

Séries numériques

Révisions sur les suites

Asymptotique

Exercice 1. *Équivalent de $u_n + u_{n+1}$.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$. Donner un équivalent simple de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 2. *Développement asymptotique d'une somme.*

Donner un développement asymptotique de $\sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$ à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 3. « Mais qui c'est qui invente ces trucs ? ».

Mines

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{n\pi}{3n+1} + \sin \frac{n\pi}{6n+1} \right)^n$.

♠ **Exercice 4.** *Équivalent d'une suite récurrente : détail de la méthode intégrale.*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2. Montrer l'encadrement $\forall n \in \mathbb{N}, \underbrace{(u_{n+1} - u_n)u_n}_{=1} \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} t dt \leq (u_{n+1} - u_n)u_{n+1}$.

3. Montrer que les deux bornes de l'encadrement précédent sont équivalentes quand $n \rightarrow +\infty$.

4. En déduire $\int_{u_0}^{u_n} t dt \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$, puis un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 5. *Équivalent d'une suite récurrente.*

Mines

On définit la suite $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $x_0 > 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{\ln x_n}$. En déterminer un équivalent.

Exercice 6. *Équivalent d'une suite récurrente, avec une sommation des équivalents.*

Soit u la suite définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \ln(u_n)$.

En donner un équivalent.

Exercice 7. *Équivalent d'une suite récurrente multiplicative.*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$.

En donner un équivalent.

Exercice 8. Relation de récurrence asymptotique.

X

Soit $\alpha > 1$, $\lambda > 0$ et $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite strictement positive telle que $u_{n+1} = u_n - \lambda u_n^\alpha + o(u_n^\alpha)$.
Donner un équivalent de $(u_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 9. Développement asymptotique d'une suite récurrente.

X

Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \exp(-x_n)$.
En donner un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 10. Équivalent d'une suite implicite.

Mines (PC)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \prod_{k=0}^n (X - k)$.

1. Montrer que P'_n a une unique racine r_n dans $[0, 1]$.
2. Montrer que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
3. Donner un équivalent de r_n .

Exercice 11. Suite implicite : un développement asymptotique très facile.

X (PSI)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $xe^x = n$ a une unique solution x_n dans $\mathbb{R}$.
Donner la limite puis un équivalent de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 12. Suite implicite : deux développements asymptotiques à précisions fixées.

Montrer que l'équation $x - \ln x = n$ a une unique solution x_n (resp. y_n) dans $]0, 1]$ (resp. $[1, +\infty[$).

Donner un développement asymptotique de x_n à $o(e^{-2n})$ et un développement asymptotique de y_n à $o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$.

Exercice 13. Suite implicite : un développement asymptotique à deux termes.

X

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n la plus grande racine de $X^{2n} - 2nX + 1$.
Donner un développement asymptotique à deux termes de $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

★ **Exercice 14.** Théorème de Mercer (1907).

X

Soit $\alpha > 0$ et $\beta = 1/\alpha$. On définit la suite z par $z_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{\alpha n + 1}{\alpha(n+1)} z_n$.

1. Donner un équivalent de z et sa valeur exacte quand $\beta \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit x une suite réelle et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k$ et $y_n = \alpha x_n + (1-\alpha)\mu_n$.
On suppose $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x \in \mathbb{R}$. Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$.

Valeurs d'adhérence

Exercice 15. Théorème de Bolzano-Weierstrass par le lemme des pics.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \forall k > n, u_k < u_n\}$.

1. En faisant une disjonction de cas suivant que E soit fini ou infini, montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite monotone.
2. En déduire de ce qui précède une nouvelle preuve du théorème de Bolzano-Weierstrass.

♠ **Exercice 16.** Presque du cours, et bientôt du cours.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$. On suppose que u est bornée et qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence $\neq \ell$.
Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

★ **Exercice 17.** Valeurs d'adhérence d'un système dynamique discret.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ et u une suite récurrente d'itératrice f .

On suppose que u possède une unique valeur d'adhérence. Montrer qu'elle converge.

Δ **Exercice 18.** Application du lemme de la valeur d'adhérence unique.

X

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Δ **Exercice 19.** Connexité de l'ensemble des valeurs d'adhérence.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un intervalle.

Exercice 20. Puits de potentiel.

Lyon

1. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$.

Montrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

2. La même conclusion tient-elle pour trois suites réelles $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les convergences $a_n + b_n + c_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et $e^{a_n} + e^{b_n} + e^{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$?

Exercice 21. Une application des limites supérieure et inférieure.

1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée.

(a) Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une plus petite valeur d'adhérence α et une plus grande valeur d'adhérence β .

(b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que u_n prend ses valeurs dans $[\alpha - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ à partir d'un certain rang.

2. **Application.** Montrer que la suite définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}$ converge.

★ **Exercice 22.** Une suite récurrente perturbée.

X

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = u_n + u_n^2 + o(1)$.

Montrer que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ou $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

★ **Exercice 23.** Suite possédant beaucoup de multiples presque entiers.

X (MPI)

Soit $a < b$ réels et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour tout $t \in [a, b]$, il existe une suite d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $tu_n - k_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Montrer $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

★★ **Exercice 24.** Valeurs d'adhérence de $(x_n(1 - x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$.

ÉNS

1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $]0, 1[$.

Montrer que $(x_n(1 - x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $\leq \frac{1}{4}$.

2. On suppose que $(x_n(1 - x_{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ n'admet pas de valeur d'adhérence $< \frac{1}{4}$.

Montrer que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$.

Autres questions de convergence

Exercice 25. Suite double.

ÉNS (PC)

Soit $(x_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$ une famille de réels indexée par $\mathbb{N}^2$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n,k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \alpha$.

Montrer qu'il existe une suite croissante $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{n,k_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \alpha$.

Exercice 26. Système dynamique perturbé : convergence.

Mines

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite récurrente définie par $u_0 = x > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \frac{1}{n+2}$.

1. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_N > 1$.
2. Montrer qu'il existe $n_0 > N$ tel que $(u_n)_{n \geq n_0}$ est décroissante.
3. La suite u est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.

★ Exercice 27. Suite récurrente complexe.

X

Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $z_0 \in \mathbb{C}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}, z_{n+1} = \frac{1}{2} \left(z_n + \frac{1}{z_n} \right)$.

Étudier la bonne définition de la suite et sa convergence éventuelle, d'abord pour z_0 réel, puis pour z_0 complexe.

Δ Exercice 28. Lemme sous-additif de Fekete.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite positive sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}^*, u_{n+m} \leq u_n + u_m.$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \forall m \geq N, \frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \delta$.
2. Montrer que

$$\frac{u_n}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf \left\{ \frac{u_k}{k} \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

★ Exercice 29. Suite stable par produit.

ÉNS

Soit $S \subseteq \mathbb{N}^*$ infini et stable par produit.

On note $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite strictement croissante constituée des éléments de S .

Montrer que $\left(\frac{s_{n+1}}{s_n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge dans $[1, +\infty[$.

Mélange

Exercice 30. Contrôle des différences finies.

ÉNS (PC)

Soit $\gamma \in]0, 1]$ et x une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} \leq x_n + x_n^{1-\gamma}$. Montrer que $x_n = O(n^{1/\gamma})$.

Exercice 31. Différences finies.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. On pose $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (v_{n+1} - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrer que si $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $w_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

★ Exercice 32. Système dynamique perturbé : point répulsif.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on définit une suite $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0(a) = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1}(a) = u_n^2(a) - 100 + \sin n$.

Montrer qu'il existe un unique $a \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$ soit bornée et à valeurs positives.

Exercice 33. *Liberté modulo c_0 .*

ÉNS

Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $z_1, \dots, z_m \in \mathbb{U}$ distincts et $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$. On suppose $\sum_{k=1}^m a_k z_k^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer $a_1 = \dots = a_m = 0$.

★ **Exercice 34.** *Suite égale à ses moyennes ultérieures.*

X (MPI)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite minorée telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_k$.

Montrer que u est constante.

Séries

Nature de SÀTP : exemples

Exercice 35. *Nature de séries à termes plutôt positifs.*

Déterminer la nature des séries suivantes.

- (i) $\sum_n \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;
- (ii) $\sum_n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$;
- (iii) $\sum_n \frac{n^\gamma + \ln n}{n^2}$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$;
- (iv) $\sum_n \left(\sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}\right)$, pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ (et déterminer la somme le cas échéant);
- (v) $\sum_n \frac{a^n \cdot 2^{\sqrt{n}}}{b^n + 2^{\sqrt{n}}}$, pour $a, b > 0$;
- (vi) $\sum_n (1 - \text{th}(n))$;
- (vii) $\sum_n \left(\sqrt[3]{n^3 + \alpha n^2 + \beta n + \gamma} - \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$, pour $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$;
- (viii) $\sum_n \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{4}\right)$, pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$;
- (ix) $\sum_n \left(\cos \frac{1}{n}\right)^{n^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$;

Exercice 36. *Une série d'intégrales.*

- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $A \mapsto \int_1^A e^{-x^n} dx$ admet une limite quand $A \rightarrow +\infty$, que l'on notera $\int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.
- Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \int_1^{+\infty} e^{-x^n} dx$.

Exercice 37. *Nature d'une série.*

X

Quelle est la nature de la série $\sum_n \ln\left(\frac{\ln(n+1)^2}{\ln n \ln(n+2)}\right)$?

Nature de SÀTP : théorie

Exercice 38. *Nature par comparaison.*

Soit $\alpha > 0$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha \ln(n)$.

Montrer que si $\alpha > 1$ (resp. < 1), alors $\sum_n e^{-u_n}$ converge (resp. diverge).

Exercice 39. *Petites manipulations.*

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs.

1. Montrer que la convergence de $\sum_n a_n$ entraîne celle de $\sum_n \sqrt{a_n a_{n+1}}$.
2. Montrer que la réciproque est vraie si on suppose que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît, mais qu'elle n'est pas vraie en général.

Exercice 40. *Une inégalité.*

Mines

On suppose que $\sum a_n$ est une série à termes positifs convergente. Montrer que $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ converge.

Exercice 41. *Transformation de séries convergentes.*

X

Soit $\sum_{n \geq 1} a_n$ une série à termes positifs convergente.

1. Montrer que si $\alpha > \frac{1}{2}$, alors la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{a_n}}{n^\alpha}$ converge.
2. Que dire si $\alpha = \frac{1}{2}$?

★ **Exercice 42.** *Manipulation d'inégalités.*

Ulm (MPI)

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive telle que $\sum_n u_n < +\infty$.

Montrer que $\sum_n \frac{1}{1+n^2 u_n} = +\infty$.

Exercice 43. *Normes ℓ^2 dans un hyperplan affine de ℓ^1 .*

X (PC)

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n = A$. Quelles valeurs peut prendre la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2$?

★ **Exercice 44.** $\ell^1 = c_0^*$.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que, pour toute suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0, la série $\sum_n u_n v_n$ converge.

Montrer que $\sum_n u_n$ converge absolument.

Exercice 45. *Condition nécessaire d'Abel-Pringsheim.*

1. Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente dont le terme général décroît.
Montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Soit $(\theta(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante telle que $\theta(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Montrer qu'il existe une SÀTP convergente $\sum_n u_n$ dont le terme général décroît et vérifie $u_n \neq o\left(\frac{1}{n\theta(n)}\right)$.

Exercice 46. *Pas d'Abel-Pringsheim sans décroissance.*

Soit $(\delta_n)_{n \geq 1}$ une suite strictement positive convergeant vers 0.

Montrer qu'il existe une SÀTP convergente $\sum_n u_n$ telle que $u_n \neq o(\delta_n)$.

Exercice 47. *Toujours un peu plus grand/petit.*

Mines (PC)

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes positifs convergente (resp. divergente). Montrer qu'il existe une suite b_n positive tendant vers $+\infty$ (resp. 0) telle que $\sum_n a_n b_n$ soit encore convergente (resp. divergente).

Exercice 48. *Un critère de convergence.*

X

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissant vers 0. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = u_n - u_{n+1}$.

1. Montrer l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{+\infty} k d_k$ dans $[0, +\infty]$.
2. En déduire que la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite $\left(\sum_{k=1}^n u_k - n u_n \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

Exercice 49. *Critère de Raabe-Duhamel.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

1. Montrer que si $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, alors $\sum a_n$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha < 1$.
Montrer que l'on ne peut pas conclure si $\alpha = 1$.
2. On suppose $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et $\alpha < 1$.

Montrer l'existence d'une constante $C > 0$ telle que $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C n^{1-\alpha}$.

★ **Exercice 50.** *Critère de Gauss et séries hypergéométriques.*

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite strictement positive.

1. Démontrer le *critère de Gauss* : s'il existe $\lambda > 1$ tel que $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^\lambda}\right)$, alors la série $\sum a_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.
2. **Application.** Pour $z \in \mathbb{C}$ et $m \geq 1$, on définit la *factorielle montante* $z^{\overline{m}} = z(z+1)\cdots(z+m-1)$ (et $z^{\overline{0}} = 1$).

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Pour quelles valeurs de $x \in \mathbb{R}$ la série hypergéométrique $\sum_{n \geq 0} \frac{\alpha^{\overline{n}} \beta^{\overline{n}}}{\gamma^{\overline{n}}} \frac{x^n}{n!}$ converge-t-elle ?

Exercice 51. *Critère de condensation de Cauchy.*

1. Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle décroissant vers 0. Montrer que $\sum_n a_n$ et $\sum_n 2^n a_{2^n}$ ont même nature.
2. Quelle est la nature de la série $\sum_n \frac{1}{n \ln(n) \ln(\ln(n))^\alpha}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$? Généraliser.

Exercice 52. *Une convergence par paquets dyadiques.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrer que $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge.

Exercice 53. Une divergence par paquets dyadiques.

X-ÉNS

Soit $\sum_n a_n$ une série à termes strictement positifs telle que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq a_{2n} + a_{2n+1}$.

Montrer que la série diverge.

Exercice 54. Sommation par paquets.

Soit $\sum a_n$ une série et φ une extractrice telle que $\varphi(0) = 0$. On pose, pour $p \in \mathbb{N}$, $S_p = \sum_{\varphi(p) \leq k < \varphi(p+1)} a_k$.

1. Montrer que si $\sum_n a_n$ converge, il en va de même de $\sum_p S_p$ et qu'alors $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum_{p=0}^{+\infty} S_p$.
2. Montrer que la réciproque est fautive.
3. Montrer que si $\sum_p S_p$ converge et que $\sum_{\varphi(p) \leq k < \varphi(p+1)} |a_k| \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, alors $\sum_n a_n$ converge.

Δ^* **Exercice 55.** Séries définies par une permutation.

Lyon

1. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ une fonction injective. Montrer que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.
2. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ telle que $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ diverge.

Nature de séries signées ou complexes : exemples

Exercice 56. Comparaison possible ?

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe telles que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} b_n$.

1. Est-il vrai que si $\sum a_n$ converge, alors $\sum b_n$ converge ?
2. Est-il vrai que si $\sum a_n$ diverge, alors $\sum b_n$ diverge ?

Exercice 57. Développement asymptotique et critère spécial.

Déterminer la nature des séries suivantes.

- | | |
|--|--|
| (i) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$. | (iv) $\sum_n \sin(\sqrt{1 + n^2 \pi^2})$; |
| (ii) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right]$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$; | (v) $\sum_n \frac{\sin(n)}{n + (-1)^n}$; |
| (iii) $\sum_n \frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n} + (-1)^n}$, pour $\alpha \in \mathbb{R}$; | (vi) $\sum_n \sin\left(\frac{\sin(n)}{n^{1/3}}\right)$. |

Exercice 58. Des natures de séries posées aux concours.

Déterminer la nature des séries suivantes.

- | | |
|--|--|
| (i) $\sum_n u_n$, où $\alpha > 0$ et $u_n = \int_n^{2n} \frac{dt}{1 + t^\alpha}$; | (iv) $\sum_n \frac{1}{\ln(n) + (-1)^n n^\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; |
| (ii) $\sum_n \frac{1}{u_n}$, où $u_n = \sum_{k=1}^n \ln(k)^2$; | (v) $\sum_n u_n^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}, u_0 \in]0, \pi[$ et $u_{n+1} = \sin u_n$; |
| (iii) $\sum_n \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \ln(n)^\alpha \sqrt{n}}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$; | (vi) $\sum_n \frac{\cos(\ln(n))}{n}$. |

Exercice 59. Une série sur laquelle Wolfram|Alpha se plante.

Déterminer la nature de la série $\sum_n \sin(2n \arctan(n^2))$.

Exercice 60. Une série alternée.

Soit $(R_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. Déterminer la nature de la série $\sum_n R_n$.

Exercice 61. Terme général donné par une suite récurrente.

On définit une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\exp(-u_n)}{n+1}$.

Déterminer la nature des séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n (-1)^n u_n$.

Exercice 62. Une suite dans $\ell^2 \setminus \ell^1$.

Soit $a \in [0, 1]^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n a_n$ diverge mais $\sum_n a_n^2$ converge. Soit $f \in C^2([0, 1])$.

Montrer que la série $\sum_n f(a_n)$ converge si et seulement si elle converge absolument.

Exercice 63. Série d'intégrales d'une fonction périodique.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ 1-périodique et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Montrer que $u_n = \frac{1}{n} \int_0^1 f + O(n^{-2})$ et en déduire la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$.

Exercice 64. Nombre de Pisot, détaillé.

1. Déterminer une formule pour la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2, \quad u_1 = 6 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \sin(2\pi(3 + \sqrt{5})^n)$?

Exercice 65. Nombre de Pisot.

Déterminer la nature de la série $\sum_n \sin((1 + \sqrt{2})^n \pi)$.

Exercice 66. Une série assez oscillante.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n}$.

Exercice 67. Une série oscillante, mais pas assez.

Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$.

Calculs de sommes

Exercice 68. *Périodique fois télescopique.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note r_n le reste dans la division euclidienne de n par 5, et $a_n = \frac{r_n}{n(n+1)}$.

1. Montrer que la série $\sum_n a_n$ converge.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{5n} a_k = H_{5n} - H_n$.
3. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Exercice 69. *Calcul de somme.*

Monier

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Exercice 70. *Un calcul exact.*

X

Calculer $\left\lfloor \sum_{n=1}^{10^9} \frac{1}{n^{2/3}} \right\rfloor$.

Exercice 71. *Calcul de somme, bis.*

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

★ **Exercice 72.** *Calcul de somme, ter.*

Montrer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et calculer sa somme.

Applications

Exercice 73. *Un équivalent via une série.*

1. Prouver $\sum_{k=1}^n \frac{2^k}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{n}$.
2. Donner un équivalent simple de la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n+1}$.

Exercice 74. *Un équivalent via un produit infini.*

Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0, u_1 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 2u_n + \frac{u_{n-1}}{n^2}$.

Montrer qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha 2^n$.

Exercice 75. *Majoration de Čebyšëv.*

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers $\leq n$.

1. On admet $\pi(2n) - \pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$. En déduire $\pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$.
2. Montrer que le produit $\prod_{n < p \leq 2n} p$ divise $\binom{2n}{n}$, et en déduire le résultat admis à la question précédente.
(Dans le produit, p décrit les nombres **premiers** vérifiant l'encadrement).

Exercice 76. Une condition suffisante de convergence.

Soit $u \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, u_{k+1} \leq u_k + \frac{1}{k^2}$. Montrer que u converge.

Exercice 77. Formule de Stirling (méthode de Courant).

1. Donner un équivalent de l'aire u_n comprise entre le graphe de $\ln$ sur $[n, n+1]$ et la corde correspondante.
2. En déduire un DA à 5 termes de $\ln n!$ puis un DA à deux termes de $n!$.

Mélange

Exercice 78. Une équation fonctionnelle avec continuité.

1. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in C^0([0, 1])$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{3^n}$.

Exercice 79. Sommes de sous-séries.

Soit $\sum_n u_n$ une série à termes positifs convergente telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Montrer que pour tout $S \in \left[0, \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right]$, il existe un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ tel que $S = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{1}_A(k) u_k$.

Semi-convergence

Exercice 80. Théorème de Dvoretzky-Hanani.

1. Soit (a_n) une suite de nombres réels tendant vers 0. Montrer qu'il existe une suite de signes $(\varepsilon_n) \in \{\pm 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \varepsilon_n a_n$ converge.
2. Montrer le même résultat pour une suite complexe $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 81. Un cas particulier du critère d'Abel.

Soit $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_n u_n$ converge. Montrer que $\sum_n \frac{u_n}{n}$ converge.

Exercice 82. Série oscillante.

X

Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\sin(\ln n)}{n}$?

Δ^* **Exercice 83.** Fonctions préservant la convergence.

On dit que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *préserve la convergence* si pour toute série $\sum_n a_n$ convergente, la série $\sum_n f(a_n)$ converge également. On souhaite montrer que les fonctions préservant la convergence sont exactement les fonctions linéaires au voisinage de 0.

0. Montrer le sens facile.

Dans la suite de l'exercice, on fixe une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ préservant la convergence.

1. Montrer que $f(0) = 0$ et que f est continue en 0.
2. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert V contenant 0 tel que $\forall x, y \in V, f(x+y) = f(x) + f(y)$.
3. Conclure.

Comparaison série-intégrale

Exercice 84. *Asymptotique du reste d'une série de Bertrand.*

Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, puis déterminer un équivalent du reste.

★ **Exercice 85.** *Asymptotique autour des nombres harmoniques.*

Mines

On note $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1. Montrer l'existence d'une constante $\gamma > 0$ telle que $H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O(n^{-2})$.
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $N(k)$ le plus petit entier $n \geq 1$ tel que $H_n \geq k$.
Donner un équivalent de $(N(k))_{k \in \mathbb{N}^*}$.
3. (a) Donner un équivalent de $a_n := \left| \{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid xy = z\} \right|$ quand $n \rightarrow +\infty$.
(b) Donner un équivalent de $b_n := \left| \{(x, y, z) \in \llbracket 1, n \rrbracket^3 \mid xy = z^2\} \right|$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 86. *La méthode de la fleur.*

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, +\infty[)$ concave et croissante.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{f(k) + f(k+1)}{2} \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k) + \frac{((k+1) - k)}{2} f'(k).$$

Faire un schéma.

2. En déduire qu'il existe $C_f \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sum_{k=1}^n f(k) = \int_1^n f(t) dt + \frac{f(n)}{2} + C_f + o_{n \rightarrow +\infty}(1).$$

Faire un schéma.

3. Quelle formule obtient-on pour $f = \ln$?

Exercice 87. *Une comparaison série-intégrale non monotone.*

Mines

1. Déterminer la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt$.
2. Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\ln(n))}{n}$.

♠★ **Exercice 88.** *Séries de Hardy.*

ÉNS

1. Soit $f \in C^1([1, +\infty[)$ telle que $x \mapsto \int_1^x |f'(t)| dt$ converge en $+\infty$ (on dit que f' est *intégrable*).

Montrer que $\sum_{n \geq 1} f(n)$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_1^x f(t) dt$ converge en $+\infty$.

2. Soit $\alpha > 0$. Pour quelles valeurs de α la série $\sum_n \frac{\sin \sqrt{n}}{n^\alpha}$ converge-t-elle?

★ **Exercice 89.** Des sommes pas tout à fait de Riemann.

Centrale

Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $r_k(n)$ le reste de la division euclidienne de n par k .

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n r_k(n)$.

1. Soit $f :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 1 - x \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$. Montrer que $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.
2. (a) Montrer que f est intégrable sur $]0, 1]$.
 (b) Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f$. Comparer u_n à $\int_0^1 f$.
 (c) Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème sur les sommes de Riemann à $\int_0^1 f$?
3. (a) Montrer que $\int_0^1 f - S_n = \sum_{k=1}^n \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left(f(t) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right) dt$.
 (b) Montrer que $\int_0^1 f - S_n = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Exercice 90. Dérivée logarithmique convergente.

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que le quotient $\frac{f'}{f}$ est bien défini au voisinage de $+\infty$, de limite $\lambda \neq 0$.

Déterminer la nature de $\sum_n f(n)$.

Exercice 91. Terme général et sommes partielles, détaillé.

X (PSI)

Soit $\sum a_n$ une série à termes positifs et $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$ sa somme partielle telles que $a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1. Montrer que $\sum a_n$ diverge et que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. Montrer que $S_{n+1} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} S_{n+2}$.
3. Montrer que $S_{n+1}^2 - S_{n+2}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -2$.
4. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$.
5. Réciproquement, montrer que si $b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2n}}$, alors $b_n \sum_{k=0}^n b_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Exercice 92. Terme général et sommes partielles.

X

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels telle que $a_n \sum_{k=1}^n a_k^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Donner un équivalent de la suite $(a_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 93. Développement asymptotique à trois termes.

Donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes et enfin un développement

asymptotique à trois termes de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Familles sommables

Exercice 94. Sommabilité.

Mines

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\left(\frac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{p,q \geq 1}$ soit sommable.

Exercice 95. Séries de Kempner.

Soit $E \subseteq \mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers > 0 dont l'écriture en base 10 ne contient pas le chiffre 7.

Montrer que $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in E}$ est sommable.

★ Exercice 96. Densité de l'ensemble des nombres premiers.

X

Soit $A \subseteq \mathbb{N}^*$. On dira que A est de densité nulle si $|A \cap [1, n]| = o_{n \rightarrow +\infty}(n)$.

1. Montrer que si $\sum_{k \in A} \frac{1}{k} < +\infty$, alors A est de densité nulle.
2. Montrer que la réciproque est fautive.
3. On suppose que les éléments de A sont deux à deux premiers entre eux. Montrer que A est de densité nulle.

Calculs de sommes

Exercice 97. Somme des restes de la série zêta.

Soit $p \geq 3$ un entier. Calculer $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^{p+1}}$.

Exercice 98. Moments de la loi de Poisson.

Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n!}$ et en déduire $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^4}{n!}$.

Exercice 99. Fonctions génératrices.

Soit $x \in \mathbb{C}$ un nombre de module < 1 . Montrer les égalités suivantes.

- (i) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n - x^{n^2}}{1-x^n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2};$
- (ii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{1-x^{2n-1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1-x^{2n}};$
- (iii) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{1-x^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)^2}.$

Dans tous les cas, écrire la quantité de l'énoncé sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, pour une certaine suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dont on donnera une interprétation arithmétique.

Exercice 100. Une jolie formule.

Montrer

$$\sum_{n,m \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{nm(n+m)} = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H_n}{n^2} = 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{H_n}{(n+1)^2} = 2\zeta(3).$$

Exercice 101. Une somme arithmétique.

Calculer $\sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ p \wedge q = 1}} \frac{1}{p^2 q^2}$ en fonction de $\zeta(2)$ et $\zeta(4)$.

Exercice 102. Une conséquence de $\sigma_0 = 1 * 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\sigma_0(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n . Montrer $\sum_{n \geq 1} \frac{\sigma_0(n)}{n^2} = \frac{\pi^4}{36}$.

Exercice 103. Une magnifique identité.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varphi(n)}{2^n - 1}$, où φ est l'indicatrice d'Euler.

Exercice 104. Un théorème de Goldbach.

Soit $P = \{4, 8, 9, 16, 25, 27, 32, \dots\}$ l'ensemble des puissances parfaites (en excluant 1).

Calculer $\sum_{n \in P} \frac{1}{n-1}$.

★ **Exercice 105.** Somme d'une série.

Si n est un entier, on note $b(n)$ le nombre de bits égaux à 1 dans son écriture binaire.

Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b(n)}{n(n+1)}$.

Mélange

★ **Exercice 106.** Séries d'Eisenstein.

On définit $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{H}$. Montrer qu'il existe $A_z \geq 0$ tel que

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \frac{1}{|az + b|^k} \leq \frac{A_z}{\max(|a|, |b|)^k}.$$

2. Soit $k \geq 3$ un entier et $z \in \mathbb{H}$. Montrer que la famille $\left(\frac{1}{(nz + m)^k} \right)_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ est sommable.

3. Soit $G_k : \begin{cases} \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}} \frac{1}{(nz + m)^k} \end{cases}$. Calculer G_k quand k est impair.

4. On suppose k pair. Montrer $G_k(iy) \xrightarrow{y \rightarrow +\infty} 2\zeta(k)$.

5. Soit $z \in \mathbb{H}$. Calculer $G_k(z+1)$ et $G_k(-1/z)$.

Exercice 107. Deux séries de même nature.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue bijective.

Montrer que les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{f(n)}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{f^{-1}(n)}{n^2}$ ont la même nature.

★ **Exercice 108.** *Majoration à partir d'un certain rang.*

Étant donné deux suites $u, v \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, on notera $u \preccurlyeq v$ si $u \leq v$ à partir d'un certain rang.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum_n u_k(n)$ converge.

Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall k \in \mathbb{N}, u_k \preccurlyeq v$ et $\sum_n v(n)$ converge.

Exercice 109. *La « barrière logarithmique ».*

Étant donné un ensemble $A \subseteq \mathbb{N}^*$, on considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (|A \cap \llbracket 1, n \rrbracket|)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n}{\ln n} \Rightarrow \sum_{k \in A} \frac{1}{k} = +\infty$.

2. Montrer que $a_n = O_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{\ln(n) \ln(\ln(n))^2} \right) \Rightarrow \sum_{k \in A} \frac{1}{k} < +\infty$.

Exercice 110. *Ordre moyen de la fonction σ_1 .*

On note $\sigma_1 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction qui associe à un entier n la somme de ses diviseurs (positifs).

Montrer $\sum_{n \leq x} \sigma_1(n) = Cx^2 + O_{x \rightarrow +\infty}(x \ln(x))$, où C est une constante que l'on précisera.

★★ **Exercice 111.** *Principe de l'hyperbole de Dirichlet.*

X-ÉNS

On note $\sigma_0 : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction qui associe à un entier n son nombre de diviseurs.

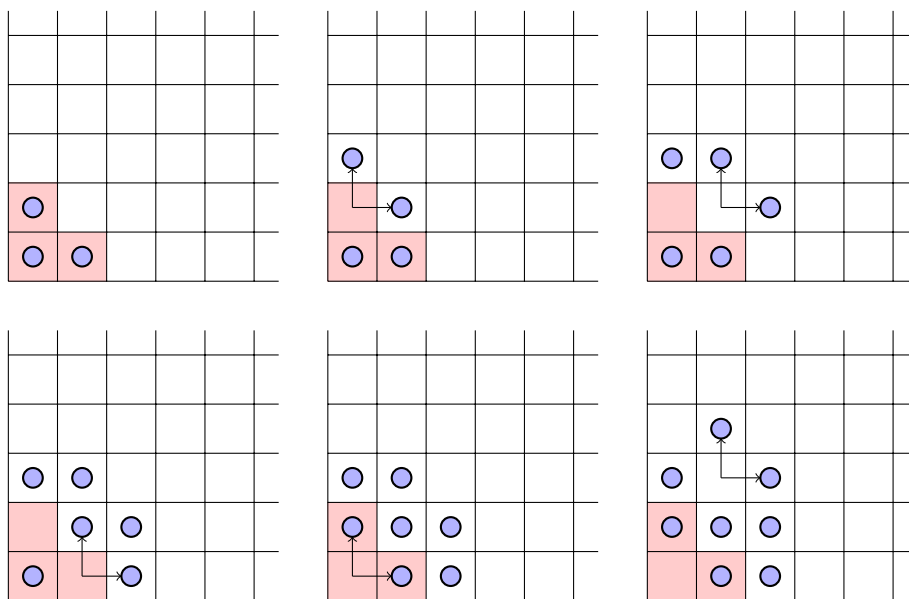
1. Donner un équivalent de $x \mapsto \sum_{n \leq x} \sigma_0(n)$.

2. Mieux : donner un développement asymptotique de la même fonction à la précision $O(\sqrt{x})$.

Exercice 112. *Escape!*

Le jeu solitaire *Escape* se joue sur un échiquier infini dont les cases sont « numérotées » par $\mathbb{N}^2$.

Au départ, trois pions sont posés sur les cases $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. À chaque étape le joueur remplace un pion situé en (i, j) par deux pions situés en $(i+1, j)$ et $(i, j+1)$. Ce coup n'est légal que si les cases $(i+1, j)$ et $(i, j+1)$ étaient vides.



Les cinq premiers coups d'une partie de *Escape*.

Montrer qu'en jouant à *Escape*, il est impossible de libérer les trois cases de départ.

Indications

Exercice 1. La décroissance de u permet d'encadrer u_n entre deux termes de la forme $u_k + u_{k+1}$.

Exercice 2. La formule de Taylor-Young peut suffire, au prix d'une démonstration epsilonlesque (pas question de sommer n développements limités à la diable). Les formules de Taylor globales donnent une démonstration plus directe.

Exercice 3. C'est du calcul asymptotique bête et méchant. La réponse est $\exp\left(\frac{\sqrt{3}\pi}{24}\right)$.

Exercice 4.

1. Le théorème de la limite monotone garantit que u possède une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et il n'y a plus qu'à exclure les limites réelles.
2. Encadrement grossier de l'intégrale d'une fonction croissante.
3. La relation de récurrence montre $u_{n+1} = u_n + o(1)$, ce qui est plus précis.
4. Lemme de Cesàro (ou sommation des équivalents).

Exercice 5. La méthode intégrale marche très bien.

Exercice 6. La méthode intégrale marche très bien, avec deux étapes notables :

- ▶ la relation de récurrence donne $u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} u_n$, et on en déduit $\ln(u_{n+1}) = \ln(u_n) + o(1)$, ce qui est plus fort que l'équivalent $\ln(u_{n+1}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(u_n)$ dont nous avons besoin ;
- ▶ on obtient à la fin $\int_{u_0}^{u_n} \frac{dt}{\ln(t)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

La sommation des équivalents est alors utile pour montrer $\int_{u_0}^x \frac{dt}{\ln(t)} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{x}{\ln(x)}$.

Exercice 7. Une fois que l'on sait que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, la relation de récurrence exacte donne une relation de récurrence « asymptotique » $u_{n+1} = u_n - u_n^2 + o(u_n^2)$, et la méthode intégrale marche à nouveau très bien.

Exercice 8. La méthode intégrale marche très bien.

Exercice 9. La méthode intégrale fournit très vite un équivalent, mais il est en fait plus simple de passer par la suite auxiliaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\exp(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.

À l'aide d'un DL de $\exp$, on obtient la relation $u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{2u_n} + o(u_n^{-1})$. On en déduit rapidement $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$ puis, par sommation des relations d'équivalents, que $u_n = n + \frac{\ln(n)}{2} + o(\ln(n))$. Il ne reste plus qu'à passer ce développement asymptotique au logarithme.

Exercice 10. Pour les deux dernières questions (et à vrai dire pour la première aussi, si l'on veut être original), on pourra passer par la formule pour la dérivée logarithmique $\frac{P'_n}{P_n}$.

Exercice 11. Une simple étude de fonction montre $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

La relation définissant x_n se réécrit $x_n + \ln(x_n) = \ln(n)$, ce qui donne immédiatement l'équivalent souhaité.

Exercice 12.

- ▶ On obtient facilement $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et même l'équivalent $x_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} e^{-n}$ (ou, ce qui revient au même $\ln(x_n) = -n + o(1)$). En écrivant la relation sous la forme « auto-amélioratrice » $x_n = e^{-n} \exp(x_n)$ et en utilisant des DL de l'exponentielle d'ordres de plus en plus grands, on obtient essentiellement un

développement asymptotique à toute précision souhaitée.

- Même idée, avec $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et la forme « auto-amélioratrice » $y_n = n + \ln(y_n)$.

Exercice 13. On vérifie facilement que $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n \in [1, 2]$ et on en déduit rapidement $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

On peut alors obtenir le renseignement asymptotique $(2n-1)\ln(r_n) = \ln(n) + \ln(2) - \frac{1}{2nr_n} + o(1/n)$, d'où l'on déduit un équivalent de $\ln(r_n)$ puis un DA à deux termes de r_n .

Exercice 14.

1. On passera au logarithme pour obtenir l'équivalent. Celui-ci fera intervenir la somme d'une certaine série absolument convergente, et donc une constante > 0 inconnue.
2. On pourra supposer $x = 0$ et éliminer les redondances (entre x et μ) en exprimant μ_n en fonction de μ_{n-1} et y_n . La relation de récurrence se simplifie en introduisant le produit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((n+1)\mu_n z_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, qui vérifiera $p_{n+1} = p_n + o(z_n)$. La question 1 permettra d'en déduire $p_n = o(n^{1/\alpha})$, ce qui conclura rapidement.

Exercice 15. Si E est fini, on a $\exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N, \exists k > n : u_k \geq u_n$ et on construit par récurrence une sous-suite croissante. Si E est infini, on construit par récurrence une sous-suite décroissante (en n'utilisant que les éléments de E).

Exercice 16. Soit $\varepsilon > 0$. Si la suite u n'était pas ε -proche de ℓ à partir d'un certain rang, on pourrait trouver une sous-suite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)} - \ell| \geq \varepsilon$, et le théorème de Bolzano-Weierstrass, appliqué à cette sous-suite, fournirait une contradiction.

Exercice 17. Soit $\varepsilon > 0$ et notons ℓ l'unique valeur d'adhérence. Si la suite n'était pas ε -proche de ℓ , elle devrait infiniment souvent entrer et sortir de l'intervalle $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Où se trouve-t-elle immédiatement après être sortie de cet intervalle ?

Exercice 18. On pourra montrer que l'ensemble V des valeurs d'adhérence de la suite est borné et stable sous une certaine application affine, pour en déduire qu'il s'agit en fait d'un singleton.

Exercice 19. On revient à la définition des intervalles en fixant deux valeurs d'adhérence $a < b$. On va montrer que si S est un (petit) segment situé entre a et b , alors la suite va prendre infiniment souvent des valeurs dans S . Pour cela, on pourra s'appuyer sur le fait qu'aussi tard qu'on le souhaite, la suite va faire des passages près de a et de b . Si on attend suffisamment longtemps, elle fera de tout petits pas et ne pourra pas « enjambrer » S .

Exercice 20.

1. On pourra montrer que les suites sont bornées et utiliser le « lemme de la valeur d'adhérence unique », pour la suite $((a_n, b_n))_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (en vérifiant qu'il reste vrai dans ce contexte).
2. Malgré la façon dont la question est posée, la réponse est oui !

Exercice 21.

2. Les nombres α et β sont optimaux pour la propriété de la question précédente. Mais la relation de récurrence montre que (à des ε près), la suite sera à valeurs dans $[2/\beta, 2/\alpha]$ à partir d'un certain rang, ce qui montre $\alpha\beta = 2$.
Une petite « analyse rétrograde » montre alors que si une extractrice φ vérifie $u_{\varphi(k)} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \alpha$ (resp. β), alors $u_{\varphi(k)-1}, u_{\varphi(k)-2} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \beta$ (resp. α), ce qui force rapidement $\alpha = \beta$.

Exercice 22. On pourra commencer par montrer que si la suite prend une infinité de valeurs > 1 , alors elle diverge vers $+\infty$. Une fois cela fait, on peut la supposer bornée, et montrer qu'elle possède une unique

valeur d'adhérence (parce que l'ensemble V des valeurs d'adhérence doit être à la fois borné et invariant par $x \mapsto x + x^2$).

Exercice 23. Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, on peut construire par récurrence une extractrice φ et une suite de segments emboîtés $S_n \subseteq [a, b]$ tels que, pour tout $t \in S_n$, la distance entre $tu_{\varphi(n)}$ et $\mathbb{Z}$ soit $\geq \frac{1}{4}$. Cela est impossible et montre même que l'on peut supposer la suite u bornée.

On montre alors que la seule valeur d'adhérence possible pour cette suite est 0.

Exercice 24. Un point important dans cet exercice est que si $a \leq b$ appartiennent à $[0, 1]$, alors $a(1-b) \leq \frac{1}{4}$. On pourra alors considérer l'ensemble $\mathcal{M} = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \leq x_{n+1}\}$ des « montées » de la suite.

Exercice 25. On peut faire une construction par récurrence, une fois que l'on a renforcé l'objectif en un contrôle quantitatif $|x_{n,k_n} - \alpha| \leq \varepsilon_n$, pour une suite $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ explicite, dont le choix n'importe d'ailleurs guère.

Exercice 26.

1. Un calcul approché montre que $u_2 > 1$, mais je pense que l'argument attendu est plus qualitatif, basé sur la minoration évidente $u_n \geq x^{2^{-n}} + \frac{1}{n+1}$. Comme la convergence du premier terme vers 1 est très rapide, le deuxième terme suffit à obtenir l'inégalité stricte.
2. On peut montrer que si la suite commence à décroître (si $u_{n_0+1} \leq u_{n_0}$) alors elle décroît à partir de ce rang. Comme on exclut facilement qu'elle croisse toujours, cela conclut.

Exercice 27. La transformation $f : z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$ possède deux points fixes : ± 1 . On y voit plus clair en conjuguant tout par une homographie qui envoie ces deux points fixes sur 0 et ∞ , comme $\varphi : z \mapsto \frac{z-1}{z+1}$, dont la réciproque est $\varphi^{-1} : w \mapsto \frac{1+w}{1-w}$. On en déduit que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\varphi(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente, d'itératrice

$$w \mapsto (\varphi \circ f \circ \varphi^{-1})(w) = \varphi \left(f \left(\frac{1+w}{1-w} \right) \right) = \varphi \left(\frac{1+w^2}{1-w^2} \right) = w^2.$$

Exercice 28. Dans la première question, on pourra penser à faire la division euclidienne de m par n .

Exercice 29. Si $a < b \in S$, on a pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$, une progression géométrique $a^\ell, a^{\ell-1}b, \dots, ab^{\ell-1}, b^\ell$ d'éléments de S de raison $\frac{b}{a}$ et de longueur ℓ . En voyant comment ces différentes progressions géométriques s'agencent, on peut en déduire que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \leq \frac{b}{a}$ à partir d'un certain rang.

Une fois cela acquis, on montre facilement que $\frac{s_{n+1}}{s_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \inf \left\{ \frac{b}{a} \mid a < b \in S \right\}$.

Exercice 30. La forme de la conclusion incite à considérer $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n^Y)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 31. On remarquera que v est bornée. Si w convergeait vers une limite non nulle (disons $\ell > 0$), elle serait $> \ell/2$ à partir d'un certain rang, ce qui contredit facilement l'aspect borné de v .

Exercice 32. On pourra commencer par montrer une borne grossière : si u est bornée et à valeurs positive, alors u est à valeurs dans un certain segment I sur lequel toutes les fonctions $f_n : x \mapsto x^2 - 100 + \sin(n)$ possèdent une dérivée uniformément minorée $f'_n \geq c > 1$. Leurs réciproques g_n (sur cet intervalle) sont alors des fonctions $1/c$ -lipschitziennes.

En retournant la récurrence, on obtient $u_0 = (g_0 \circ g_1 \circ \dots \circ g_{n-1})(u_n)$ et donc $u_0 \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (g_0 \circ g_1 \circ \dots \circ g_{n-1})(I)$.

Exercice 33. On pourra appliquer le lemme de Cesàro à une « modulation » de la suite : si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, on

$$a \forall \zeta \in \mathbb{U}, \frac{1}{N} \sum_{n=0}^N u_n \zeta^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0.$$

Exercice 34. On pourra se ramener au cas d'une suite telle que $\inf u = 0$ et montrer (en fixant N puis en procédant par récurrence descendante) $\forall n \leq N, u_n \leq \frac{N(N+1)}{n(n+1)} u_N$. Cela entraîne (par disjonction de cas) $\forall n \leq N, u_n \leq 4u_N$ et il reste à voir pourquoi cette majoration conclut.

Exercice 35.

- (i) Converge.
- (ii) Converge.
- (iii) Converge si et seulement si $\gamma < 1$.
- (iv) Converge si et seulement si $a = -2$ et $b = 1$.
- (v) Converge si et seulement si $a < \max(1, b)$.
- (vi) Converge.
- (vii) Converge si et seulement si $\alpha = 3/2$ et $\beta = 15/8$.
- (viii) Converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- (ix) Converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 36. On pourra montrer que $x \mapsto \exp(-x^n)$ est convexe, et utiliser cette remarque pour minorer l'intégrale par une suite « en $1/n$ ».

Exercice 37. On peut soit effectuer un calcul asymptotique, soit exploiter une forme de télescopage. La série converge (et, si on a choisi le télescopage, on est même en mesure de calculer sa somme).

Exercice 38. On pourra se souvenir que si une suite converge vers $\alpha > \beta$, alors elle est $> \beta$ à partir d'un certain rang.

Exercice 39.

- ▶ L'inégalité arithmético-géométrique conclut immédiatement.
- ▶ Le cas décroissant est assez facile car on peut encadrer le terme général de la série initiale par des termes généraux de la série regroupée. Une série exhibant des comportements très différents sur les pairs et les impairs fournit facilement un contre-exemple dans le cas général.

Exercice 40. Cauchy-Schwarz.

Exercice 41. Cauchy-Schwarz.

Exercice 42. Il y a une démonstration assez naturelle en essayant d'utiliser la convexité de l'inverse (ce qui ne marche pas directement, mais on peut s'en sortir) et une démo plus spectaculaire à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 43. La majoration est essentiellement évidente (surtout si on se ramène à $A = 1$ par homogénéité). Pour montrer que toutes les valeurs (strictement positives) plus petites sont possibles, un argument « à la TVI » est possible.

Exercice 44. Si une série $\sum u_n$ ne converge pas absolument, on peut obtenir une partition $(I_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ de $\mathbb{N}$ telle que, par exemple $\forall k \in \mathbb{N}^*, \sum_{n \in I_k} |u_n| \geq k$.

Exercice 45.

1. On pourra utiliser « l'évanescence des tranches » : $\sum_{n < k \leq 2n} u_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
2. On peut construire une telle suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en partitionnant $\mathbb{N}^*$ en intervalles finis $\llbracket 1 + a_{p-1}, a_p \rrbracket$ ($p \in \mathbb{N}^*$) appelés *plateaux*, et en fixant la valeur de la suite u sur le p -ème plateau à $\frac{1}{a_p \theta(a_p)}$.

Exercice 46. Toute suite convergeant vers 0 contient des sous-suites convergeant vers 0 aussi vite qu'on le souhaite.

Exercice 47.

- Si la série $\sum a_n$ converge, la suite des restes tend vers 0 et on peut en extraire une suite tendant vraiment vite vers 0.
- Si elle diverge, on peut découper $\mathbb{N}$ en « paquets » sur lesquels la somme est très grande, ce qui libère de la marge pour construire b_n .

Exercice 48.

1. Partir de l'expression $u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} d_k$.
2. Exprimer la suite $\sum_{k=1}^n u_k - nu_n$ en fonction des d_k .

Exercice 49.

1. Le critère de Raabe-Duhamel est aux séries de Riemann ce que celui de d'Alembert est aux séries géométriques.
2. On montre en fait l'existence d'une constante $C' > 0$ telle que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C' n^{-\alpha}$.

Exercice 50.

1. Seul le cas $\alpha = 1$ n'est pas traité par le critère de Raabe-Duhamel. Dans ce cas subtil, le critère de Gauss est à nouveau une comparaison indirecte avec une famille de séries de référence, ici la série de Bertrand divergente $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n \ln(n)}$.
2. Le critère de d'Alembert règle le cas $|x| \neq 1$, celui de Gauss le cas $x = 1$. Il reste à traiter le cas $x = -1$ à l'aide d'outils très généraux.

Exercice 51. On pourra s'inspirer de la démonstration élémentaire, due à Nicolas Oresme, de la divergence de la série harmonique basée sur le fait que les « tranches dyadiques » $\sum_{n < k \leq 2n} \frac{1}{k}$ ne convergent pas vers 0.

Exercice 52. On pourra faire des paquets dyadiques $P_k = \sum_{2^k < n \leq 2^{k+1}} u_n$.

Exercice 53. On pourra faire des paquets dyadiques $P_k = \sum_{2^k < n \leq 2^{k+1}} u_n$.

Exercice 54. Il s'agit essentiellement de revenir à la définition de la convergence. La convergence de la série « regroupée par paquets » fournit une sous-suite convergente de la suite des sommes partielles et toute la question est de savoir si la vraie suite des sommes partielles a un comportement erratique ou non entre deux valeurs de cette sous-suite.

Exercice 55.

1. Si on la connaît, l'inégalité de réarrangement de Čebyšëv montre directement que $\sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
Sans ça, on peut faire un argument de non-évanescence des tranches, en remarquant par exemple qu'au moins la moitié des valeurs $\sigma(n+1), \sigma(n+2), \dots, \sigma(3n)$ sont $\geq n$.
2. On fabrique facilement des permutations σ pour lesquelles $\sigma(n)$ est beaucoup plus grand que n , pour une infinité (plutôt rare) d'entiers n .

Exercice 56. La suite b étant complexe, il n'est plus possible d'utiliser l'argument « même signe à partir d'un certain rang ». Cependant, la première question reste du cours.

Pour la deuxième, on cherchera une idée simple traduisant le fait que « les sommes partielles $\sum_{k=0}^n b_k$ partent à l'infini vers la droite. »

Exercice 57.

- (i) On obtient $\frac{(-1)^n}{n + \sin n} = \frac{(-1)^n}{n} + O(n^{-2})$ et la série converge.
- (ii) La série converge absolument quand $\alpha > 0$ et diverge grossièrement quand $\alpha \leq -1$.
Quand $\alpha \in]-1, 0]$, on obtient $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right] = \frac{(-1)^n e}{2n^{\alpha+1}} + O(n^{-(\alpha+2)})$ et la série converge.
- (iii) La série diverge grossièrement quand $\alpha \geq 1/2$ et converge absolument quand $\alpha < -\frac{1}{2}$.
Quand $\alpha \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on obtient $\frac{(-1)^n n^\alpha}{\sqrt{n} + (-1)^n} = (-1)^n n^{\alpha-1/2} - n^{\alpha-1} + O(n^{\alpha-3/2})$, et la série converge si et seulement si $\alpha < 0$.
- (iv) On a $\sin(\sqrt{1+n^2}\pi^2) = \frac{(-1)^n}{2n\pi} + O(n^{-3})$ et la série converge.
- (v) On a $\frac{\sin(n)}{n + (-1)^n} = \frac{\sin(n)}{n} + O(n^{-2})$ et la série converge (le premier terme convergeant par sommation d'Abel).
- (vi) On a $\sin\left(\frac{\sin(n)}{n^{1/3}}\right) = \frac{\sin(n)}{n^{1/3}} - \frac{1}{6} \frac{\sin^3 n}{n} + O(n^{-5/3})$ et la série converge, après linéarisation de $\sin^3$ et transformation d'Abel.

Exercice 58.

- (i) Un encadrement grossier de l'intégrale permet de comparer à $\sum_n \frac{1}{n^{\alpha-1}}$: la série converge si et seulement si $\alpha > 2$.
- (ii) Une comparaison série-intégrale montre que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \ln(n)^2$, d'où l'on tire la convergence de $\sum \frac{1}{u_n}$ par comparaison à une série de Bertrand.
- (iii) Le terme général est $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln(n)} + \frac{1}{n \ln(n)^{2\alpha}} + o\left(\frac{1}{n \ln(n)^2}\right)$, d'où convergence si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- (iv) La série diverge facilement si $\alpha \leq 0$ et converge absolument si $\alpha > 1$.
Quand $\alpha \in]0, 1]$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} - \frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{2\alpha}}\right)$, ce qui montre la convergence si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.
- (v) L'étude asymptotique des suites récurrentes montre $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}$, d'où on déduit la convergence si et seulement si $\alpha > 2$, par comparaison à une série de Riemann.
- (vi) Une comparaison série-intégrale est possible (dans un cas non monotone). On peut aussi utiliser un argument de non-évanescence des tranches. La série diverge.

Exercice 59. En utilisant la formule $\forall x > 0, \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$, on obtient que le terme général

est $(-1)^n \left(-\frac{2}{n} + O(n^{-2}) \right)$, donc la série converge.

Exercice 60. On pourra faire des paquets de deux termes consécutifs.

Exercice 61. On obtient $u_n = \frac{1}{n} + O(n^{-2})$ d'où divergence de la première série (à termes positifs à partir d'un certain rang) et convergence de la série alternée.

Exercice 62. Taylor-Young.

Exercice 63. On majorera directement $\frac{1}{n} \int_0^1 f - \int_n^{n+1} \frac{f(t)}{t} = \int_n^{n+1} f(t) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{t} \right) dt$.

Exercice 65. Des termes comme $(1 + \sqrt{2})^n$ apparaissent quand on étudie des suites récurrentes...

Exercice 66. On pourra montrer de façon élémentaire $\sum_{k=1}^n (-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor} = O(\sqrt{n})$ et conclure à l'aide d'une transformation d'Abel.

Exercice 67. On peut utiliser un argument de non-évanescence des tranches.

Exercice 68.

1. La convergence absolue est claire.
2. On peut exploiter le télescopage de $\sum \frac{1}{k(k+1)}$ par transformation d'Abel ou faire une petite récurrence.
3. On obtient facilement $\sum_{k=1}^{5n} a_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(5)$: reste à voir que rien de fou ne se passe dans l'intervalle entre la 5n-ème et la 5(n+1)-ème somme partielle.

Exercice 69. On peut écrire les sommes partielles de cette série à l'aide de nombres harmoniques, puis exploiter le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice 70. Comparaison série-intégrale, dans le cas décroissant (même si l'intégrale diverge). Les calculs sont faisables à la main.

Exercice 71. On pourra s'inspirer du calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ par développement asymptotique de ses sommes partielles.

Exercice 72. En jouant avec les termes pairs et impairs, on obtient

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \ln(2n+1) - 2 \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \ln(k) = 2 \sum_{k=1}^{2n} \ln(k) - 4 \sum_{k=1}^n \ln(2k) + \ln(2n+1),$$

qui permet de conclure en utilisant le développement de Stirling (ou plutôt le développement asymptotique à la précision $o(1)$ de $\ln(n!)$ qui lui est équivalent).

Exercice 73. Il suffit de vérifier $\frac{2^{n+1}}{n} - \frac{2^n}{n-1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2^n}{n}$ et d'appliquer le théorème de sommation des équivalents.

Exercice 74. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\frac{u_n}{2^n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ peut être écrite comme la suite des « produits partiels » d'un produit infini, dont on montre facilement la convergence.

Exercice 75.

1. La série $\sum_k (\pi(2^{k+1}) - \pi(2^k))$ diverge d'après un résultat d'Euclide, ce qui permet d'utiliser le théorème

de sommation des relations de comparaison pour obtenir $\pi(2^k) = O\left(\frac{2^k}{k}\right)$.

2. La relation de divisibilité donne *a fortiori* $n^{\pi(2n)-\pi(n)} \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n$, ce qui suffit.

Exercice 76. On peut appliquer le théorème de la limite monotone à une suite bien choisie (en faisant intervenir les restes de la série $\sum_k \frac{1}{k^2}$), ou montrer que la suite est bornée et qu'elle n'a qu'une valeur d'adhérence.

Exercice 78. On peut majorer brutalement la série infinie et se retrouver dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Exercice 79. Une stratégie gloutonne convient : on rajoute des termes tant qu'on ne dépasse pas S. Reste à rédiger cela comme une récurrence sérieuse.

Exercice 80. Pour la première question, il n'y a pas besoin de réfléchir longtemps à l'avance, une stratégie « gloutonne » fonctionne.

Ça n'est plus vrai dans le cas complexe. On peut en revanche montrer qu'étant donné une famille finie $(a_1, \dots, a_m)$ de nombres complexes, tous de module $\leq M$, il existe une famille de signes $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m) \in \{\pm 1\}^m$ tels que $\forall k \in \llbracket 1, m \rrbracket, \left| \sum_{j=1}^k \varepsilon_j a_j \right| \leq 2M$. Le point-clef est qu'étant donné au moins trois nombres complexes, on peut en remplacer deux (bien choisis) par leur somme ou leur différence sans augmenter le module maximal.

Exercice 81. Transformation d'Abel.

Exercice 82. On pourra regrouper les termes deux par deux et utiliser l'IAF pour majorer la contribution de ces paquets.

Exercice 83.

1. On exploitera l'idée de la divergence grossière.
2. On exploitera des séries de la forme

$$\begin{array}{c} \underbrace{(x_0 + y_0), -x_0, -y_0, (x_0 + y_0), -x_0, -y_0, \dots, (x_0 + y_0), -x_0, -y_0}_{M_0 \text{ répétitions}} \\ \underbrace{(x_1 + y_1), -x_1, -y_1, (x_1 + y_1), -x_1, -y_1, \dots, (x_1 + y_1), -x_1, -y_1}_{M_1 \text{ répétitions}} \\ \underbrace{(x_2 + y_2), -x_2, -y_2, (x_2 + y_2), -x_2, -y_2, \dots, (x_2 + y_2), -x_2, -y_2}_{M_2 \text{ répétitions}} \\ \dots \end{array}$$

3. C'est une variante locale (ce qui ne change à peu près rien) de l'équation fonctionnelle de Cauchy.

Exercice 84. Comparaison série-intégrale sans histoire. On trouve $\frac{1}{\ln(n)}$.

Exercice 85.

1. Application hyperclassique de la comparaison série-intégrale (y compris avec sommation des restes).
2. Observer que $H_{N(k)} = k + o(1)$. On en déduit $N(k) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} e^{k-\gamma}$.
3. (a) Remarquer que $a_n = \sum_{z=1}^n \sum_{x=1}^n \mathbb{1}_{x|z} = \sum_{x=1}^n \left\lfloor \frac{n}{x} \right\rfloor = nH_n + O(n)$.
(b) Tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique comme le produit d'un entier *quadratifrei* (sans

facteur carré) et d'un carré parfait. Si l'on note $qf(n)$ le facteur *quadratfrei*, on pourra remarquer que xy est un carré parfait si et seulement si $qf(x) = qf(y)$.

On en déduit $b_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \sum_{\substack{m \leq n \\ m \text{ quadratfrei}}} \frac{1}{m}$. Il reste à montrer $\sum_{\substack{m \leq n \\ m \text{ quadratfrei}}} \frac{1}{m} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{6}{\pi^2} \ln n$ en exploitant la décomposition *quadratfrei*/carré parfait (on dit que l'ensemble des entiers *quadratfrei* a une densité logarithmique égale à $6/\pi^2$).

Exercice 86.

1. La concavité permet d'encadrer f sur $[k, k+1]$ entre sa sécante et sa tangente.
2. La différence $\sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f - \frac{f(n)}{2}$ s'écrit $\frac{f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k$, où ε_k est « l'erreur » $\int_k^{k+1} f - \frac{f(k) + f(k+1)}{2}$, que la question précédente permet de contrôler.

Exercice 87.

1. Changement de variables $u = \ln(t)$.
2. Comparaison série-intégrale en majorant à la main l'erreur $|\varepsilon_k|$, où $\varepsilon_k = \frac{\sin(\ln(k))}{k} - \int_k^{k+1} \frac{\sin(\ln(t))}{t}$.
Attention, pour conclure, on aura besoin de la divergence de la suite « échantillonnée » $\left(\int_1^n \frac{\sin(\ln(t))}{t} dt \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, ce qui est *a priori* une propriété plus forte que la divergence de l'intégrale de la première question.

Exercice 88.

1. On utilise une IPP (avec une primitive bien choisie) pour majorer $f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt$ en fonction de f' .
2. L'idée est d'utiliser la question précédente, même si certains cas divergents peuvent se traiter par l'argument de non-évanescence des tranches.

Exercice 89. On pourra séparer la somme en traitant d'un côté les $\approx \sqrt{n}$ premiers termes (que l'on peut traiter brutalement), et de l'autre les autres termes (en s'attachant particulièrement à compter ceux qui contiennent une discontinuité de f).

Exercice 90. L'hypothèse permet de comparer la fonction à $e^{\lambda x}$ de manière indirecte, exactement comme dans la démonstration de la règle de d'Alembert.

Exercice 91. Pour la dernière question, on pourra utiliser le théorème de sommation des relations de comparaison et une comparaison série-intégrale.

Exercice 92. En notant $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles, on pourra utiliser la « méthode intégrale » pour les suites récurrentes et montrer $(S_n - S_{n-1})S_{n-1}^2 \leq \int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt \leq (S_n - S_{n-1})S_n^2$.

Exercice 93. On utilisera deux comparaisons séries-intégrales : une pour estimer une intégrale partielle et, plus tard, une pour estimer un reste.

Notez que le deuxième terme du développement asymptotique sera une constante non explicite, obtenue en sommant une série absolument convergente (comme le γ de $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$).

Exercice 94. On pourra regrouper les termes suivant $\max(p, q)$.

Exercice 95. On pourra commencer par compter le nombre de nombres à ℓ chiffres, tous différents de 7, puis estimer leur contribution à $\sum_{n \in E} \frac{1}{n}$.

Exercice 107. On pourra par exemple s'intéresser à la somme double $\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{1}_{j \leq f^{-1}(n)}}{n^2}$.

Exercice 108. On pourra commencer par fixer pour tout k un rang N_k tel que $\sum_{n=N_k}^{+\infty} u_k(n) \leq 2^{-k}$ et fabriquer une famille sommable indexée par n et k dont la somme, à partir d'un certain rang, est supérieure ou égale à la somme des premiers u_k .

Exercice 109. Dans les deux cas, on s'intéressera au comportement asymptotique des tranches dyadiques $\sum_{n < k \leq 2n} \frac{1}{k}$.

Exercice 110. En notant pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\Delta(t) = \frac{t(t+1)}{2}$, on voit que $\sum_{n \leq x} \sigma_1(n) = \sum_{d \leq x} \Delta\left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor\right)$ et on peut en déduire que cette quantité est $\frac{x^2}{2} \sum_{a \leq x} \frac{1}{a^2} + O(x \ln(x))$.

Reste à en déduire $\frac{x^2}{2} \sum_{a \leq x} \frac{1}{a^2} = \frac{\zeta(2)}{2} x^2 + O(x \ln(x))$.

Exercice 111.

1. La première question se traite avec un échange de sommes : $\sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = \sum_{d \leq x} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor = x \ln(x) + O(x)$.
2. Pour la deuxième, on pourra réécrire $\sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = \sum_{k, \ell \geq 1} \mathbb{1}_{k\ell \leq x}$, qui est le nombre de points entiers sous une hyperbole, d'où le nom de la méthode.
Comme l'inégalité $k\ell \leq x$ force $k \leq \sqrt{x}$ ou $\ell \leq \sqrt{x}$ (mais, attention, les cas ne sont pas mutuellement exclusifs), on aboutit une fois tous les calculs faits à

$$\sum_{n \leq x} \sigma_0(n) = 2 \sum_{k=1}^{\sqrt{x}} \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \sqrt{x} \right\rfloor^2 = x \ln(x) + (2\gamma - 1)x + O(\sqrt{x}).$$

Exercice 112. À une configuration (même avec une infinité de pions) on associera une quantité finie I qui ne change pas quand on effectue un mouvement (un *invariant*).

Il s'agira alors de comparer l'invariant associé à la position initiale et les invariants associés à des positions où les cases de départ sont vides.