer le théorème pour $g \in C_c^0(\mathbb{R})$, puis on utilisera, à ε fixé, la question précédente pour trouver une fonction $g \in C_c^0(\mathbb{R})$ telle que $\|f - g\|_1 \leq \varepsilon$.

Exercice 60.

1. On montre que $\mathbb{Q}^d$ est dense dans $\mathbb{R}^d$, et $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^d$ dans $\mathbb{C}^d$.
2. On construira une famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ indexée par un ensemble indénombrable Λ , qui soit 1-séparée au sens où $\forall \lambda \neq \lambda' \in \Lambda, \|f_\lambda - f_{\lambda'}\| \geq 1$.
Pour c , une (jolie) variante des parties de la première question conclura.
3. Le sens réciproque est (presque) direct, avec les idées déjà vues.
Dans le sens direct, si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite dense dans E , on pourra en extraire une sous-suite dense et libre, puis l'orthogonaliser.

Exercice 61.

1. On trouve facilement des suites $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telles que $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers des vecteurs différents.
2. On pourra regarder le comportement de g le long des droites $y = \pm x$.
3. On peut montrer à la main $|h(x, y)| \leq \text{cte } |x|$, ce qui montre que $h(x, y) \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$.

Exercice 62.

1. Cela se fait par opérations, en faisant attention au cas $y = 0$ introduit par la convention.
2. On trouve facilement des suites de points (x_n, y_n) tendant vers 0 ou l'infini telles que $f(x_n, y_n)$ converge vers des valeurs différentes (on obtient assez facilement 0 et 1 dans les deux cas, par exemple).

Exercice 63.

- ▶ La réponse est non. On peut par exemple prendre $f = 1_P$, où P est une partie de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ contenant 0 dans son adhérence, mais dont la structure est suffisamment « non linéaire » pour que l'on ait $f(tu) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$, quel que soit $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
- ▶ La réponse est toujours non, mais le contre-exemple ne marche pas. Le contre-exemple classique est $(x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, dont on pourra regarder la restriction à la parabole $y = x^2$.

Exercice 64.

1. Pour $\delta > 0$ assez petit, l'ouvert relatif $B(a, \delta) \cap A = \{a\}$.
2. C'est une application directe de la question précédente : toutes.
3. Cela n'a rien à voir avec la question précédente et tout à avoir avec le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 65. Caractérisations séquentielles.**Exercice 66.**

2. On peut chercher parmi les indicatrices.
3. Rédaction automatique, en passant aux complémentaires.
4. Exprimer les sous-niveaux de ϕ en fonction de ceux des f_λ .

Exercice 67. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, on peut utiliser les hypothèses pour trouver $\delta > 0$ puis $\eta > 0$ tels que $|f(x, y) - f(a, b)| \leq \varepsilon$ pour tout $(x, y) \in \{(a \pm \delta, b \pm \eta)\}$. Ce contrôle aux quatre sommets d'un rectangle conclut.

Exercice 68.

- ▶ Pour la bonne définition, on remarque qu'à x fixé, $f(a) - k\|x - a\| \leq f(a_0) + k\|a_0 - x\|$, où $a_0 \in A$ est un élément quelconque. Le caractère k -lipschitzien est assez automatique : en utilisant l'inégalité triangulaire

à l'envers et le passage à la borne supérieure, on obtient $\tilde{f}(x) \leq \tilde{f}(y) + k\|x - y\|$, ce qui suffit.

- La fonction f est 2-lipschitzienne. On obtient $\tilde{f}$ en étudiant une fonction $\varphi(a)$ d'une variable.

Exercice 69. On peut par exemple raisonner par récurrence, en utilisant les formules $\frac{x + y \pm |x - y|}{2}$ pour traiter le cas $n = 2$.

Exercice 70.

1. Pour montrer la continuité en f , on pourra utiliser le théorème de Heine à φ sur un segment bien choisi.
2. On pourra déjà analyser l'effet de T sur les fonctions constantes.

Exercice 71.

1. Grâce à une disjonction de cas et un argument de dilatation, on peut essentiellement se ramener au cas où $\|x\| = 1$ et $\|y\| > 1$.
On peut alors mener le calcul en décomposant les vecteurs selon la famille $(x, y - x)$.
2. On peut montrer que, dans ce cas, r est 1-lipschitzienne. C'est un calcul qui se place dans un plan euclidien : faire des dessins !

Exercice 72.

2. On utilisera le théorème de Heine. Spécifiquement, si l'on cherche à montrer la continuité de la composition en (f, g) , on pourra utiliser un module d'uniforme continuité pour g .
3. Là encore, le théorème de Heine (et, spécifiquement, un module d'uniforme continuité pour f^{-1}) sera utile.

Exercice 73. Le théorème des gendarmes peut forcer la continuité en un point d'une fonction par ailleurs abominable.

Exercice 74. La définition du prolongement $\tilde{f}$ est sans histoire, comme sa continuité en tout point de Δ . Pour montrer que $\tilde{f}$ prend des valeurs proches en deux points de $\mathbb{U}$, passer par un point intérieur.

Exercice 75.

1. Étant donné $x \in E$ et $\varepsilon > 0$, on peut trouver $y \in D$ qui soit ε -proche de x et utiliser l'inégalité triangulaire.
2. On peut trouver un exemple où D est un sous-espace vectoriel de E , où les f_n sont des formes linéaires continues, et où g est l'application linéaire nulle. Il faudra évidemment que la suite ne soit pas équipschitzienne !
Un exemple possible est $E = c_0$ (l'espace des suites convergeant vers 0, avec la norme uniforme), $D = c_{00}$ (l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang) et $f_n : u \mapsto nu_n$.
3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sera *équicontinue en a* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in E, \|x - a\| \leq \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\| \leq \varepsilon.$$

Elle sera dite *équicontinue* si elle est équicontinue en tout point.

Il faut alors étendre la démonstration de la première question, en rédaction purement ε/δ .

Exercice 76. Dans $\mathbb{R}^2$, considérer l'hyperbole d'équation $xy = 1$. S'en inspirer pour le cas réel.

Exercice 77. Grâce à la continuité de la fonction distance, le ε -voisinage $\mathcal{U}_\varepsilon(A) = \{x \in E \mid \exists a \in A : \|x - a\| < \varepsilon\}$ est ouvert, quel que soit $\varepsilon > 0$.

Exercice 78.

2. Une des deux inégalités est tautologique. L'autre est facile par rédaction automatique (et passage à la borne supérieure).

Exercice 79.

1. On peut écrire $\mathcal{U}_\varepsilon(A) = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon)$ ou utiliser la continuité de la distance.
2. On voit facilement qu'il s'agit de l'adhérence de A .
3. En restreignant la question précédente aux $\varepsilon = 1/n$, on obtient le résultat pour les fermés. Celui pour les ouverts s'obtient en passant au complémentaire.

Exercice 80. On utilisera (et on combinera entre elles) les fonctions $d(\cdot, F)$.

Exercice 81. Les réponses sont, dans l'ordre : $\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^p |[A]_{i,j}|$, $\max_{1 \leq j \leq p} \sum_{i=1}^n |[A]_{i,j}|$, $\max_{i,j} |[A]_{i,j}|$ et $\max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^p |[A]_{i,j}|^2 \right)^{1/2}$.

Exercice 82.

1. Cauchy-Schwarz.
2. Que vaut $\|I_n\|_F$?

Exercice 83. L'existence d'une telle norme aurait des conséquences sur la structure d'algèbre de $M_n(\mathbb{C})$.

Exercice 84.

1. On pourra remarquer que $\|A\|^*$ est la norme subordonnée d'une forme linéaire φ_A naturellement associée à A .
2. À l'aide de l'expression coordonnée par coordonnée de $\text{tr}(AB)$, on obtient $\|A\|^* = \sum_{i,j} |[A]_{i,j}|$.
3. On pourra montrer et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz non commutative : $|\text{tr}(AB)| \leq \|A\|_F \|B\|_F$.

Exercice 85. On pourra se placer dans une base de Lagrange bien choisie. On doit trouver $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$.

Exercice 86. Inégalité triangulaire.

Exercice 87.

1. Majoration assez brutale.
2. Il est facile de voir que $\forall u \in E, S_n(u) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} S(u)$, mais cela est plus faible que la convergence demandée, qui serait $\|S_n - S\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 88.

1. Une majoration peu subtile montre que u_g est continue et $\|u_g\| \leq \|g\|_\infty$.
Une bosse concentrée permet de montrer que cette inégalité est optimale.
2. L'aspect non borné de $t \mapsto t^{-1/2}$ permet de trouver des fonctions f_n telles que $|\varphi(f_n)| \geq n \|f\|_1$.
3. Pour la norme uniforme, $\|u_g\| = \|g\|_1$, et cela s'étend à la fonction non continue mais intégrable $t \mapsto t^{-1/2}$.

Exercice 89.

1. Quand une norme dérive d'un produit scalaire, il vaut mieux s'en rendre compte plutôt que de montrer à la main l'inégalité triangulaire.
2. La domination stricte de la norme L^2 par la norme uniforme est du cours. Il est clair que la norme H^1

domine la norme L^2 , mais en fait, elle domine même (strictement) la norme uniforme.

- ▶ La norme H^1 permet de contrôler les « écarts » $|f(x) - f(y)|$ mais aussi la valeur moyenne de f , d'où la domination de la norme uniforme.
- ▶ Comme la norme H^1 voit un peu la dérivée, un contre-exemple on ne peut plus classique montre que les deux normes ne sont pas équivalentes.

3. La continuité est claire pour la norme uniforme, et donc pour une autre norme.

Exercice 90. Intégration par parties.

Exercice 91. Soit u un endomorphisme continu. Que peut-on dire des λ pour lesquels l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ possède des solutions non triviales ?

Exercice 92. Commencer par trouver une formule explicite, et écrire des majorations. Pour la norme L^1 (comme à chaque fois que l'on veut contourner une double intégration), une intégration par parties sera utile.

Exercice 93. On peut découper l'intégrale en tranches, ou utiliser l'IPP pour se débarrasser de la double intégration (une pour la norme L^1 , une pour la définition de φ).

Exercice 94. On pourra introduire les polynômes interpolateurs de Lagrange L_j (définis par $L_j(x_i) = \mathbb{1}_{i=j}$) et la fonction $\varphi : t \mapsto \sum_{j=0}^n |L_j(t)|$.

Exercice 95.

2. Le cas $a \in [-1, 1]$ est évident. Pour montrer que, dans les autres cas, la forme linéaire n'est pas continue, on peut commencer par considérer le cas $a > 1$.

Exercice 96.

2. On montre facilement que l'évaluation en 0 est continue (de norme subordonnée 1), pour chacune des trois normes.
3. N_1 domine N_3 , simplement par inégalité triangulaire.
Pour montrer les non-dominations, on pourra notamment étudier le polynôme $(1 - X)^n$.

Exercice 97. On remarquera que l'opérateur d'Euler $\text{Eul} = M \circ D : P \mapsto XP'$ possède des vecteurs propres, c'est-à-dire des polynômes P non nuls tels que $\text{Eul}(P) \in \text{Vect}(P)$.

Exercice 98.

1. On obtient $|\varphi(f)| \leq \|f\|_\infty$, et cette inégalité contiendrait des cas d'égalité non triviaux si on avait le droit aux fonctions continues par morceaux.
2. Grâce à la stricte croissance de l'intégrale, on montre qu'une discontinuité de f est nécessaire pour que $|\varphi(f)| = \|f\|_\infty$, si bien que la norme subordonnée de l'énoncé n'est pas atteinte.

Exercice 99.

1. Une forme positive est croissante, en un sens facile à comprendre. On notera alors que $\|f\|_\infty \leq c$ si et seulement si $-c \leq f \leq c$.
2. L'exemple le plus classique de forme linéaire non continue pour la norme L^1 est positive.

Exercice 100. C'est presque un exercice sur les matrices (de taille infinie) : en notant $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la « base canonique » de E , on définit une famille $(a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall j \in \mathbb{N}, T(e_j) = \sum_{i \in \mathbb{N}} a_{i,j} e_i$. Les « colonnes » de cette famille sont presque nulles.

Avec des notations naturelles, l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre alors $\|Tx\|_2^2 \leq \sum_i \left[\left(\sum_j |a_{i,j}| \right) \left(\sum_j |a_{i,j}| x_j^2 \right) \right]$ et on arrive à majorer cette quantité par $\|T\|_\infty \|T\|_1 \|x\|_2^2$.

Exercice 101. Étant donné un opérateur p de rang fini, on peut trouver $x \in \ker p$ de norme 1. Cela démontre $\|p - \text{id}_E\| \geq 1$.

Exercice 102.

1. Vive la trace !
2. Par récurrence (avec un petit jeu de saute-moutons), on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, f \circ g^n - g^n \circ f = n g^{n-1}$. En considérant un n minimal tel que $g^n = 0$, on montre par l'absurde que l'endomorphisme g n'est pas nilpotent. La sous-multiplicativité de la norme d'opérateur entraîne alors $n \|g^{n-1}\| \leq 2 \|f\| \|g\| \|g^{n-1}\|$, ce qui est une contradiction.

Exercice 103.

1. On a un opérateur clair $u \mapsto u - \lim u$ entre c et c_0 , mais il n'est pas injectif. On peut le modifier un peu (en « faisant un peu de place ») pour se souvenir de la limite et obtenir ainsi un isomorphisme.
2. On montrera la propriété suivante de c_0 : pour toute suite $u \in c_0$ telle que $\|u\|_\infty = 1$, alors l'intersection $\overline{B}(u, 1) \cap \overline{B}(-u, 1) \neq \{0\}$.

Exercice 104.

3. On pourra par exemple se placer dans $E = c_{00} \times c_{00}$, muni de la norme $\|(u, v)\| = \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty)$, où c_{00} est l'espace des suites presque nulles. Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque. « L'axe vertical » $F = \{0\} \times c_{00}$ et le « graphe » $G = \{(u, pu) \mid u \in c_{00}\}$ sont automatiquement supplémentaires, mais les conditions de la question 1 se traduisent en une condition non triviale sur la suite p .

Exercice 105.

1. Seule la séparation pose problème. Si $\|y\|_* = 0$, on voit que y est l'image d'un élément de l'adhérence de $\ker q$.
2. Relever y en un élément $x \in E$ de norme proche de la borne inférieure.