

Intégrales généralisées

Dans toute cette feuille de TD, étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{C})$, on note pour $p \in [1, +\infty[$

$$\|f\|_p = \left(\int_I |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \in [0, +\infty]$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in I} |f(t)| \in [0, +\infty].$$

On note alors pour $p \in [1, +\infty]$

$$L^p(I) = \{f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{C}) \mid \|f\|_p < +\infty\}$$

Dans les exercices où il n'est pas question de les démontrer, on pourra utiliser les valeurs classiques suivantes (qui seront démontrées dans ce TD ou dans le TD d'intégrales à paramètres) :

1. Intégrale(s) de Gauss : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$.
2. Intégrale de Dirichlet : $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$.
3. Intégrales de Fresnel : $F = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Nature

♠ Exercice 1. *Intégrales de Bertrand.*

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$.

1. Déterminer la nature de $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha (\ln t)^\beta}$ selon (α, β) .
2. En déduire, à l'aide d'un changement de variable, la nature de $\int_0^{1/2} \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ selon (α, β) .
3. Déterminer la nature de $\int_{1/2}^1 \frac{dt}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ selon (α, β) .

Exercice 2. *Nature I.*

Déterminer la nature des intégrales suivantes (éventuellement en fonction des paramètres) :

- (i) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^2}} dt$,
- (ii) $\int_1^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{t}\right) dt$,

- (iii) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \left(e^{-\frac{1}{t}} - \cos\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt,$
- (iv) $\int_1^{+\infty} e^{-t^\alpha} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
- (v) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(1+x)^\alpha} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
- (vi) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x^3}} dx,$
- (vii) $\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
- (viii) $\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
- (ix) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$
- (x) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan(x)} dx,$
- (xi) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \sin(x)}} dx,$
- (xii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(x) - 1}{x^{\frac{5}{2}} \sin(x)} dx,$
- (xiii) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx,$
- (xiv) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[n]{1-x^n}} dx \quad (n \in \mathbb{N}^*),$
- (xv) $\int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln(x)} dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$

Exercice 3. *Nature II.*

Déterminer la nature des intégrales suivantes (éventuellement en fonction des paramètres) :

- (i) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{\sin(t)}}{t} dt,$
- (ii) $\int_e^4 \frac{dt}{\ln(\ln(t))},$
- (iii) $\int_0^1 \ln(\operatorname{th}(t)) dt,$
- (iv) $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt,$
- (v) $\int_0^{+\infty} t^{-\frac{t}{t+1}} dt,$
- (vi) $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}(1-t)^{\frac{3}{2}}} dt,$
- (vii) $\int_0^{+\infty} \ln(2 - e^{-\frac{1}{t}}) dt,$
- (viii) $\int_0^1 \frac{dt}{\arccos(t)},$

- (ix) $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x+1}}{x} dx,$
- (x) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}} dx,$
- (xi) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{1-e^x} \right) dx,$
- (xii) $\int_0^{+\infty} \left(2 + (t+3) \ln\left(\frac{t+2}{t+4}\right) \right) dt,$
- (xiii) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(\arctan(t))}{t^\alpha} dt \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
- (xiv) $\int_2^{+\infty} \frac{e^{\beta x}}{x^\alpha \ln(x)} dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$
- (xv) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t^\alpha)}{t^\beta} dt \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$
- (xvi) $\int_0^{+\infty} [\ln(1+\operatorname{sh}(x^\alpha)) - 2 \operatorname{sh}(\ln(1+x^\alpha)) + \beta] dx \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$

Exercice 4. *Intégrabilité.*

Étudier l'intégrabilité des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué.

- (i) $x \mapsto \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \right)^\alpha$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$;
- (ii) $x \mapsto \left((x+1)^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} \right)^{\sqrt{x}}$ sur $[0, +\infty[$;
- (iii) $x \mapsto \frac{1}{\arccos(1-x^2)}$ sur $]0, 1]$;
- (iv) $x \mapsto \sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt[3]{x^3+1}$ sur $[0, +\infty[$;
- (v) $x \mapsto \frac{\ln(x)}{\sqrt{x^3+1}}$ sur $[1, +\infty[$;
- (vi) $x \mapsto \frac{1}{e^x + x^2 e^{-x}}$ sur $\mathbb{R}$;
- (vii) $x \mapsto \sin(x^3)$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 5. *Une divergence générale.*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $f(0) = 0$ et $f > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Montrer que $\int_0^1 \frac{du}{f(u)} = +\infty$.

Exercice 6. *Une autre divergence générale.*

Soit $h \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ strictement positive telle que $H(x) := \int_0^x h(t) dt = \underset{x \rightarrow +\infty}{O}(x^2)$.

1. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{1}{h}$ diverge.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-H(x)} \left(\int_0^x e^{H(t)} dt \right) dx$ diverge.

Exercice 7. *Application peu importante d'une inégalité importante.*

1. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}} dx$ existe.
2. Montrer que $\int_2^3 \frac{\sqrt{\ln(x)}}{(x-1)\sqrt{x}} dx \leq \frac{\ln(3)}{2}$.

Calculs

Exercice 8. *Calculs élémentaires d'intégrales.*

Calculer les intégrales suivantes, après avoir démontré leur convergence :

- (i) $\int_1^{+\infty} \exp(-\sqrt{t}) dt$;
- (ii) $\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$;
- (iii) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{t^2} dt$;
- (iv) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt$;
- (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) \ln(\sin(x)) dx$;
- (vi) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^3 \sqrt{x}}$;
- (vii) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x(1+x)} dx$;
- (viii) $\int_0^{+\infty} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x(1+x)^{\frac{2}{3}}} dx$.

Exercice 9. *Une valeur de bêta déguisée.*

Mines

Déterminer la nature selon $a \in \mathbb{R}$ de $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^a} dx$.

Calculer $I\left(\frac{5}{2}\right)$.

Exercice 10. *L'exponentielle intégrale, intégrée à son tour.*

Mines

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ lorsque cette intégrale converge.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et seulement sur cet ensemble.
2. Étudier l'intégrabilité de f sur $]0, +\infty[$.
3. Le cas échéant, calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 11. *Exploitation d'une symétrie miraculeuse, détaillée.*

Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$.

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^3}$.
2. Utiliser la somme de ses deux expressions pour calculer I .

Exercice 12. *Exploitation de symétries.*

Déterminer la nature et, le cas échéant, calculer les intégrales suivantes.

- (i) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t} \ln(t)}{(1+t)^2} dt$,
- (ii) $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$,
- (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx$.

Exercice 13. *Autour de l'arctangente.*

1. Soit $a > 0$. Calculer $\int_{\frac{1}{a}}^a \frac{\arctan(t)}{t} dt$.
2. Nature et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{1+t^2} dt$ et de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\arctan(t)}{t} \right)^2 dt$.
On pourra utiliser $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx = -\frac{\pi}{2} \ln(2)$, démontré dans l'exercice juste au-dessus.

Δ **Exercice 14.** *Racine de la tangente.*

Mines

Nature et valeur de

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\tan x} dx.$$

Exercice 15. *Deux visages d'une même intégrale.*

Mines

1. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\int_0^{\pi/2} f(\sin(2x)) \sin(x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2(y)) \cos(y) dy.$$

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(x)}{1 + \sqrt{\sin(2x)}} dx$.

Exercice 16. *Logarithmes et exposants fractionnaires en vrac.*

Justifier l'existence et calculer les intégrales suivantes.

- (i) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}(2x)} dx$,
- (ii) $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{\frac{3}{2}}} dx$,

(iii) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}},$ (par exemple $x = \frac{t}{1+t}$ peut simplifier)

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\ln(\tan(x)))^3 dx.$

Exercice 17. Un cosinus hyperbolique décalé.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence et calculer

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t) + \operatorname{ch}(\alpha)}.$$

Exercice 18. Un calcul basé sur un énorme coup de bol.

Centrale (PSI)

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt.$

2. Nature et valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt.$

Exercice 19. Intégrale des éléments simples.

1. Montrer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} dx = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$

2. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$

Exercice 20. Une intégrale à valeurs complexes.

Justifier l'existence et calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)(1+it)}.$

Δ **Exercice 21.** Poids de Tchebychev.

Mines

Soit $a < b$ deux réels. Calculer $\int_a^b \frac{dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}.$

Exercice 22. Une somme de deux racines au dénominateur.

Nature et valeur de

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t^2} + \sqrt{1-t^2}}.$$

Δ **Exercice 23.** Calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$ par éléments simples, détaillé.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}$$

et, pour $k \in \llbracket 0, 2n-1 \rrbracket$, $\theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n}.$

1. Montrer que I_n converge.

2. Montrer que

$$\frac{1}{1+X^{2n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1 - X \cos(\theta_k)}{X^2 - 2X \cos(\theta_k) + 1}.$$

3. Soit $\theta \in]0, \pi[$. Montrer que

$$\int_{-A}^A \frac{1 - x \cos(\theta)}{x^2 - 2x \cos(\theta) + 1} dx \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \pi \sin(\theta).$$

4. En déduire que

$$I_n = \frac{\pi}{n \sin(\frac{\pi}{2n})}.$$

5. Déterminer la limite de I_n quand $n \rightarrow +\infty$ et l'interpréter.

♠ **Exercice 24.** Formule des résidus pour les fractions rationnelles.

ENS (PSI)

Étant donné $R \in \mathbb{C}(X)$ et $z \in \mathbb{C}$, on appelle *résidu* de R en z et on note $\text{Rés}(R, z)$ le coefficient de l'élément simple $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de R . Notamment, $\text{Rés}(R, z) = 0$ si z n'est pas un pôle de R .

On note $E \subseteq \mathbb{R}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles sans pôle réel, de degré < 0 .

1. Soit $R \in E$.

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ converge si et seulement si la somme des résidus de R est nulle.

Dans la suite, on notera E_0 l'ensemble de ces fractions rationnelles. L'application $R \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx$ est alors une forme linéaire bien définie sur E_0 .

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, calculer

(a) pour $n \geq 2$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x-z)^n},$

(b) $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A \left(\frac{1}{x-z} + \frac{1}{x-\bar{z}} \right) dx,$

(c) $\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{i}{x-z} - \frac{i}{x-\bar{z}} \right) dx.$

3. En déduire que, pour tout $R \in E_0$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) dx = -2\pi \operatorname{Im} \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \text{Rés}(R, z) \right) = 2i\pi \left(\sum_{\operatorname{Im} z > 0} \text{Rés}(R, z) \right).$$

4. **Application.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{2n}}.$

Intégrales classiques : Gauss, Wallis, Dirichlet, Fresnel, Euler

♠ **Exercice 25.** Lemme de Lebesgue sur un intervalle quelconque.

1. Soient $a < b$ deux réels et $g \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que

$$\int_a^b g(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(I, \mathbb{C})$ intégrable sur I . Montrer que

$$\int_I f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

♠ **Exercice 26.** *Gauss par Wallis.*

Pour $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$W_p = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)^p d\theta,$$

et l'on note $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

1. Montrer que I est bien définie.
2. Montrer que

$$W_p \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2p}}.$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall t \in [0, \sqrt{n}], \quad \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad e^{-t^2} \leq \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n}.$$

4. En déduire que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 27. *Une gaussienne.*

Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-P(x)} dx$ et la calculer le cas échéant.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 28. *Une gaussienne barrée en zéro.*

ENS

Soit $a > 0$. On pose $I(a) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}} dt$ et $J(a) = a \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2 - \frac{a^2}{t^2}}}{t^2} dt$.

1. Montrer que ces intégrales convergent.
2. Montrer que $I(a) = J(a)$.
3. En déduire que $I(a) = \frac{e^{-2a}}{2} \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{a}{t^2}\right) e^{-(t - \frac{a}{t})^2} dt$.
4. Montrer que $I(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2a}$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 29. *La moyenne arithmético-géométrique comme intégrale elliptique.*

X

Pour $a, b > 0$, on définit $J_{a,b} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{(a \cos(\theta))^2 + (b \sin(\theta))^2}}$.

1. Montrer que $J_{a,b} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}$.
2. Montrer que $J_{a,b} = J_{\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}}$.
3. On considère les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n + b_n}{2}, \sqrt{a_n b_n}\right)$.
Montrer que ces deux suites convergent vers une limite commune et exprimer cette limite en fonction de $J_{a,b}$.

Exercice 30. *Wallis hyperbolique.*

Mines

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\text{ch}(t)^n}$.

1. Montrer que I_n est bien définie.
2. Montrer que la suite (I_n) est strictement monotone et convergente.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = nI_n I_{n+1}$. Montrer que la suite (u_n) est constante.
4. Donner un équivalent de I_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 31. *Čebyšev sous l'intégrale.*

Mines

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $I_n(x) = \int_0^\pi \frac{\cos(nt) - \cos(nx)}{\cos(t) - \cos(x)} dt$.

1. Montrer que $I_n(x)$ est bien définie.
2. Soit $n \geq 1$. Calculer $I_{n+1}(x) + I_{n-1}(x)$ et trouver une relation de récurrence.

Exercice 32. *Poisson à la sauce Tchebychev.*

Centrale

Soit $b \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{b^2 - 2b \cos(t) + 1} dt$.

1. Justifier l'existence de J_n pour tout entier n et déterminer la limite de la suite (J_n) .
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer $J_{n+2} + J_n$ en fonction de J_{n+1} et b .
3. En déduire une expression de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

♠ **Exercice 33.** *Intégrale du noyau de Dirichlet.*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt.$$

1. Justifier l'existence de I_n .
2. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n$. En déduire la valeur de I_n .
3. Montrer que $t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Déduire de ce qui précède la limite de $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt$.
5. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge, et déduire sa valeur.

Exercice 34. *Un noyau de Dirichlet tronqué.*

X

Soit $r \in]0, \pi[$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{\sin(t)} dt$.

Exercice 35. *La demi-somme des limites, à la Dirichlet.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$; on note $f(0^+)$ et $f(0^-)$ ses limites à droite et à gauche en 0. On admet enfin que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ converge et vaut $\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t) \sin(xt)}{t} dt$$

converge.

2. Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t) \sin(xt)}{t} dt$ et $\int_{-\infty}^{-1} \frac{f(t) \sin(xt)}{t} dt$ tendent vers 0 quand $x \rightarrow +\infty$.
3. Montrer que $\int_0^1 \frac{(f(t) - f(0^+)) \sin(xt)}{t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et énoncer le résultat analogue sur $[-1, 0]$.
4. En déduire que

$$F(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2} (f(0^+) + f(0^-)).$$

Exercice 36. Corollaires de l'intégrale de Dirichlet.

On admet la valeur de l'intégrale de Dirichlet :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Nature et valeur de :

- (i) $\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{t^2} dt$,
- (ii) $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 dt$,
- (iii) $\int_0^{+\infty} \frac{2 - 2 \cos(t) - t \sin(t)}{t^4} dt$.

★ **Exercice 37.** Intégrales de Borwein par brute force.

Soient $n \geq 1$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs vérifiant $a_0 > a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Pour $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, on pose $S_\varepsilon = a_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k$, et l'on note $f : t \mapsto \prod_{k=0}^n \sin(a_k t)$. On admettra la valeur de l'intégrale de Dirichlet, $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que

$$I = \int_0^{+\infty} \prod_{k=0}^n \frac{\sin(a_k t)}{a_k t} dt$$

est bien définie.

2. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left(\prod_{k=1}^n \varepsilon_k \right) S_\varepsilon^n \sin(S_\varepsilon t).$$

3. Montrer que $I = \frac{1}{n! a_0 a_1 \dots a_n} \int_0^{+\infty} \frac{f^{(n)}(t)}{t} dt$, puis en déduire que

$$I = \frac{\pi}{2^{n+1} n! a_0 a_1 \dots a_n} \sum_{\varepsilon \in \{-1, 1\}^n} \left(\prod_{k=1}^n \varepsilon_k \right) S_\varepsilon^n.$$

4. En déduire la valeur de I .

Δ **Exercice 38.** Fresnel sous forme absolument convergente.

1. Montrer que les intégrales $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ convergent, mais que ni $t \mapsto \cos(t^2)$ ni $t \mapsto \sin(t^2)$ n'est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Montrer que les deux fonctions

$$t \mapsto \frac{1 - \cos(t^2)}{2t^2} \quad \text{et} \quad t \mapsto \frac{\sin(t^2)}{2t^2}$$

se prolongent par continuité en 0 et sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Établir

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t^2)}{2t^2} dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t^2)}{2t^2} dt.$$

4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt > 0$, et majorer $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ par un réel explicite.

Exercice 39. Les queues de Fresnel, et leurs carrés.

Pour $x \geq 0$ on pose $C(x) = \int_x^{+\infty} \cos(t^2) dt$ et $S(x) = \int_x^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

1. Démontrer l'existence de ces deux intégrales.

2. Montrer que $x \mapsto xC(x)$ et $x \mapsto xS(x)$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.

3. Montrer l'existence et calculer $\int_0^{+\infty} C(x)^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} S(x)^2 dx$, en fonction de $F = \int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt = \int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$, dont on admet la valeur $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$.

Exercice 40. Frullani en version cosinus.

Mines

Soient $a_1, \dots, a_n > 0$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Discuter la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\cos(a_i t)}{t} dt$ et en cas de convergence, la calculer.

Δ **Exercice 41.** $\zeta(2)$ par un cas élémentaire de Riemann-Lebesgue.

1. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$\spadesuit$ **Exercice 42.** Moments logarithmiques.

On pose, pour $(n, p) \in \mathbb{N}^2$, $a_{n,p} = \int_0^1 x^n (\ln x)^p dx$.

Justifier l'existence de $a_{n,p}$ et calculer cette expression.

Exercice 43. Une intégrale indépendante du paramètre.

Mines

Pour $a \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

1. Montrer que $F(a)$ est bien définie pour tout réel a .

2. À l'aide du changement de variable $u = \frac{1}{x}$, montrer que

$$F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{x^a}{(1+x^2)(1+x^a)} dx.$$

3. En déduire que F est constante et donner sa valeur.

4. Application : calculer, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{1 + (\tan \theta)^a}$.

♠ **Exercice 44.** Fonctions Bêta et Gamma sur leur domaine.

Fonction Gamma. Pour $x \in \mathbb{R}$, on considère

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$.
2. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$.
3. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

4. Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

En déduire $\Gamma(n + \frac{1}{2})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

On pourra admettre l'intégrale de Gauss $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Fonction Bêta. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on considère

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

1. Montrer que cette intégrale converge si et seulement si $x > 0$ et $y > 0$.
2. Soient $x, y > 0$. Montrer que $B(x, y) = B(y, x)$ et que $B(x, y) = B(x+1, y) + B(x, y+1)$.
3. Soient $x, y > 0$. Montrer que $xB(x, y+1) = yB(x+1, y)$, puis que $B(x+1, y) = \frac{x}{x+y} B(x, y)$.
4. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x > 0$,

$$B(n+1, x) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^n (x+k)}.$$

5. Montrer que $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \pi$.

En déduire la valeur de $B(n + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ pour tous $n, m \in \mathbb{N}$.

Semi-convergence, oscillations : exemples

Exercice 45. Nature, avec oscillations.

Déterminer la nature des intégrales suivantes :

- (i) $\int_0^{+\infty} \sin(t) \sin(\frac{1}{t}) dt$;
- (ii) $\int_0^{+\infty} \cos(e^t) dt$;
- (iii) $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$;
- (iv) $\int_0^{+\infty} \cos(t^2 + t) dt$;
- (v) $\int_0^{+\infty} t \sin(t^3 - t) dt$;

- (vi) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x) \ln(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} dx;$
 (vii) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{\sin(x)} \sin(2x)}{x^\alpha} dx \quad (\alpha > 0);$
 (viii) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4 \sin^2(x)}.$

Exercice 46. Deux oscillations piégeuses.

Mines

1. Déterminer la nature de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x} + \sin(x)} dx.$$

2. Déterminer la nature de

$$\int_2^{+\infty} \frac{\cos(x)}{\ln(x)} dx.$$

Exercice 47. Une convergence d'intégrales par découpage en tranches.

Centrale

1. Pour $x > -1$, calculer $\varphi(x) = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + x \sin^2(t)}$. On pourra se ramener à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et poser $u = \tan(t)$.
 2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha, \beta > 0$ pour que $\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta dx}{1 + x^\alpha \sin^2(x)}$ converge.

Exercice 48. Une convergence d'intégrales par découpage en tranches, bis.

Soit $\alpha > 0$ et $f : x \mapsto x e^{-x^\alpha \sin^2(x)}$.

1. Quelle est la nature de $\sum_{n \geq 1} \int_{n\pi - \frac{\pi}{2}}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} f?$
 2. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur α pour que f soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 49. Des pics de plus en plus fins : $|\sin x|^x$.

Mines

1. Nature de $\int_0^{+\infty} |\sin x|^x dx$.
 2. Nature de $\int_0^{+\infty} |\sin x|^{x^\alpha} dx$, avec $\alpha \in]1, +\infty[$.

Exercice 50. Tranche par tranche, autour des zéros du sinus.

X

Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{e^{-x} + e^{2x} |\sin(x)|} dx$.

Δ **Exercice 51.** Une dérivée pas si intégrable.

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et pour $x \in]0, 1]$, $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x^2})$.

1. Montrer que f est dérivable sur $[0, 1]$, et déterminer f' . La fonction f' est-elle bornée ?
 2. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 f'(t) dt$ converge et déterminer sa valeur.
 3. Montrer que f' n'est pas intégrable sur $]0, 1]$.

Exercice 52. Une oscillation polynomiale.

Mines

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré ≥ 2 . Déterminer la nature de $\int_0^{+\infty} \sin(P(x)) dx$.

Exercice 53. Positivité des intégrales de Fresnel, ou variations autours des séries alternées.

Soit $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$ continue, strictement décroissante, de limite nulle en $+\infty$, et telle que $u \mapsto \varphi(u) \sin(u)$ soit intégrable sur $]0, \pi]$. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\sin(u)| \varphi(u) du$.

1. Montrer que la suite (a_k) est strictement décroissante et de limite nulle.

2. En déduire que $\int_0^{+\infty} \varphi(u) \sin(u) du$ converge et que

$$\int_0^{+\infty} \varphi(u) \sin(u) du > 0.$$

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$ converge et est strictement positive.

4. Montrer que $\int_0^{+\infty} \cos(t^2) dt$ converge et est strictement positive.

Intégrabilité : résultats généraux

Exercice 54. Intégrabilité et estimations Césàresques à l'infini.

X (PC)

Les questions sont logiquement indépendantes, même si les deux dernières vont raisonnablement ensemble.

1. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, positive et de carré intégrable. Montrer que $\int_0^x f = o(\sqrt{x})$.

2. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, positive, **décroissante** et intégrable. Montrer que $f(x) = o(x^{-1})$.

3. Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, positive et intégrable. Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 55. $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ le long d'une suite.

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de réels $c > 0$ et $A \geq 1$ tels que $\forall x \geq A, |f(x)| \geq \frac{c}{x}$.

2. En déduire que, pour tout $A \geq 1$, $\inf_{x \geq A} |x f(x)| = 0$.

3. En déduire qu'il existe une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de réels telle que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $x_n f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

4. Montrer qu'on ne peut pas espérer mieux : construire $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $x f(x)$ ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$.

Exercice 56. La moyenne sur $[x, 2x]$ a la même nature.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[, \mathbb{R}_+)$. On pose, pour $x \geq 1$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_x^{2x} f(t) dt.$$

Montrer que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si g l'est.

Exercice 57. *Fonction intégrable et log-concave.*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$, intégrable, strictement positive, et telle que $\ln \circ f$ est concave.

1. Montrer que f est croissante, puis décroissante.
2. Montrer qu'il existe $K, c > 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq Ke^{-c|x|}$.
3. Donner un exemple d'une telle fonction f .

Exercice 58. *Fonctions à variation régulière.*

Mines (PSI)

Soit $\ell \in]0, 1[$ et $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que $\frac{f(x+1)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Étudier l'intégrabilité de f .

Exercice 59. *Fonction convergeant en $\pm\infty$.*

X (PC)

Soit $\ell_{\pm}$ deux réels et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell_{\pm}$.

Que dire de l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} [f(x+\lambda) - f(x)] dx$?

Exercice 60. *Un taux d'accroissement logarithmique jamais intégrable.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ décroissante et de limite nulle en $+\infty$. Étudier la convergence de

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} dx.$$

Exercice 61. *Une intégrale divergente.*

1. Déterminer les $f \in C^1(\mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^1 \frac{f(x+t) - f(x)}{t^2} dt$ converge.
2. Même question avec $f \in C^0(\mathbb{R})$.

♠ **Exercice 62.** *Non-convergence vers 0.*

Donner un exemple de fonction f continue et positive telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge mais telle que f ne tende pas vers 0 en $+\infty$.

♠ **Exercice 63.** *Convergence vers 0 : le cas uniformément continu.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge.

1. Montrer que, pour tout $\delta > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+\delta} f(t) dt = 0.$$

2. On suppose de plus f uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

Exercice 64. *Convergence vers 0 : le cas H^1 .*

ENS (PC)

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que f et f' soient de carré intégrable. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 65. *Convergence vers 0 : le cas $W^{2,1}$.*

Centrale

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+)$ telle que f et f'' soient intégrables. Montrer que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 66. Convergence vers 0 : une dérivée dans L^2_{uloc} .

Soit $f \in C^1(\mathbb{R}_+)$ telle que $\int_0^{+\infty} f$ converge et que $x \mapsto \int_x^{x+1} (f')^2$ soit bornée.

Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 67. Une majoration pas passionnante.

Centrale

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et f'' soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) > 0$.

1. Montrer que $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

2. Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'unique fonction telle que $g(0) = f(0)$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+, g'(x) = -\int_x^{+\infty} |f''|$.

Montrer que $g'(0) \neq 0$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $f(x)$ et $g(x)$.

Exercice 68. Quand $xf(x)^2$ s'efface.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f et $x \mapsto xf'(x)$ soient de carrés intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)^2 = 0$.

Exercice 69. Intégrabilité d'un produit.

ENS

On note $C_b(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues bornées et $CL^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues intégrables.

1. Si $u \in C_b(\mathbb{R})$ et $v \in CL^1(\mathbb{R})$, montrer que $uv \in CL^1(\mathbb{R})$.

2. Montrer que si $u \in C(\mathbb{R})$ vérifie $\forall v \in CL^1(\mathbb{R}), uv \in CL^1(\mathbb{R})$, alors u est bornée.

3. Quel est l'ensemble des $u \in C(\mathbb{R})$ tels que pour tout $v \in C_b(\mathbb{R})$, $\int_{-\infty}^{+\infty} uv$ converge ?

Exercice 70. Pas de frontière.

Centrale

1. Soit $\mu > 1$ et $f : t \mapsto (1+t)^{-\mu}$. Trouver $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que fg soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose, pour $x \geq 0$,

$$R(x) = \int_x^{+\infty} f(t) dt \text{ et } S(x) = R(x) + e^{-x}.$$

Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ croissante, tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que fg soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ non intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ tendant vers 0 en $+\infty$ telle que fg ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

4. En déduire qu'il n'existe pas de fonction $\varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que, pour toute $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$,

$$f \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+ \iff f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(\varphi(x)).$$

Exercice 71. Une fonction et sa primitive, même nature.

Mines

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue. On note F la primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que les

intégrales $\int_0^{+\infty} \frac{F(t)}{(t+1)^2} dt$ et $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t+1} dt$ sont de même nature.

Exercice 72. Moyenne de $tf(t)$ quand $\int_0^{+\infty} f$ converge.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ converge (on ne suppose pas f intégrable). On note

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ et } \ell = \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

1. Soit $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell.$$

2. Montrer que

$$\frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

3. Soit $\alpha > 0$. Montrer plus généralement que

$$\frac{1}{x^\alpha} \int_0^x t^\alpha f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

4. On prend $f(0) = 0$ et $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ pour $t > 0$. Vérifier que f satisfait les hypothèses, puis montrer que

$$x \mapsto \int_0^x tf(t) dt \text{ n'est pas bornée sur } \mathbb{R}_+ : \text{ le } o(x) \text{ de la question 2 ne peut pas être remplacé par un } O(1).$$

Exercice 73. Un exposant qui s'approche de 1.

Soit f continue, positive et intégrable sur $[1, +\infty[$.

Démontrer que $x \mapsto f(x)^{1-\frac{1}{x}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

Semi-convergence, oscillations : résultats théoriques

Exercice 74. Intégrabilité de fonctions modulées.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue et décroissante.

- On considère $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction 2-périodique qui vaut 1 sur $[0, 1[$ et 0 sur $[1, 2[$. Montrer que f est intégrable si et seulement si le produit $f\chi$ l'est.
- Montrer que f est intégrable si et seulement si le produit $f\sin$ l'est.

Exercice 75. Intégrale oscillante.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$ une fonction réelle décroissante telle que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \sin(t) dt$ converge.

Exercice 76. Un cas particulier de la règle d'Abel.

Centrale (PSI)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([1, +\infty[)$ telle que $\int_1^{+\infty} f$ converge.

Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t^\alpha} dt$ converge.

2. Généraliser le résultat précédent.

Exercice 77. *Domaine de définition de la transformée de Laplace.*

ENS

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ et $a \in \mathbb{R}$. On suppose que $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt$ converge. Montrer que, pour tout $x \geq a$, $\int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}dt$ converge.

★ **Exercice 78.** *Une phase non stationnaire.*

ENS

Soit $f \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $\lambda > 0$ tel que $f'' \geq \lambda$. Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{if(t)}dt$ converge.

Espaces L^p

♠ **Exercice 79.** *Inégalité de Hölder sur un intervalle.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide. Soient $p \in]1, +\infty[$ et $q \in]1, +\infty[$ son exposant conjugué, c'est à dire l'unique réel tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Montrer que pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$,

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2. Soient $f \in L^p(I)$ et $g \in L^q(I)$. Montrer que $fg \in L^1(I)$ et que

$$\int_I |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

3. Soient $f \in L^1(I)$ et $g \in L^\infty(I)$. Montrer que $fg \in L^1(I)$ et que

$$\int_I |f(t)g(t)| dt \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty.$$

♠ **Exercice 80.** *Inégalité de Minkowski sur un intervalle.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit $p \in [1, +\infty[$.

1. Montrer que $L^p(I)$ est un espace vectoriel.
2. Montrer que pour tous $f, g \in L^p(I)$, on a

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

♠ **Exercice 81.** *Inégalité de Jensen sur un intervalle.*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, I d'intérieur non vide, et soit $\varphi : J \rightarrow \mathbb{R}$ convexe et continue. Soit $w \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur I , de poids total

$$\int_I w(t) dt = 1.$$

Soit enfin $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ telle que fw et $(\varphi \circ f)w$ soient intégrables sur I . On pose

$$\xi = \int_I f(t)w(t) dt.$$

1. Montrer que $\xi \in J$.
2. On suppose ici que ξ est intérieur à J . Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in J, \quad \varphi(y) \geq \varphi(\xi) + k(y - \xi),$$

puis en déduire que

$$\varphi\left(\int_I f(t) w(t) dt\right) \leq \int_I \varphi(f(t)) w(t) dt.$$

3. On suppose maintenant que ξ est une extrémité de J . Montrer que $(f - \xi)w$ est nulle sur I , puis que l'inégalité précédente est encore vraie, avec égalité.

Exercice 82. *Inégalité d'interpolation sur un intervalle.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1. Soient $1 \leq p_0 < p_1 \leq +\infty$ et $\theta \in]0, 1[$. On définit p_θ par $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$. Montrer que toute $f \in L^{p_0}(I) \cap L^{p_1}(I)$ appartient à $L^{p_\theta}(I)$, avec

$$\|f\|_{p_\theta} \leq \|f\|_{p_0}^{1-\theta} \|f\|_{p_1}^\theta.$$

2. En déduire que, pour toute $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0(I, \mathbb{C})$, l'ensemble des $p \in [1, +\infty]$ tels que $f \in L^p(I)$ est un intervalle.
3. Pour cette question, on prend $I =]0, +\infty[$. Pour $\alpha > 0$ et $p \in [1, +\infty]$, à quelle condition $x \mapsto x^{-\alpha}$ appartient-elle à $L^p([0, 1])$? à $L^p([1, +\infty])$?
4. Soient $1 \leq p < q \leq +\infty$. En déduire quelles inclusions on a entre $L^p(I)$ et $L^q(I)$. On pourra distinguer le cas I borné de I non borné.

Δ **Exercice 83.** *Convergence des normes p sur un segment.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\|f\|_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} \|f\|_\infty.$$

Exercice 84. *Comparaison des normes p sur un segment, version continuité.*

Soient $a < b$ deux réels et $p_1, p_2 \in [1, +\infty]$ tels que $p_1 < p_2$.

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que pour toute $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $\|f\|_{p_1} \leq C\|f\|_{p_2}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de constante $C > 0$ telle que pour toute $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$, $\|f\|_{p_2} \leq C\|f\|_{p_1}$.

Exercice 85. *Fonction lipschitzienne intégrable.*

Soient $k > 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction k -lipschitzienne et intégrable sur $\mathbb{R}$.

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $a = |f(x_0)| > 0$. Montrer que, pour tout $t \in \left[-\frac{a}{k}, \frac{a}{k}\right]$, $|f(x_0 + t)| \geq a - k|t|$. En déduire que $a^2 \leq k\|f\|_1$.
2. En déduire que f est bornée et que

$$\|f\|_\infty^2 \leq k\|f\|_1.$$

3. Montrer que la constante k est optimale : pour tout $c \in]0, 1[$, il existe une fonction f k -lipschitzienne et intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $\|f\|_\infty^2 > ck\|f\|_1$.
4. En déduire que f^2 est intégrable sur $\mathbb{R}$.
5. **Variante.** Soit $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

- (a) Montrer que $g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.
- (b) En déduire que $|g|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout réel $p \geq 1$.
6. Montrer que l'hypothèse de continuité uniforme ne peut pas être remplacée par la simple continuité : construire $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$ telle que h^2 ne soit pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

♠ **Exercice 86.** *Construction explicite de pics.*

Mines

Soient $(h_n)_{n \geq 1}$ et $(\ell_n)_{n \geq 1}$ deux suites de réels strictement positifs telles que $\ell_n \leq \frac{1}{2}$ pour tout $n \geq 1$. On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} h_n \max(0, 1 - \frac{|x - n|}{\ell_n}).$$

1. Montrer que f est continue et positive et que

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \sum_{n \geq 1} h_n \ell_n \text{ et } \int_0^{+\infty} f(t)^2 dt = \frac{2}{3} \sum_{n \geq 1} h_n^2 \ell_n.$$

2. En déduire un exemple de fonction intégrable et non bornée.
3. Montrer que $L^1(\mathbb{R}_+) \not\subset L^2(\mathbb{R}_+)$ et que $L^2(\mathbb{R}_+) \not\subset L^1(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 87. *Plongement $H^1 \hookrightarrow C^0$.*

Soit $f \in C^1(\mathbb{R})$ telle que f et f' soient de carré intégrable.

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x)^2 \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (f')^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.
2. Montrer qu'il est possible de supprimer la constante multiplicative 2 dans l'inégalité précédente.

Exercice 88. *Inégalité de Hardy L^2 .*

X

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de carré intégrable. On pose pour tout $x > 0$,

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

1. Montrer que g se prolonge par continuité en 0.
2. Montrer que g est de carré intégrable et que $\int_0^{+\infty} g^2 \leq 4 \int_0^{+\infty} f^2$.
3. La constante 4 est-elle optimale ?

Exercice 89. *Inégalité de Hardy L^p .*

Soit $p \in]1, +\infty[$ et soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que f^p soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$. On pose

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Montrer que $x \mapsto \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p$ est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{F(x)}{x} \right)^p dx \leq C_p \int_0^{+\infty} f(x)^p dx,$$

où C_p est une constante que l'on précisera.

Exercice 90. *L'inégalité de Hilbert.*

X

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ de carré intégrable. On pose

$$S_f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{f(y)}{x+y} dy.$$

1. Justifier la bonne définition de S_f .
2. Montrer que S_f est de carré intégrable.

Exercice 91. *Translation et découplage.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t-\lambda) - f(t+\lambda)| dt \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f|.$$

Exercice 92. *Continuité des translations dans L^1 .*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t+x) - f(t)| dt.$$

1. Montrer que φ est bien définie, paire, et que $\varphi(x) \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |f|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $\int_{|t| \geq A} |f(t)| dt \leq \varepsilon$.
3. Montrer que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.
4. Montrer que $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2 \int_{\mathbb{R}} |f|$.
5. Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \varphi(x-y)$. En déduire que φ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Asymptotique

Exercice 93. *Équivalents d'intégrales en $+\infty$.*

Déterminer un équivalent, quand $x \rightarrow +\infty$, des intégrales suivantes.

- (i) $\int_1^x \frac{2^t}{t} dt;$
- (ii) $\int_2^x \frac{dt}{(\ln(t))^\alpha},$ avec $\alpha \in \mathbb{R};$
- (iii) $\int_1^x \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt;$
- (iv) $\int_0^x \frac{e^t}{1+t^2} dt;$
- (v) $\int_0^x \frac{e^t \ln(t)}{1+t^2} dt;$
- (vi) $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\ln(t)} dt;$

(vii) $\int_x^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}(t)^n}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 94. *Équivalent d'un reste.*

Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^4} dt$.

Exercice 95. *Étude d'une suite récurrente mettant en jeu la fonction d'erreur.*

Mines (PSI)

1. Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt$.
2. Soit u une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \int_{u_n}^{+\infty} e^{-t^2} dt$. En donner un équivalent.

Exercice 96. *Intégrale aux bornes variables.*

Mines (PC)

Donner des équivalents en 0 et $+\infty$ de $f : x \mapsto \int_{\sqrt{x}}^x \frac{e^t}{t} dt$.

Exercice 97. *Équivalent d'une intégrale.*

Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_0^x e^{t^3} dt$.

Exercice 98. *L'aire sous t^t .*

Mines

Donner un équivalent, quand $x \rightarrow +\infty$, de $\int_1^x t^t dt$.

Exercice 99. *Asymptotique d'un reste.*

Mines

1. Montrer $\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. Plus précisément, donner un développement asymptotique à deux termes de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ en $+\infty$.

Exercice 100. *Développements asymptotiques.*

Donner des développements asymptotiques à deux termes de :

- (i) $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^2 \ln(t)}$ quand $x \rightarrow +\infty$;
- (ii) $x \mapsto \int_0^x \sqrt{|\ln(t)|} dt$ quand $x \rightarrow 0$.

Exercice 101. *Trois développements asymptotiques.*

Déterminer un développement asymptotique :

1. à deux termes de $\int_0^x e^{t^2} dt$ lorsque x tend vers $+\infty$;
2. à n termes de $\int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$ lorsque x tend vers $+\infty$;
3. à deux termes de $\int_x^2 \frac{dt}{\ln(t)}$ lorsque x tend vers 1^+ .

Exercice 102. Une queue d'oscillations amorties.

Centrale, Mines

On pose $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que F est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
3. Montrer qu'en $+\infty$, on a $F(x) = \frac{\cos(x)}{x^2} + O(1/x^3)$.
4. Montrer qu'en zéro, on a $F(x) \sim -\ln(x)$.
5. En déduire que F est intégrable sur $]0, +\infty[$.
6. Calculer $\int_0^{+\infty} F(x) dx$.

★ **Exercice 103.** La queue d'une intégrale de Fresnel généralisée.

Soit $\alpha > 1$. Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{it^\alpha} dt$, puis donner un développement asymptotique à deux termes de $\int_x^{+\infty} e^{it^\alpha} dt$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 104. Fonction convergeant au sens de Cesàro.

Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\frac{1}{x} \int_1^x f \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Montrer $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t^2} dt = \frac{\ell}{x} + o(x^{-1})$.

Exercice 105. Une fonction ligotée à sa primitive.

Centrale

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable sur $]0, 1]$. Soit ℓ un réel strictement positif.

1. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Si f admet une limite en $+\infty$, quelle est cette limite ?
2. Trouver toutes les fonctions f telles que $\forall x > 0, f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$.
3. On suppose que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \int_0^x f(t)^2 dt = \ell$. Déterminer un équivalent de $f(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$.
4. Variante. Soient $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$. On suppose que $f(x) \int_0^x f(t) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$. Déterminer un équivalent simple de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 106. Une classe de fonctions à variation régulière.

Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$. On dira qu'une fonction $g : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}_+^*$, de classe $\mathcal{C}^1$, possède la propriété VR $[\mu]$ si

$$\frac{g'(x)}{g(x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\mu}{x}.$$

1. Pour tout $\mu \in \mathbb{R}^*$, donner un exemple de fonction possédant la propriété VR $[\mu]$.
2. Soit $\mu > -1$ et g possédant la propriété VR $[\mu]$.
 - (a) Montrer $\ln(g(x)) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \mu \ln(x)$.
 - (b) Montrer la divergence de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$.
 - (c) Montrer que $\int_1^x g(t) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{xg(x)}{\mu + 1}$.

3. Soit $\mu < -1$ et g possédant la propriété VR $[\mu]$. Montrer la convergence de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ et donner un équivalent en $+\infty$ de $\int_x^{+\infty} g(t) dt$.
4. Que dire de la convergence de $\int_1^{+\infty} g(t) dt$ quand g possède la propriété VR $[-1]$?

Exercice 107. *Intégrale d'une fonction périodique et constantes de Lebesgue.*

Mines

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$ une fonction T -périodique. On note $\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f$ sa valeur moyenne.

1. (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.
- (b) Dans le cas convergent, montrer $\int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. **Application.** Montrer l'existence d'une constante β telle que

$$\int_0^x \frac{|\sin(t)|}{t} dt = \frac{2}{\pi} \ln(x) + \beta + O_{x \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Dans la suite, on suppose $\langle f \rangle = 0$ et on note $F : x \mapsto \int_0^x f$.
- (a) Montrer $x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ et $x \int_x^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \langle F \rangle$.
- (b) En déduire $\int_0^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt dx = \langle F \rangle$.

★ **Exercice 108.** *Une « moyenne » à la Borel.*

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+)$ de carré intégrable. Déterminer la limite en $+\infty$ de $x \mapsto e^{-x} \int_0^x e^t f(t) dt$.

★★ **Exercice 109.** *Lemme de Van der Corput.*

Soient $a < b$ deux réels. On étudie la vitesse de décroissance en λ des intégrales oscillantes $\int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx$. Toutes les constantes demandées doivent être indépendantes de a , de b , de φ et de λ .

1. Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$ dont la dérivée φ' est monotone et vérifie $|\varphi'(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$, on ait

$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq \frac{C}{\lambda}.$$

2. Soit k un entier ≥ 2 . Montrer qu'il existe $C_k > 0$ telle que, pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^{k+1}([a, b], \mathbb{R})$ vérifiant $|\varphi^{(k)}(x)| \geq 1$ pour tout $x \in [a, b]$, on ait

$$\forall \lambda > 0, \quad \left| \int_a^b e^{i\lambda\varphi(x)} dx \right| \leq \frac{C_k}{\lambda^{\frac{1}{k}}}.$$

★ **Exercice 110.** *Dérivée un équivalent grâce à la monotonie.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ croissante. On pose, pour $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. On suppose qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $F(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x^\alpha$.

(a) Soit $\lambda > 1$. Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$f(x) \leq \frac{F(\lambda x) - F(x)}{(\lambda - 1)x},$$

et en déduire que $\limsup_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{\alpha-1}} \leq \frac{\lambda^\alpha - 1}{\lambda - 1}$.

(b) Obtenir de même une minoration à l'aide de $F(x) - F(\lambda x)$ pour $\lambda \in]0, 1[$.

(c) En déduire que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \alpha x^{\alpha-1}$.

2. Montrer qu'on ne peut pas se passer de la monotonie de f : trouver $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $F(x) \sim x^2$ mais que $\frac{f(x)}{x}$ n'ait pas de limite en $+\infty$.

3. On suppose maintenant que $F(x) = x^2 + o(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$. Montrer que

$$f(x) = 2x + o(\sqrt{x}) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty.$$

Sommes discrètes et intégrales

Exercice 111. Sommes de Riemann pour les intégrales impropres.

Mines

- Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1])$ monotone et $n \geq 1$. On note $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$. Montrer que $(S_n)_{n \geq 1}$ converge si et seulement si f est intégrable, et que dans ce cas $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f$.
- Montrer que le résultat tombe en défaut si f n'est plus supposée monotone.

★ **Exercice 112.** Sommes de Riemann sur une demi-droite.

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $t^2 f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$. Pour $X > 0$, on pose

$$M(X) = \sup_{t \geq X} t^2 |f(t)|.$$

- Montrer que $M(X)$ est bien défini pour tout $X > 0$, que M est décroissante et que $M(X) \rightarrow 0$ quand $X \rightarrow +\infty$. En déduire que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
- Soit $h > 0$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} f(nh)$ converge absolument. On pose alors

$$S(h) = h \sum_{n=0}^{+\infty} f(nh).$$

- Soient $X > 0$ et $h \in \left]0, \frac{X}{2}\right[$. On note $N = \left\lfloor \frac{X}{h} \right\rfloor$. Montrer que

$$\left| h \sum_{n=N+1}^{+\infty} f(nh) \right| \leq \frac{2M(X)}{X} \quad \text{et} \quad \left| \int_X^{+\infty} f(t) dt \right| \leq \frac{M(X)}{X}.$$

- Soit $X > 0$ fixé. Montrer que

$$h \sum_{n=0}^{\lfloor X/h \rfloor} f(nh) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^X f(t) dt.$$

- En déduire que

$$S(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} f(t) dt.$$

Exercice 113. Deux sommes en $k(n-k)$.

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}}.$$

Exercice 114. Une somme de Riemann qui hésite.

X

On note $a = \sqrt{2}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ a < \frac{k}{n} < a+1}} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}.$$

Étudier la convergence de la suite (S_n) .

Exercice 115. Découper l'aire en parts égales.

Centrale

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ dans $[0, 1]$ tels que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \quad \int_0^{a_k} f(t) dt = \frac{k}{n} \int_0^1 f(t) dt.$$

2. Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} a_k$.

3. On suppose maintenant que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue et que $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ est divergente. Soit $(b_n)_{n \geq 0}$ une suite de réels strictement positifs. Montrer qu'il existe une suite $(v_n)_{n \geq 0}$ telle que $v_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \int_{v_n}^{v_{n+1}} f(t) dt.$$

4. Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n \geq 0}$.

Exercice 116. Un escalier sous l'hyperbole.

CCP (PSI)

Pour $t > 0$, on pose $f(t) = t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$.

1. Montrer que f est nulle sur $]1, +\infty[$ et que, pour tout $n \geq 1$ et tout $t \in \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right]$, $f(t) = nt$.
2. Montrer que $\int_0^{+\infty} t \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor dt$ converge et exprimer sa valeur à l'aide d'une somme de série.

Exercice 117. La partie fractionnaire de $\frac{1}{t}$.

Montrer que la fonction f définie sur $]0, 1]$ par

$$f(t) = \frac{1}{t} - \left\lfloor \frac{1}{t} \right\rfloor$$

est intégrable, et calculer son intégrale.

Applications et inégalités

★ **Exercice 118.** *Problème des moments.*

Mines (PSI)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^1 f(t) P(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $m_n = \int_0^{+\infty} e^{(-1+i)t} t^n dt$.
- (b) Construire $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ non nulle telle que $\forall P \in \mathbb{R}[X], \int_0^{+\infty} f(t) P(t) dt = 0$.

Exercice 119. *Une approximation de l'unité sur $\mathbb{R}_+$.*

Soit (φ_n) une suite de fonctions continues positives sur $\mathbb{R}_+$, intégrables, telles que

$$\int_0^{+\infty} \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 \quad \text{et} \quad \forall \alpha > 0, \int_\alpha^{+\infty} \varphi_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

1. Soit g continue et bornée sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\int_0^{+\infty} \varphi_n(t) g(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(0)$.
2. *Application.* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx} \arctan(x) dx$. Montrer que $I_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 120. *Une combinaison miraculeusement positive.*

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que f^2 et $(f'')^2$ soient intégrables sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer que $(f')^2$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
2. Trouver une primitive de $f^2 - (f')^2 + (f'')^2 - (f + f' + f'')^2$.
3. En déduire que $\int_{\mathbb{R}_+} (f^2 - (f')^2 + (f'')^2) \geq 0$.

△ **Exercice 121.** *Inégalité de Kolmogorov L^2 .*

Centrale

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f, f'' \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f' \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\left(\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} f^2 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} (f'')^2 \right)$.
2. Montrer que f est uniformément continue et tend vers 0 en $\pm\infty$.

♠ **Exercice 122.** *L'inégalité de Wirtinger par une astuce.*

Mines

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que $\int_0^1 f(t) f'(t) \cotan(\pi t) dt$ converge.
2. En déduire que $\pi^2 \int_0^1 f(t)^2 dt \leq \int_0^1 f'(t)^2 dt$.

★ **Exercice 123.** Deux tiers pour la queue de f^2 .

Mines

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$. On suppose que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et que f' est croissante. Montrer que, pour tout $x \geq 0$,

$$\int_x^{+\infty} f^2 \leq \frac{2}{3} f(x) \int_x^{+\infty} f.$$

Exercice 124. Une constante optimale pour les fonctions décroissantes.

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < b \leq a$, et E l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ décroissantes telles que $t \mapsto f(t)t^{2a}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

1. Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall f \in E, \quad \left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{a+b} dt \right)^2 \leq K \left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2a} dt \right) \left(\int_0^{+\infty} f(t)t^{2b} dt \right).$$

2. Montrer que la meilleure constante K est $\frac{(1+2a)(1+2b)}{(1+a+b)^2}$.

★ **Exercice 125.** Inégalité de Weyl.

X (PSI)

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ telle que f' et $g : x \mapsto xf(x)$ soient de carré intégrable. Montrer qu'alors f est de carré intégrable et que

$$\int_0^{+\infty} f^2 \leq 2 \sqrt{\int_0^{+\infty} g^2} \sqrt{\int_0^{+\infty} (f')^2}.$$

★ **Exercice 126.** Un supremum qui mesure la variation totale.

X

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact et E l'ensemble des fonctions φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ telles que $|\varphi| \leq 1$. Déterminer $\sup \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f\varphi' ; \varphi \in E \right\}$.

Exercice 127. Une fonction rationnelle préservant la mesure de Lebesgue.

X

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ intégrable. On pose, pour $x \neq 0$, $g(x) = f\left(x - \frac{1}{x}\right)$. Montrer que g est intégrable sur $\mathbb{R}^*$ et que $\int_{\mathbb{R}^*} g = \int_{\mathbb{R}} f$.

★ **Exercice 128.** Des fractions rationnelles préservant la mesure de Lebesgue.

Soient $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ des réels et

$$F : t \mapsto t - \sum_{k=1}^n \frac{1}{t - a_k},$$

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. On convient que $a_0 = -\infty$ et $a_{n+1} = +\infty$. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue et intégrable, la fonction $t \mapsto f(F(t))$ est intégrable sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, avec

$$\int_{\mathbb{R}} f = \sum_{k=0}^n \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(F(u)) du.$$

Indications

Exercice 1. Les cas $\alpha > 1$ et $\alpha < 1$ se font directement par comparaison avec les intégrales de Riemann (quitte à prendre un γ entre 1 et α). Dans le cas $\alpha = 1$, qui n'est pas tranché par les intégrales de Riemann (et qui est à vrai dire le cas important des intégrales de Bertrand), un changement de variable $u = \ln t$ permet de faire le calcul.

Exercice 2.

- (i) CONV
- (ii) DIV
- (iii) CONV
- (iv) CONV ssi $\alpha > 0$
- (v) CONV ssi $\alpha > \frac{3}{2}$
- (vi) DIV
- (vii) CONV ssi $0 < \alpha < 1$
- (viii) CONV ssi $\alpha > -1$
- (ix) CONV ssi $\min(\alpha, \beta) < 1 < \max(\alpha, \beta)$
- (x) CONV
- (xi) DIV
- (xii) DIV
- (xiii) CONV
- (xiv) CONV ssi $n > 1$
- (xv) CONV ssi $\alpha > -1$

Exercice 3.

- (i) L'intégrale diverge (en comparant avec $\frac{1}{t}$).
- (ii) Un calcul de dérivée permet de comparer directement $\ln(\ln(e+t))$ et t , ce qui entraîne la divergence de l'intégrale.
- (iii) Deux calculs d'équivalents montrent que l'intégrale converge (absolument).
- (iv) L'intégrale est absolument convergente : il faut pousser un peu les développements asymptotiques.
- (v) L'intégrale diverge (en $+\infty$).
- (vi) L'intégrale converge (absolument).
- (vii) L'intégrale diverge (en $+\infty$).
- (viii) En étudiant le comportement (légèrement déroutant à cause de la non-dérivabilité) de $\arccos$ en 1, on obtient la convergence (absolue) de l'intégrale.
- (ix) L'intégrale diverge (en $+\infty$).
- (x) L'intégrale converge (absolument).
- (xi) L'intégrale converge (absolument) au prix d'un calcul asymptotique assez sérieux en 0.
- (xii) L'intégrale converge (absolument) après un petit calcul asymptotique en $+\infty$.
- (xiii) L'intégrale diverge toujours.
- (xiv) L'intégrale diverge si $\beta > 0$, converge si $\beta < 0$. Si $\beta = 0$, elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.
- (xv) Si $\alpha \leq 0$, l'intégrale converge si et seulement si $\beta > \alpha + 1$. Si $\alpha > 0$, elle converge si et seulement si $\beta > 1$.
- (xvi) Si $\alpha = 0$, l'intégrale converge pour une unique valeur (moche) de β . Si $\alpha < 0$, elle converge si et seulement si $\alpha < -1$ et $\beta = 0$. Enfin, si $\alpha > 0$, elle converge si et seulement si $\alpha > 1$ ET $\beta = 1 + \ln(2)$.

Exercice 4.

- (i) CONV ssi $-1 < \alpha < 1$
- (ii) CONV
- (iii) DIV
- (iv) CONV
- (v) CONV
- (vi) CONV
- (vii) Non intégrable (découper en tranches). Par contre elle est semi-convergente.

Exercice 5. On peut par dérivabilité en 0 majorer $f(u)$ pour u au voisinage de 0.

Exercice 6.

1. On utilisera l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Il s'agit d'appliquer la première question à $g : x \mapsto \frac{e^{H(x)}}{1 + \int_0^x e^{H(t)} dt}$ — sans le +1, le quotient explose en 0 et n'est pas continu sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7.

1. Faire un développement asymptotique standard.
2. L'inégalité en question est Cauchy-Schwarz.

Exercice 8.

- (i) On pourra commencer par le changement de variable $t = u^2$.
- (ii) On peut faire une intégration par parties. On se simplifie les calculs en ne choisissant pas la primitive la plus évidente de $1/t^2$.
- (iii) Une intégration par parties conclut rapidement.
- (iv) Changement de variable $t = u^2$.
- (v) Changement de variable $u = \cos(x)$.
- (vi) Changement de variable $x = t^3$.
- (vii) Changement de variable $u = \sqrt{1+x}$.
- (viii) Changement de variable $u = (1+x)^{\frac{1}{3}}$.

Exercice 9. La convergence ne pose pas vraiment de problème après développements asymptotiques standards (elle a lieu pour $a \in]2, 3[$).

Pour le calcul, on pourra faire une intégration par parties pour simplifier le numérateur, puis un changement de variables. On trouve $2\frac{\pi}{3}$.

Exercice 10. Comme souvent, une intégration par parties permet de remplacer par une intégrale simple une intégrale double qu'on ne saurait pas vraiment gérer — l'idée déjà vue dans la démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

Exercice 11. On pourra faire le changement de variables $u = x^{-1}$.

Et $\frac{1}{x^2 - x + 1}$ est plus simple à intégrer (on économise un facteur dans la DÉS).

On pourra remarquer que cette manipulation (remplacer F par $\frac{1}{2} \left(F(X) + \frac{1}{X^2} F\left(\frac{1}{X}\right) \right)$) remplace un $\frac{1}{X-a}$ par $\frac{1}{2} \left(\frac{1}{X-a} - \frac{1}{X-a^{-1}} + \frac{1}{X} \right)$ et donc simplifie les pôles ± 1 , au prix de risquer la complexification des autres.

Exercice 12. Dans les deux premiers cas, le changement de variables $u = \frac{1}{t}$ est utile. Dans le troisième, $u = \frac{\pi}{2} - x$.

Exercice 13.

1. Remarquer que $\frac{dt}{t}$ encourage les changements de variables $t \mapsto \lambda t^\alpha$ et que l'on connaît bien $\arctan(t) + \arctan(\frac{1}{t})$.
2. Du $\frac{1}{1+t^2}$ ou de l'arctan peuvent pousser à $t = \tan(\theta)$ (vérifier la bonne définition). Pour la seconde du $\frac{1}{\sin^2}$ doit se reconnaître aussi facilement que le fameux $\frac{1}{\cos^2}$.

Exercice 14. On pourra commencer par exploiter la symétrie $x \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x$, puis calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sqrt{\sin(x)\cos(x)}} dx$ à l'aide du changement de variables $u = \sin(x) - \cos(x)$.

Exercice 15.

1. La symétrie $x \leftrightarrow \frac{\pi}{2} - x$ permet de réécrire l'intégrale de gauche comme la moitié de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin(2x)) (\sin(x) + \cos(x)) dx$. Le changement de variable $u = \sin(x) - \cos(x)$, de dérivée $\cos(x) + \sin(x)$, est alors très efficace.
2. On peut appliquer la première question à $f : t \mapsto (1 + \sqrt{t})^{-1}$.

Exercice 16.

- (i) Par trigonométrie hyperbolique (Bioche hyperbolique on pourrait même dire) on se rend compte que $u = \text{sh}(x)$ est une bonne idée.
- (ii) Le dénominateur peut inciter à poser $x = \sin^2(\theta)$, puis une IPP.
- (iii) Après le changement de variable $x = \frac{t}{1+t}$, on peut poser $t = u^4$.
- (iv) La symétrie $x \mapsto \frac{\pi}{2} - x$ change le signe de l'intégrande.

Exercice 17. Pas de difficulté pour la nature.

Pour la valeur, la seule règle de Bioche hyperbolique à connaître est la même que la seule règle de Bioche circulaire : **faire une tangente de l'angle moitié**.

Exercice 18.

1. Remarquer que $\frac{\sin(t)}{t^2} = \frac{1}{t} + O(t)$. On obtient $\ln(3)$.
2. Vérifier l'intégrabilité. Linéariser mais attention pas en partant de 0 mais en partant de $x > 0$ (pour la bonne définition). Puis après un changement de variable naturel et Chasles se ramener à la question précédente.

Exercice 19.

1. La première intégrale se calcule par la méthode usuelle (mise sous forme canonique au dénominateur). La seconde se ramène à la première par IPP.
2. La question précédente nous permet de calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{(x^2 + x + 1)^2} dx$ pour deux polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$, à savoir $P = X^2 + X + 1$ et $P = 2X^2 + X$. Comme on sait aussi le faire pour $P = 2X + 1$, on peut obtenir $P = 1$ par combinaisons linéaires.

Exercice 20. Faire une DÉS comme d'habitude.

Exercice 21. Un changement de variables affine permet de ramener le trinôme au dénominateur à $1 - u^2$, ce qui permet de trouver facilement une primitive.

Exercice 22. Multiplier par la quantité conjuguée.

Puis par IPP faire passer les $\sqrt{1 \pm t^2}$ en dénominateur.

Exercice 23. DÉS usuelle dans $\mathbb{C}$ (pôles simples) et regroupement des conjugués.

Et mise sous forme canonique usuelle.

Exercice 24.

1. DÉS puis équivalent.
2. Primitives explicites, pour le dernier on trouve -2π ou $+2\pi$ selon le signe de $\text{Im}(z)$.
3. Regrouper les pôles conjugués, utiliser les questions précédentes, intégrer entre $-A$ et A et faire tendre A vers $+\infty$.
4. Application directe.

Exercice 25.

1. Approcher g par des fonctions en escalier et utiliser le calcul explicite de $\int e^{ixt} dt$ (sinon passer par le cas $\mathcal{C}^1$ et densité).
2. Pour $\varepsilon > 0$ il existe un segment $[a, b] \subseteq I$ tel que $\int_{I \setminus [a, b]} |f| \leq \varepsilon$.

Exercice 26. On rappelle que la formule essentielle des intégrales de Wallis, obtenue par IPP est $(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$ et que $e^x \geq 1+x$.

Exercice 27. Pour la convergence il faut $a > 0$, puis mise sous forme canonique. On obtient $\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2-4ac}{4a}}$.

Exercice 28.

1. En $+\infty$ pas de problème et en 0 encore moins car prolonger par continuité.
2. On aimerait changer t en $\frac{a}{t}$ au prix d'un $\frac{1}{t^2}$, d'où $u = \frac{a}{t}$.
3. Juste faire $\frac{I(a) + J(a)}{2}$.
4. Poser $u = t - \frac{a}{t}$.

Exercice 29.

1. On remarque qu'on peut tout exprimer en $\frac{1}{\cos^2} = 1 + \tan^2$ dans la racine en sortant un $\frac{1}{\cos^2}$. D'où poser $t = \tan(\theta)$. Il reste alors un changement affine.
2. Constater que $J_{\lambda a, \lambda b}$ s'exprime facilement. Se ramener par exemple à $ab = 1$, puis par découpe et $u = \frac{1}{t}$ se ramener à $[0, 1]$ et faire $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.
3. À partir du rang 1, l'une croissante, l'autre décroissante, et une inégalité entre les deux. Remarquer que $J_{\ell, \ell}$ se calcule explicitement. Comme on n'a pas encore de théorème général de continuité on peut remarquer que $J_{\min(a,b), \min(a,b)} \geq J_{a,b} \geq J_{\max(a,b), \max(a,b)}$.

Exercice 30. Comme Wallis classique faire une IPP pour passer de I_{n+2} à I_n .

Ou alors ramener à Wallis usuel par $u = \text{th}(t)$ suivi $u = \sin(\theta)$ (mais ce n'est pas trop l'esprit de l'exercice).

Exercice 31. On peut faire un développement compliqué ou constater qu'il s'agit de $\frac{T_n(\cos t) - T_n(\cos x)}{\cos t - \cos x}$

donc prolongeable par continuité.

Et qu'on connaît bien $T_{n+1} + T_{n-1}$ en fonction de $2XT_n$.

Exercice 32.

1. C'est une fonction régulière sur le segment $[0, \pi]$ par forme canonique, et la limite est juste un lemme de Lebesgue.
2. Calcul explicite on peut rajouter des termes/multiplier $\cos(t)$ pour obtenir $b^2 - 2b \cos(t) + 1$. On obtient $\frac{b^2 + 1}{b} J_{n+1}$.
3. On obtient une Équation de Récurrence Linéaire d'Ordre 2 à Coefficients Constants. La résoudre et calculer explicitement J_0 et J_1

Exercice 33.

1. Faussement impropre.
2. La suite est constante (logique car $\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} = \sum_{k=-n}^n e^{2ikt}$).
3. Théorème de limite de la dérivée en 0.
4. Par lemme de Lebesgue, $J_n - I_n$ tend donc vers 0.
5. Par changement de variables J_n s'écrit $\int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du$. Attention à bien justifier la convergence **avant** de faire tendre la borne supérieure vers $+\infty$.

Exercice 34. Remarquer qu'on sait faire pour $\int_{-r}^r \frac{\sin(nt)}{t} dt$ et qu'il suffit donc de majorer la différence (encore Lebesgue).

Exercice 35.

1. Au voisinage de 0, f est bornée, à celui de l'infini l'intégrande est dominée par $|f|$.
2. Lemme de Lebesgue.
3. Couper proche de 0. Sur $[\varepsilon, 1]$ ce sera encore du Lebesgue.
4. Découper.

Exercice 36.

- (i) IPP.
- (ii) IPP et linéariser. Remarquer que de cette méthode on peut en fait calculer tous les $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- (iii) Vérifier d'abord la convergence. Faire deux IPP successives, en abaissant la puissance de t au dénominateur, jusqu'à retomber sur l'intégrale de Dirichlet.

Exercice 37.

1. RAS
2. Linéariser pour trouver $f(t) = \frac{1}{(2i)^{n+1}} \sum_{\delta \in \{-1, 1\}^{n+1}} \left(\prod_{k=0}^n \delta_k \right) e^{i(\sum_{k=0}^n \delta_k a_k)t}$ puis regrouper les termes d'indices δ et $-\delta$.
3. IPP successives, **attention c'est ici qu'on utilise l'hypothèse** pour obtenir $S_\varepsilon > 0$ pour tout ε .
4. Dans la somme précédente après développement tout terme avec une puissance impaire d'un ε_k est nul. La seule possibilité est alors d'avoir $\varepsilon_1^2 \cdots \varepsilon_n^2$, tous les autres termes étant nuls.

On obtient finalement $\frac{\pi}{2a_0}$.

Remarque culturelle :

On obtient le résultat (fausse récurrence) suivant :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \times \frac{\sin(\frac{t}{3})}{\frac{t}{3}} dt = \dots = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \times \frac{\sin(\frac{t}{3})}{\frac{t}{3}} \times \frac{\sin(\frac{t}{5})}{\frac{t}{5}} \times \dots \times \frac{\sin(\frac{t}{13})}{\frac{t}{13}} dt = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} \times \frac{\sin(\frac{t}{3})}{\frac{t}{3}} \times \frac{\sin(\frac{t}{5})}{\frac{t}{5}} \times \dots \times \frac{\sin(\frac{t}{15})}{\frac{t}{15}} dt \neq \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 38. Poser $u = t^2$ pour la convergence, puis intégrer par parties en prenant $-1/(2t)$ comme primitive de $1/(2t^2)$: les deux crochets sont nuls aux deux bornes.

Exercice 39.

1. Changement de variable $u = t^2$ et intégration par parties.
2. La même IPP donne $C(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$.
3. La question précédente donne l'existence. Pour la valeur, comme pour toutes les queues faire une IPP, puis se rendre compte que miraculeusement on peut en refaire une deuxième. On obtient comme résultats $\frac{F}{2\sqrt{2}}$ et $F\left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$.

Exercice 40.

1. En $+\infty$ aucun problème comme pour $\frac{\sin(t)}{t}$.
2. En 0 cela dépend de la somme des λ_i .
3. Comme la somme est nulle il suffit de savoir faire un terme de la forme $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(at) - \cos(t)}{t} dt$. Pour la valeur attention à la découpe il faut la faire entre ε et $+\infty$ puis faire des changements affines.

Exercice 41.

1. Faire, sans surprise, deux IPPs pour calculer la valeur explicite.
2. On sait calculer explicitement $\sum_{k=1}^n \cos(kt)$. On obtient $-\frac{1}{2} + \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$.

Repérer alors un lemme de Lebesgue après avoir montré qu'une fonction du type $\frac{t}{\sin(t)}$ est $\mathcal{C}^1$ par limite de la dérivée.

Exercice 42.

1. Pour l'existence, croissances comparées.
2. Pour le calcul faire des intégrations par parties pour obtenir une récurrence sur p .

Exercice 43.

1. RAS
2. RAS
3. Écrire $F(a) = \frac{F(a) + F(a)}{2}$.
4. Sans surprise $x = \tan(\theta)$...

Exercice 44.

1. En $+\infty$ tout va bien, regarder en 0.

2. IPP.
3. Récurrence à partir de l'IPP précédente.
4. Changement de variable. Puis re récurrence.

Fonction Bêta.

1. Regarder en 0 (x) et en 1 (y).
2. Changement de variable $s = 1 - t$ et $1 = t + (1 - t)$.
3. IPP et question précédente.
4. Récurrence.
5. Se ramener à un arcsin. Puis re récurrence. On obtient $\pi \frac{(2n)!(2m)!}{4^{n+m}n!m!(n+m)!}$.

Remarque culturelle : on pourrait en fait montrer que pour tous $x, y > 0$, on a :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Exercice 45.

- (i) En 0 pas de souci, en $+\infty$ on a $\frac{\sin(t)}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc convergent mais pas intégrable.
- (ii) Par exemple avec $u = e^t$ sur un segment on obtient convergent mais pas intégrable. Ou IPP.
- (iii) Avec $u = t^2$ sur un intervalle on obtient convergent mais pas intégrable. Ou IPP.
- (iv) Se convaincre que c'est le même combat que le point précédent.
- (v) Faire une IPP en regardant le terme comme $\frac{t}{3t^2 - 1} (3t^2 - 1) \sin(t^3 - t)$.
- (vi) Toujours la même méthode.
- (vii) Idem.
- (viii) Par exemple couper sur des intervalles de tailles 2π et obtenir sur ceux une majoration d'ordre $\frac{1}{n^2}$.

Exercice 46.

1. En 0, pas de problème. Faire un DL en $+\infty$, on obtient $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} - \frac{\sin^2(x)}{x} + \dots$ et donc divergent (pourquoi ?)
2. Une IPP montre que l'intégrale de $\frac{\cos(x)}{\ln(x)}$ converge, mais pas absolument (faire par exemple des petits blocs de longueur 2π , ou astucieusement $|\cos(x)| > \frac{1 + \cos(2x)}{2}$).

Exercice 47.

1. Faire la symétrie par rapporte à $t \mapsto \pi - t$ puis suivre l'énoncé. On obtient $\varphi(x) = \frac{\pi}{\sqrt{1+x}}$.
2. Déterminer la nature de la somme des intégrales entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$ pour obtenir comme CNS $\alpha > 2\beta + 2$.

Exercice 48.

1. Encadrer le sinus entre deux fonctions affines, pour obtenir un encadrement entre deux termes d'ordre de grandeur $n^{1-\frac{\alpha}{2}}$.
2. C'est une limite croissante donc tout marche bien, même condition.

Exercice 49.

1. En 0 tout se passe bien. Regarder ensuite au voisinage de $n\pi + \frac{\pi}{2}$ et remarquer que la hauteur est d'ordre 1 sur une largeur d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Alternativement faire des séries de Wallis avec comme idées que sur une période l'intégrale de $\sin^p$ est d'ordre $\frac{1}{\sqrt{p}}$.

On a donc la même nature que $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Pour $\alpha \leq 2$ le même argument de divergence convient. Pour $\alpha > 2$ l'encadrement dans l'autre sens donne la convergence.

Exercice 50. Tout d'abord mettre l'intégrande sous la forme $e^{-x} / (e^{-3x} + |\sin(x)|)$, puis découper l'intégrale en tranches $[k\pi, (k+1)\pi]$, car c'est une limite croissante.

En majorant/minorant grossièrement les exponentielles, on obtient que chaque bout est en $O(ke^{-k\pi})$. (Pour le $\frac{1}{a + \sin(t)}$ soit calculer explicitement avec de l'argth, soit minorer sinus par une fonction affine).

Exercice 51.

1. Le point important est 0, et par exemple faire un taux d'accroissement. Faire un schéma pour voir que f' n'est pas bornée (et le démontrer avec une suite bien choisie).
2. On sait bien calculer $\int_{\varepsilon}^1 f' \dots$
3. En effectuant le changement de variable $u = \frac{1}{x^2}$, on se ramène à l'intégrale de $\frac{|\sin(u)|}{u}$ sur $[1, +\infty[$.

Exercice 52. Par IPP on se ramène à l'intégrale de $\cos(P(x))P''(x) / (P'(x))^2$, qui converge absolument.

Exercice 53.

1. Faire un changement de variable adapté à la π -périodicité du sinus, et utiliser la décroissance de φ .
2. Un découpage en bloc donne des séries alternées. Attention ici il n'y a pas de positivité il faut donc gérer le petit bout qui reste. Ce dernier est compris entre deux termes consécutifs.
3. Avec $u = t^2$ on se ramène à $\varphi = \frac{1}{\sqrt{\cdot}}$.
4. Idem quitte à re IPP pour obtenir du $\frac{\sin(u)}{u^{\frac{3}{2}}}$.

Exercice 54. Les trois questions reposent sur le même réflexe : *couper en A fixé* par exemple tel que le reste est $\leq \varepsilon$, majorer la queue par la convergence de l'intégrale, puis faire tendre x vers $+\infty$ à A fixé.

1. Faire C-S sur $[A, x]$.
2. Remarquer que par décroissance $\frac{x}{2}f(x) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x f$.
3. De même écrire $0 \leq \frac{1}{x} \int_0^x t f(t) dt \leq \frac{1}{x} \int_0^A t f(t) dt + \frac{1}{x} \int_A^x x f(t) dt \leq \frac{K_A}{x} + \varepsilon$.

Exercice 56. En posant F une primitive de f on a une intégrale à la Frullani, $\int_1^A g = \int_A^{2A} \frac{F(t)}{t} dt - \int_1^2 \frac{F(t)}{t} dt$.
Faire les deux sens séparément :

1. si f est intégrable alors F bornée d'où une majoration de $\int_1^A g$,
2. si g est intégrable, remarquer que $\int_A^{2A} \frac{F(t)}{t} dt \geq F(A) \ln(2)$.

Exercice 63.

1. C'est un cas particulier de « l'évanescence des tranches » : on peut écrire cette intégrale comme la différence de deux intégrales convergeant vers la même limite.
2. On utilisera l'uniforme continuité pour relier la tranche de la question précédente à la valeur $f(x)$.

Exercice 64. On utilisera les hypothèses L^2 pour montrer que f^2 possède une limite en $+\infty$, qui ne pourra être que 0.

Exercice 65. On montrera d'abord que f' possède une limite, nécessairement nulle, en $+\infty$.

Exercice 66. Notre hypothèse bizarre entraîne que la fonction f est localement « $1/2$ -höldérienne », c'est-à-dire que $|f(x_1) - f(x_2)|$ est contrôlée par des quantités de la forme $|x_1 - x_2|^{1/2}$. Cela entraîne l'uniforme continuité.

Exercice 69.

1. On majorera très brutalement $\int_{-\infty}^{+\infty} |uv|$.
2. Par contraposée, si u n'est pas bornée, on peut trouver une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $|u(x_n)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$. Il est même possible (et c'est le point-clef) de « raréfier » cette suite pour obtenir que les x_n sont suffisamment loin les uns des autres. On définit alors facilement une fonction v qui est suffisamment grande en les x_n pour faire diverger le produit $\int_{-\infty}^{+\infty} |uv|$ mais suffisamment petite ailleurs pour être intégrable.
3. On a évidemment envie de prendre $v = \operatorname{sgn} u = \frac{u}{|u|}$, mais cela pose un certain nombre de problèmes. Une version « régularisée » $\frac{u}{|u| + \varphi}$ fait l'affaire, avec φ bien choisie.

Exercice 73. On pourra comparer $f(x)$ et 2^{-x} .

Exercice 74. Dans les deux cas, un sens est une simple comparaison ; pour l'autre, comparer deux tranches consécutives, sur lesquelles la décroissance de f donne le bon encadrement.

Exercice 75. On découpe en tranches et on cherche à se ramener au critère spécial des séries alternées.

Exercice 76. On pourra introduire une primitive F de f puis « primitiver l'oscillation, dériver l'amortissement ».

On utilise seulement le caractère borné de F et décroissant tendant vers 0 de $t \mapsto t^{-\alpha}$.

Exercice 77. On pourra introduire la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t) e^{-at} dt$ puis « primitiver l'oscillation, dériver l'amortissement ».

Exercice 78. Si l'on peut faire apparaître le produit $if' e^{if}$, la méthode classique (« primitiver l'oscillation, dériver l'amortissement ») fonctionne. On force donc les choses, en s'éloignant des endroits où f' pourrait s'annuler.

Exercice 88.

1. Prolonger par $f(0)$.
2. En posant $F : x \mapsto \int_0^x f$, on pourra montrer $\int_a^b g^2 \leq \frac{F(a)^2}{a} + 2 \int_a^b f(t) g(t) dt$ puis passer à la limite quand $a \rightarrow 0$, puis chercher à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. En revenant au cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient des « fausses » fonctions

optimales, qui ne sont pas dans L^2 . Mais on peut les modifier un peu pour obtenir des fonctions aussi proches qu'on le souhaite de l'optimum.

Exercice 94. Le plus simple est de conjecturer le bon équivalent $E(x)$ puis, à rebours, de vérifier que $E'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -e^{-x^4}$ et d'appliquer le théorème de sommation des équivalents.

Exercice 95.

- ▶ Application directe du théorème de sommation des équivalents.
- ▶ La question précédente donne $u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^{-u_n^2}}{2u_n}$. On peut se servir de cette information asymptotique pour encadrer l'intégrale $\int_{u_n}^{u_{n+1}} 2te^{t^2} dt$ et montrer qu'elle tend vers 1, ce qui finit l'exercice.

Exercice 96. On pourra introduire la fonction $g : x \mapsto \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ et utiliser d'abord le théorème de sommation des équivalents pour donner les équivalents de g en 0 et en $+\infty$.

Exercice 97. Comme souvent, le plus simple est de conjecturer le bon équivalent $E(x)$ puis, à rebours, de vérifier que $E'(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{x^3}$ et d'appliquer le théorème de sommation des équivalents.

Exercice 99.

1. La démonstration classique de la convergence de cette intégrale le fait déjà.
2. On obtient en fait des développements asymptotiques à autant de termes qu'on le souhaite en effectuant autant d'IPP qu'on en a le courage. À vrai dire,

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\cos(x)}{x} + \frac{\sin(x)}{x^2} - \frac{2 \cos(x)}{x^3} - \frac{6 \sin(x)}{x^4} + \frac{24 \cos(x)}{x^5} + \frac{120 \sin(x)}{x^6} + o\left(\frac{1}{x^6}\right).$$

Exercice 100.

- (i) $\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{x \ln^2 x} + o\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right)$;
- (ii) $x |\ln x|^{1/2} + \frac{1}{2} x |\ln x|^{-1/2} + o(x |\ln x|^{-1/2})$.

Exercice 104. On pourra commencer par supposer $\ell = 0$ et utiliser une variante du slogan « primitiver l'oscillation (ici, f , qui doit bien osciller un peu pour que sa moyenne tende vers 0), dériver l'amortissement ».

Exercice 106.

1. On connaît un exemple où l'équivalent est une égalité.
2. La question la plus subtile est la (b) : on peut utiliser la même idée que pour la règle de D'Alembert : puisque $\ln g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \mu \ln(x)$ avec $\mu < -1$, on peut intercaler un $\mu^+ \in]\mu, -1[$ et « affaiblir » l'hypothèse en un $\ln g(x) \leq \mu^+ \ln(x)$, beaucoup plus robuste. (À vrai dire, ici, il est même possible de ne pas s'embêter et de prendre $\mu^+ = -1$).
4. On est dans un cas douteux. Vu que ce qui précédait était, de manière détournée, des comparaisons avec des séries de Riemann, on peut chercher dans une échelle de comparaison plus fine et vérifier que toutes les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)^\beta}$ vérifient VR $[-1]$.

Exercice 107.

1. Deux idées, toutes les deux importantes. *Primo*, F est une primitive de f périodique, on a le comportement « à grande échelle » $F(x) = \langle f \rangle x + O(1)$. *Secundo*, « primitiver l'oscillation, dériver l'amortissement ».

- On applique la question précédente, en se souvenant de la valeur moyenne de $|\sin|$ et que l'intégrale de Dirichlet converge en 0.
- Comme souvent, l'IPP est une bonne façon de contourner les intégrales doubles.

Exercice 108. C'est un argument *alla Cesàro*, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour gérer le « régime asymptotique ».

Exercice 109.

- On pourra faire apparaître de force le facteur $i\lambda\varphi'(x)$ pour faire ensuite l'IPP habituelle.
- On fait une démonstration par récurrence, en découpant l'intervalle d'intégration pour confiner en un tout petit intervalle central le point éventuel d'annulation de la dérivée.

Exercice 111.

- On peut se ramener au cas où f est positive au voisinage de 0, et décroissante. Il est alors utile de remarquer que $\frac{f(1/n)}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, en utilisant la décroissance de f , pour le comparer à une certaine tranche de l'intégrale.
- On peut construire une fonction f intégrable telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f(1/n) = n^2$.

Exercice 118.

- On pourra admettre le théorème de Weierstrass : $\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{R}[X] : \forall x \in [0, 1], |f(x) - P(x)| \leq \varepsilon$. Vous l'avez peut-être vu en sup, ce sera du cours en spé.
- On a une relation de récurrence $m_{n+1} = \frac{(n+1)}{\sqrt{2}} e^{i\pi/4} m_n$, ce qui entraîne $m_n = \frac{\exp(i(n+1)\frac{\pi}{4})}{2^{\frac{n+1}{2}}} n!$.
 - Le point-clef est que le nombre complexe m_n tourne d'un huitième de tour à chaque étape. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, 0 = \operatorname{Im} m_{4n+3}$. On remarquera alors que $\int_0^{+\infty} \sin t e^{-t} t^{4n} t^3 dt$ est (miraculeusement) une intégrale de la forme $\int_0^{+\infty} g(t) t^n dt$ pour une certaine fonction continue g .

Exercice 125. Une intégration par parties et une application de Cauchy-Schwarz montreront que le crochet $[t f(t)^2]_{t=0}^A$ possède une limite quand $A \rightarrow +\infty$. Cette limite est nécessairement nulle, ce qui permettra d'écrire $\int_0^{+\infty} f^2$ comme le produit scalaire (à une constante près) de f et de g .

Exercice 127. Une étude de fonctions permet de comprendre que $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ est un changement de variables « à deux branches ». L'égalité à démontrer est alors une compensation entre ces deux branches, c'est-à-dire une égalité de la forme $\varphi'_1 + \varphi'_2 = 1$, ici relativement simple à démontrer par les relations de Viète. (La difficulté est plutôt de se rendre compte que c'est ce que l'on cherche à démontrer !)