

Intégration sur un segment

Intégration sur un segment (révisions de MPSI)

♠ **Exercice 1.** *Moyenne d'une fonction périodique.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction périodique.

Soit $T > 0$ une période de f et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que la valeur de

$$\frac{1}{T} \int_a^{a+T} f$$

ne dépend pas

1. de $a \in \mathbb{R}$,
2. de $T > 0$ une période de f .

On appelle cette valeur **la** valeur moyenne de f .

Exercice 2. *Primitive d'une fonction périodique.*

Soit $T > 0$ et $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction T -périodique.

1. À quelle condition la fonction f admet-elle des primitives périodiques ?
2. Dans le cas où f n'admet pas de primitive périodique, déterminer un équivalent de $\int_0^x f(t) dt$ lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 3. *La continuité est essentielle.*

Soit I un intervalle et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux. On suppose que f admet une primitive sur I . Montrer que f est continue.

Exercice 4. *Un cas particulier du lemme de Lebesgue.*

Centrale

Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante.

Déterminer, si elle existe, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi \frac{f(x)}{1 + \cos^2(nx)} dx$.

Exercice 5. *En vrac : trouver le bon polynôme.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^1 f^2 = \int_0^1 f^3 = \int_0^1 f^4.$$

Montrer que $f = 0$ ou $f = 1$.

Exercice 6. *Un critère étrange de nullité.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Montrer que si $\varphi : x \mapsto f(x) \int_0^x f$ est décroissante, alors f est nulle.

Δ Exercice 7. *Factorisation et signe.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f = 0$.

Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq f \leq M$.

Montrer

$$\int_0^1 f^2 \leq -mM.$$

Exercice 8. *Un exo très calculus.*

X (PC)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et $0 \leq f' \leq 1$. Montrer

$$\int_0^1 f^3 \leq \left(\int_0^1 f \right)^2$$

et étudier le cas d'égalité.

Exercice 9. *Encadrement d'une intégrale.*

Mines (PC)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer

$$\frac{1}{n+1} \leq \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2} \right)^n dt \leq \frac{2}{n+1}.$$

Exercice 10. *Lemme de Gromov.*

Soient $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+)$. On suppose $g > 0$ et $h : x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ croissante.

Le but de l'exercice est de montrer que le quotient $\varphi : x \mapsto \frac{\int_0^x f}{\int_0^x g}$ croît sur $\mathbb{R}_+^*$. Soit $0 < x_1 \leq x_2$.

1. Montrer que $\int_0^{x_1} f \int_{x_1}^{x_2} g \leq \int_{x_1}^{x_2} f \int_0^{x_1} g$.
2. Conclure.

♣ Exercice 11. *Égalité de la moyenne bis.*

X (PC)

Soit $\omega \in \mathcal{C}_{pm}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = \frac{1}{\int_a^b \omega(t) dt} \int_a^b f(t) \omega(t) dt.$$

Exercice 12. *Existence d'un point critique.*

Centrale (PSI)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(1) = \int_0^1 f$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f'(c) = 0$.

Δ Exercice 13. *Seconde inégalité de la moyenne.*

Soient $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{R})$ monotone et $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = f(a) \int_a^c g(t) dt + f(b) \int_c^b g(t) dt.$$

2. On suppose de plus que f est décroissante positive.
Montrer qu'il existe $d \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = f(a) \int_a^d g(t) dt.$$

Exercice 14. Une injection de Sobolev.

X

1. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists C > 0, \forall f \in C^1([a, b]), \forall x, y \in [a, b],$

$$|f(x)^2 - f(y)^2| \leq C \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

2. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, \exists D > 0, \forall f \in C^1([a, b]),$

$$\|f\|_\infty^2 \leq D \int_a^b f^2 + \varepsilon \int_a^b f'^2.$$

Exercice 15. Deux fonctions de même intégrale, et un quotient qui s'emballe.

X (PC)

Soient deux réels $a < b$ et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ avec $f \neq g$. On suppose $\int_a^b f = \int_a^b g$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_a^b \frac{f^{n+1}}{g^n}$.

1. Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante.
2. Montrer que $I_n \rightarrow +\infty$.

Exercice 16. Produits scalaires L^2 possibles sur la boule L^1 .

Mines

Déterminer

$$A = \left\{ \frac{\int_0^1 f(t) e^t dt}{\int_0^1 f(t) dt}, f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}^+) \setminus \{0\} \right\}.$$

Exercice 17. Fonction définie implicitement.

Centrale

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique réel $\xi \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_x^\xi e^{t^2} dt = 1.$$

2. On note $\varphi(x)$ cet unique réel.
Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Δ Exercice 18. La dérivée seconde était en fait un Dirac.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.

Pour $x \in [a, b]$ on pose

$$\varphi(x) = \int_a^b |x - t| f(t) dt.$$

Montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$ et déterminer sa dérivée.

Exercice 19. Domination de toutes les dérivées.

X (PC)

Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré impair tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|.$$

1. Montrer que f est la fonction nulle.
2. Le résultat reste-t-il vrai si $\deg P$ est pair?

♠ Exercice 20. Vers le lemme de Gronwall version intégrale.

Soit $y \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+)$ et $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

On suppose que pour tout $t \in [a, b],$

$$y(t) \leq y(a) + \int_a^t \lambda y(s) ds.$$

Montrer que pour tout $t \in [a, b]$,

$$y(t) \leq y(a) e^{\lambda(t-a)}.$$

Exercice 21. Erreur dans la méthode des trapèzes.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{C})$.

Montrer que

$$\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a) \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} \right) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty.$$

Exercice 22. Vitesse de convergence explicite de la méthode des rectangles.

Mines

Soit $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1. Montrer que $U_n = O_{n \rightarrow +\infty}\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Déterminer la limite de nU_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 23. Une application de Hermite-Hadamard.

Soit $f \in \mathcal{C}^2([a, b], \mathbb{R})$.

On pose $m = \min_{[a,b]} f''$ et $M = \max_{[a,b]} f''$.

1. Montrer que

$$\frac{m}{12} (b-a)^2 \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{M}{12} (b-a)^2.$$

2. Montrer que

$$\frac{m}{24} (b-a)^2 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{24} (b-a)^2.$$

Exercice 24. Somme presque de Riemann, version PCSI.

CCINP

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k+1}{n}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 25. Double limite avec sommes de Riemann.

Mines (PC)

Pour $n, p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_{n,p} = \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \left(1 + \frac{k}{p} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n$.

Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{p \rightarrow +\infty} u_{n,p}$ et $\lim_{p \rightarrow +\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p}$.

Exercice 26. Encore une somme qui se découple.

Soit $f, g \in C^0([0, 1])$. Déterminer la limite de $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n^2}\right) \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 27. En vrac : retour à la somme de Riemann.

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose $x_k = 0 + \frac{(1-0)k}{n}$.

Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 |f|.$$

Faire un schéma.

Exercice 28. *Un découpage itératif.*

Mines

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$.

1. Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- . Montrer qu'il existe une unique subdivision
- $(x_{0,n}, \dots, x_{n,n})$
- de
- $[a, b]$
- telle que

$$\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}} f = \frac{1}{n} \int_a^b f.$$

2. Déterminer, si elle existe,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k,n}).$$

Exercice 29. *Un point fixe de moyenne.*

Centrale

On définit l'endomorphisme

$$T : \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$$

$$f \mapsto \left(x \mapsto \frac{f\left(\frac{a+x}{2}\right) + f\left(\frac{x+b}{2}\right)}{2} \right).$$

Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ il existe $g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ telle que

$$\forall x \in [a, b], (T^n f)(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x).$$

Exercice 30. *Un cas classique de découpe.*Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

2. Montrer que

$$\int_0^1 t^n f(t) dt = 0 + \frac{f(1)}{n+1} + o_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} \right).$$

Exercice 31. *Approximation d'un Dirac bis.*Soit $\chi \in \mathcal{C}_{pm}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que $\forall t > 1, \chi(t) = 0$ et $\int_0^1 \chi = 1$.Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$,

$$\int_0^1 f(t) n \chi(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(0).$$

Exercice 32. *Lemme de Lebesgue bis.*Soit $T > 0$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction T -périodique.On note $\gamma = \frac{1}{T} \int_0^T g$ la valeur moyenne de g (cf. l'exercice « Moyenne d'une fonction périodique »).Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$,

$$\int_a^b f(t) g(nt) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \gamma dt.$$

Exercice 33. *Ceci n'est pas une phase stationnaire.*Soit $b \in \left] 0, \sqrt{\frac{\pi}{2}} \right[$ et

$$f : t \mapsto \int_0^b \sin(x) \exp(it \sin(x^2)) dx.$$

Trouver un équivalent de $f(t)$ quand $t \rightarrow +\infty$.

Δ **Exercice 34.** *Orthogonalité, polynômes et changements de signe.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \int_a^b f(t) P(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins $n + 1$ fois.

Exercice 35. *Orthogonal au sinus et au cosinus.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, \pi], \mathbb{R})$.

On suppose que

$$\int_0^\pi f(t) \cos(t) dt = 0 \text{ et } \int_0^\pi f(t) \sin(t) dt = 0.$$

Montrer que f s'annule au moins deux fois sur $[0, \pi]$.

Exercice 36. *Convexité et produit scalaire avec cos.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$ une fonction **convexe**.

On pose $I = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt$.

1. On suppose que $f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$.

Quel est le signe de $I = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt$? À quelle condition a-t-on $I = 0$?

2. On revient désormais au cas général.

Quel est le signe de $I = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt$? À quelle condition a-t-on $I = 0$?

Exercice 37. *Intégrales de Wallis par fonction beta.*

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $W_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^p(x) dx$.

1. Grâce à la formule d'Euler, calculer W_{2n} .

2. (a) Pour $k, \ell \in \mathbb{N}$, calculer $I_{k,\ell} = \int_{-1}^1 (1-u)^k (1+u)^\ell du$.

(b) En déduire W_{2n+1} .

Δ **Exercice 38.** *Irrationalité de π .*

On raisonne par l'absurde en supposant $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on pose

$$P_n = \frac{X^n (a - bX)^n}{n!} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin(x) dx.$$

1. Montrer que $I_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \in \mathbb{Z}$.

3. Conclure.

Exercice 39. *En vrac : un extrait d'oral X.*

X

1. Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan(x)) dx$.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t^2} dt$.

♣ **Exercice 40.** *Un peu de fonction beta.*

Pour $x, y \geq 1$ on note $B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt$.

1. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de symétrie $B(x, y) = B(y, x)$.
2. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Pascal $B(x, y) = B(x, y+1) + B(x+1, y)$.
3. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la formule de la capitaine $yB(x, y) = (x+y)B(x, y+1)$.
4. Montrer que si $x, y \geq 1$ sont entiers, $B(x, y) = \frac{(x-1)!(y-1)!}{(x+y-1)!}$.
5. Montrer que pour tous $x, y \geq 1$ on a la relation de Wallis généralisée $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(\theta))^{2x-1} (\sin(\theta))^{2y-1} d\theta = \frac{1}{2} B(x, y)$.

★ **Exercice 41.** *Application de degré 3.*

Mines

Soit $f \in C^0([0, 1])$. Montrer que $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} f(3x^2 - 2x^3) dx = 2 \int_0^1 f(3x^2 - 2x^3) dx$.

★ **Exercice 42.** *Polynômes préservant la mesure de Lebesgue.*

ÉNS

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ qui envoient $[0, 1]$ dans lui-même et tels que

$$\forall f \in C^0([0, 1], \mathbb{R}), \int_0^1 f(P(t)) dt = \int_0^1 f(t) dt.$$

△ **Exercice 43.** *Une astuce.*

Déterminer pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ une expression de

$$I(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(|x - e^{i\theta}|) d\theta.$$

Exercice 44. *Une inégalité à la Poincaré.*

X

Soit $f \in C^1([0, 1])$ telle que $f(1) = 0$. Montrer que $\int_0^1 f^2 \leq \frac{1}{2} \int_0^1 (f')^2$.

Exercice 45. *Une constante optimale : 120.*

Mines

1. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $120 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.
Peut-on trouver une meilleure constante que 120 ?
2. Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f\left(\frac{1}{2}\right) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Montrer que $320 \left(\int_0^1 f \right)^2 \leq \int_0^1 (f'')^2$.

Exercice 46. *Une inégalité qui n'a rien d'intégrale.*

X (PC)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}^+)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'' \geq 0$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)^2 dx \leq \int_0^1 x^2 f'(x)^2 dx.$$

△ **Exercice 47.** *Inégalité de Kantorovich.*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, et $f, g \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}^{+*})$.

On pose $m = \inf_{[a,b]} \frac{f}{g}$ et $M = \sup_{[a,b]} \frac{f}{g}$. Montrer que

$$\int_a^b f^2 \int_a^b g^2 \leq \frac{(M+m)^2}{4Mm} \left(\int_a^b fg \right)^2.$$

Exercice 48. *Inégalité de Steffensen.*

Mines

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ où g est à valeurs dans $[0, 1]$ et f décroissante. On pose $c = \int_a^b g$. Montrer que

$$\int_{b-c}^b f \leq \int_a^b fg \leq \int_a^{a+c} f.$$

Exercice 49. *Majoration L^∞ par $W^{1,1}$.*

Mines

1. Montrer qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 2π -périodique, on ait

$$\sup_{\mathbb{R}} |f| \leq A \int_0^{2\pi} |f| + B \int_0^{2\pi} |f'|.$$

2. L'inégalité subsiste-t-elle si on enlève une hypothèse ?

Exercice 50. *Inégalité de Tchebychev.*

X

Soient $f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}^0([a, b], \mathbb{R})$ toutes les deux croissantes.

Montrer que

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t) dt \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) g(t) dt.$$

Exercice 51. *Encore des moyennes prolongées en 0.*

Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on note

$$M(x) = \left(\frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)^x dt \right)^{\frac{1}{x}}.$$

Montrer que M admet un prolongement par continuité en 0.

Exercice 52. *Calcul des variations : cas L^1 .*

X

Déterminer $\inf_{\substack{f \in \mathcal{C}^1([0,1]) \\ f(0)=0, f(1)=1}} \int_0^1 |f' - f|.$

Exercice 53. *Des calculs de distributions un peu triviaux.*

Mines

On pose $F_1 = \{\varphi \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{C}) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0\}$ et $F_2 = \{\varphi \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{C}) \mid \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \text{ et } \varphi'(0) = \varphi'(1) = 0\}.$

1. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$. On suppose que, pour toute fonction $\varphi \in F_1$, on a $\int_0^1 f(t) \varphi(t) dt = 0$. Montrer que $f = 0$.
2. Soient maintenant $f, g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ telles que, pour tout $\varphi \in F_1$, on ait $\int_0^1 f(t) \varphi(t) dt = \int_0^1 g(t) \varphi'(t) dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer sa dérivée.
3. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $g \in F_2$ tel que $f = g''$ si et seulement si $\int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t f(t) dt = 0$.
4. Soit $h \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ tel que $\forall g \in F_2, \int_0^1 h g'' = 0$. Montrer que h est affine.

★ **Exercice 54.** *Un début d'exemple de principe variationnel.*

Soit $E = \{y \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid y(0) = y(1) = 0\}.$

Soit $g \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}).$

On définit

$$F : E \rightarrow \mathbb{R}$$

$$y \mapsto \frac{1}{2} \int_0^1 (y')^2 + \frac{1}{4} \int_0^1 y^4 - \int_0^1 y g.$$

Montrer que pour tout $y_0 \in E$ on a l'équivalence

$$\left(F(y_0) = \min_{y \in E} (F(y)) \right) \Leftrightarrow (-y_0'' + y_0^3 = g).$$

$\Delta\star$ **Exercice 55.** *Primitivation d'une réciproque, le cas général.*

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{C}^0(I, J)$ bijective.

On note F une primitive de f et $f^{-1} \in \mathcal{C}^0(J, I)$ la bijection réciproque de f .

Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in J$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f^{-1}(y) dy = [f^{-1}(y)y - F(f^{-1}(y))]_{\alpha}^{\beta}.$$

Exercice 56. *Théorème de Rouché pour les fractions rationnelles.*

Centrale

Pour toute fraction rationnelle $f \in \mathbb{C}(X)$ et tout réel $r > 0$ tel que f n'ait ni racine ni pôle de module r , on pose

$$N_r(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f'(re^{it})}{f(re^{it})} re^{it} dt.$$

1. Montrer que si $N_r(f)$ et $N_r(g)$ sont bien définis, il en va de même de $N_r(fg)$, et que l'on a alors $N_r(fg) = N_r(f) + N_r(g)$.
2. Calculer $F(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it}}{e^{it} - a} dt$ pour $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$.
3. Prouver que, lorsque $N_r(f)$ est bien défini, il est égal à $R - P$, où R (resp. P) est le nombre de racines (resp. de pôles) de f dans $D(0, r)$, compté(e)s avec multiplicité.

Indications

Exercice 1.

1. Dériver par rapport à a .
2. On rappelle que l'ensemble des périodes d'une fonction continue non constante est de la forme $\tau\mathbb{N}^*$.

Exercice 2.

1. Valeur moyenne nulle (pourquoi?)
2. Approcher $[0, x]$ par $[0, nT]$ pour un n bien choisi plus un petit bout.

Exercice 3. Utiliser Darboux ou le théorème de limite de la dérivée à gauche et à droite.

Exercice 4. Cela revient à calculer $\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{1 + \cos^2(u)} du$ ce qui peut se faire par un changement de variable $t = \tan(u)$ (après s'être ramené à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$).

La croissance est ici inutile mais permet de simplifier la preuve du lemme de Lebesgue.

Exercice 5. Déterminer une CL de X^2 , X^3 et X^4 de signe constant.

Par exemple remarquer que $(f^2(1-f)^2) \geq 0$ et $\int_0^1 (f^2(1-f)^2) = 0$.

Donc pour tout $t \in [0, 1]$, $f(t) = 0$ ou 1 .

Utiliser ensuite la continuité de f pour montrer que la valeur ne dépend en fait pas de t .

Exercice 6. Comme en physique remarquer que φ est, à un facteur près, la dérivée d'un carré, qui est donc décroissante. On obtient alors une concavité qui permet de conclure.

Exercice 7. Développer $(f - m)(M - f) \geq 0$.

Exercice 8. Poser $g(x) = \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$ et dériver. Factoriser par un terme de signe constant. Re-dériver.

Exercice 9. On pourra tracer le graphe de la fonction $t \mapsto \frac{1+t^2}{2}$ et chercher à l'encadrer entre deux fonctions affines judicieuses.

Exercice 10.

1. Dire $\frac{f(t)}{g(t)} \leq \frac{f(s)}{g(s)}$ signifie $f(t)g(s) \leq f(s)g(t)$ puis intégrer deux fois.
2. Posons $F(x) = \int_0^x f$ et $G(x) = \int_0^x g$. Chasles et la relation précédente donnent

$$F(x_1)G(x_2) - F(x_2)G(x_1) = F(x_1) \int_{x_1}^{x_2} g - G(x_1) \int_{x_1}^{x_2} f \leq 0.$$

Exercice 11. Montrer que

$$\min_{[a,b]}(f) \int_a^b \omega(t) dt \leq \int_a^b f(t) \omega(t) dt \leq \max_{[a,b]}(f) \int_a^b \omega(t) dt$$

et conclure par TVI.

Alternativement montrer par l'absurde qu'une fonction d'intégrale nulle s'annule.

Exercice 12. Si un tel point n'existe pas alors f est strictement monotone. On peut alors intégrer $f(t) < f(1)$ (ou $>$) pour obtenir une inégalité stricte.

Exercice 13.

1. Effectuer une IPP en dérivant f et primitivant g en G , et utiliser l'égalité de la moyenne sur $\int_a^b f'(t)G(t) dt$.

2. Traiter d'abord le cas $f(a) = 0$, où f est nulle. Sinon, remarquer que $t = \frac{f(b)}{f(a)} \in [0, 1]$ et repérer une combinaison convexe.

Exercice 14.

1. On rappelle que $[f^2]_a^b = 2 \int_a^b f f'$ et que $\alpha\beta \leq \eta\alpha^2 + \frac{1}{4\eta}\beta^2$.
2. Par exemple prendre y tel que $f(y)^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b f^2$.

Exercice 15.

1. Montrer que $I_{n+1} - I_n = \int_a^b \left(\left(\frac{f}{g} \right)^{n+1} - 1 \right) (f - g)$, l'intégrande étant positive non identiquement nulle.
2. Il existe un voisinage d'un point où $f > 0$ et $\left(\frac{f}{g} \right) \geq 1 + \varepsilon$, minorer ensuite $\int_a^b f \left(\frac{f}{g} \right)^n$.

Exercice 16. La réponse est $A =]1, e[$.

Montrer tout d'abord $A \subseteq [1, e]$ puis que le cas d'égalité impliquerait qu'on ait un Dirac.

Pour l'autre sens il y a plusieurs possibilités :

1. explicitement en prenant $f_\lambda(t) = e^{\lambda t}$ et en étudiant une fonction continue de λ ,
2. en montrant la convexité et en approchant δ_0 et δ_1 qui donnent les bornes de l'intervalle.

Exercice 17. Noter F une primitive de $t \mapsto e^{t^2}$.

Remarquer qu'il suffit de trouver φ tel que

$$F(\varphi(x)) = F(x) + 1.$$

Exercice 18. Commencer par constater que si $x \notin [a, b]$ alors φ est affine.

Ensuite couper par Chasles en remarquant que les termes problématiques pour une dérivée seconde se simplifient.

Exercice 19. Dans la première question, on pourra raisonner à partir d'un point où f s'annule, dont on montrera l'existence.**Exercice 20.** Poser $z : t \mapsto y(a) + \int_a^t \lambda y(s) ds$ et étudier la monotonie de $t \mapsto z(t) e^{-\lambda t}$.

Un résultat plus général mais de démonstration analogue fera partie du cours d'équations différentielles.

Exercice 21. Faire deux IPPs ou bien utiliser une IAF bien choisie.**Exercice 22.**

1. Question de cours.
2. L'idée est de déterminer le « terme d'après », c'est à dire de montrer que $U_n = \frac{f(1) - f(0)}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par exemple écrire $\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) dx = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left(\frac{k+1}{n} - x \right) f'(x) dx$ et utiliser un module d'uniforme continuité de f' .

Ou alors comparer la méthode des rectangles à la méthode des trapèzes.

Exercice 23. Remarquer que $x \mapsto f(x) - \frac{mx^2}{2}$ est convexe ainsi que $x \mapsto \frac{Mx^2}{2} - f(x)$.

Faire un schéma et utiliser une inégalité usuelle.

Exercice 24. Il suffit de majorer $\left| g\left(\frac{k+1}{n}\right) - g\left(\frac{k}{n}\right) \right|$ puis de sommer.**Exercice 25.**

1. À n fixé, c'est une somme de Riemann qui se calcule explicitement, puis une limite explicite.
2. À p fixé, c'est une somme finie, puis une limite explicite.

On obtient $\frac{4}{e}$ dans les deux cas.

Exercice 26. La limite est $g(0) \int_0^1 f$; écrire une majoration standard de l'écart en remarquant que l'argument de g vit toujours dans $\left[0, \frac{1}{n}\right]$.

Exercice 27. Par seconde inégalité triangulaire pour tout k ,

$$\left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) dt - \frac{f(x_k)}{n} \right| \leq \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(t) - f(x_k)| dt.$$

Exercice 28.

1. Par exemple procéder itérativement et étudier à x_k fixé la fonction $\xi \mapsto \int_{x_k}^{\xi} f$.
2. Reconnaître la somme de Riemann de $f \circ \text{compose}^{F^{-1}}$.

Exercice 29.

1. Commencer par se ramener, par un changement affine, à $[a, b] = [0, 1]$.
2. Dans ce cas, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in [0, 1]$,

$$(T^n f)(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\frac{x+k}{2^n}\right)$$

3. En déduire avec précaution que

$$g : x \mapsto \frac{1}{b-a} \int_a^b f$$

convient.

Exercice 30.

1. Majorer.
2. Cela revient à montrer que

$$\int_0^1 (n+1)t^n (f(t) - f(1)) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Pour cela fixer un $\varepsilon > 0$, considérer un $\delta > 0$ correspondant dans la définition de la continuité de f en 1 et découper l'intégrale entre $[0, 1-\delta]$ et $[1-\delta, 1]$.

Exercice 31. Découper sans scrupule.

Exercice 32. Regarder d'abord les exercices classiques des lemmes de Lebesgue et de valeur moyenne.

Traiter d'abord le cas $\gamma = 0$: une primitive de g est alors bornée (pourquoi ?), et une intégration par parties conclut.

Ensuite, constater que, quitte à retrancher à g sa valeur moyenne, on peut supposer que $\gamma = 0$ et utiliser la même méthode que pour le lemme de Lebesgue.

Exercice 33. Faire intervenir $\frac{2x \cos(x^2)}{2x \cos(x^2)}$, puis IPP, changement de variable et Lebesgue.

On obtient $f(t) = \frac{h(b) e^{it \sin(b^2)} - \frac{1}{2}}{it} + o\left(\frac{1}{t}\right)$ avec $h(b) = \frac{\sin(b)}{2b \cos(b^2)}$: il faut de plus supposer que ce terme ne s'annule pas, c'est à dire $h(b) \neq \frac{1}{2}$.

Exercice 34. Si ce n'était pas le cas, construire un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ de même signe que f et donc tel que fP soit positive non nulle.

Exercice 35. Si f ne s'annule qu'une fois, construire un élément de $\text{Vect}(\cos, \sin) = \{A \cos(\cdot + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$ bien choisi.

Exercice 36.

1. Faire deux IPP pour obtenir $I = \int_0^{2\pi} f''(t)(1 - \cos(t)) dt \geq 0$. Montrer que le cas d'égalité correspond à f affine.
2. Avec un peu de topologie il suffit de montrer que l'on peut approcher (par exemple en norme L^2) une fonction convexe continue par des fonctions convexes de classe $\mathcal{C}^2$ pour obtenir le signe. Ou alors astucieusement montrer que $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) [f(t) + f(2\pi - t) - f(\pi - t) - f(\pi + t)] dt$ et que pour f convexe $s \mapsto f(a - s) + f(a + s)$ est croissante.

Exercice 37.

1. Développer par le binôme.
2. Cf. exos classiques de fonction beta.

Exercice 38.

1. Encadrer P_n naïvement.
2. Montrer que les dérivées de P_n en 0 (et en π) sont entières puis IPPs.
3. Suite d'entiers non nuls tendant vers 0. Pourquoi est-ce non nul ?

Exercice 39.

1. Écrire $\ln(1 + \tan(x)) = \ln(\cos(x) + \sin(x)) - \ln(\cos(x))$ et repérer une symétrie. Alternativement repérer la symétrie dès le début en posant $u = \frac{\pi}{4} - x$.
2. Poser $t = \tan(x)$.

Exercice 40.

1. Changement de variable $s = 1 - t$.
2. Remarquer que $t + (1 - t) = 1$.
3. Commencer par une IPP et faire un schéma pascalien.
4. Fixer x et faire une récurrence sur y .
5. Par exemple constater que $t = \sin(\theta)^2$ est une bonne idée.

Exercice 41. Faire le tableau de variation de $P : x \mapsto 3x^2 - 2x^3$ et découper l'intégrale en trois morceaux. Poser $y = P(x)$ sur chacun des trois morceaux, on obtient $\int_0^1 f(y) \left(-\frac{1}{P'(x_1(y))} + \frac{1}{P'(x_2(y))} - \frac{1}{P'(x_3(y))} \right) dy$ où on note $x_{k(y)}$ les racines de $P - y$ sur chaque morceau.

Or par relations coefficients-racines, montrer que $-\frac{1}{P'(x_1(y))} + \frac{1}{P'(x_2(y))} - \frac{1}{P'(x_3(y))} = \frac{2}{P'(x_2(y))}$ et re-changement de variable.

Plus astucieux, $P\left(\frac{1}{2} + \sin(\theta)\right) = \frac{1 + \sin(3\theta)}{2}$; le changement de variable $x = \frac{1}{2} + \sin(\theta)$ puis le découpage de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ en trois, avec $\cos\left(\frac{\pi - v}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi + v}{3}\right) = \cos\left(\frac{v}{3}\right)$.

Exercice 42. Constater que X et $1 - X$ conviennent.

Remarquer :

1. en approchant des indicatrices par des fonctions continues, on doit avoir, pour tout intervalle $J \subseteq [0, 1]$, $P^{-1}(J) \cap [0, 1]$ de même longueur que J ,
2. si P' s'annule en un point de $[0, 1]$ alors un DL au voisinage montre que la longueur n'est pas conservée,
3. dans le cas croissant, montrer que P coïncide avec l'identité sur un petit intervalle
4. si P est décroissant, se ramener au cas précédent.

Exercice 43. Que dire de $I(x^2)$ et de $I\left(\frac{1}{x}\right)$?

Alternativement utiliser des sommes de Riemann, en effet cela ramène à un produit de type $\prod_{k=0}^{n-1} (x - e^{2ik\frac{\pi}{n}})$ qui se calcule très bien.

Faire un schéma.

Exercice 44. Écrire $f(x) = - \int_x^1 f'(t) dt$, puis C-S, puis intégrer selon x .

Exercice 45.

- Deux intégrations par parties contre le polynôme $P(t) = \frac{t(t-1)}{2}$, qui vérifie $P'' = 1$ et $P(0) = P(1) = 0$.
Il y a égalité si et seulement si f'' est proportionnelle à $t \mapsto t(1-t)$, c'est à dire si f est multiple de $t \mapsto t(1-t)(t^2-t-1)$.
- Poser $K(t) = \frac{t^2}{2}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $K(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$ sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et faire de même.

Exercice 46. Il suffit en fait de montrer que $f(x)^2 \leq x^2 f'(x)^2$ ponctuellement. Et c'est juste une inégalité de convexité avant de passer au carré.

Exercice 47. Par exemple partir de $(Mg - f)(f - mg) \geq 0$, c'est à dire $f^2 + Mmg^2 \leq (M + m)fg$ puis intégrer et IAG.

Exercice 48. Poser $G(x) = \int_a^x g$ et étudier $\varphi(x) = \int_a^{a+G(x)} f - \int_a^x fg$ pour la majoration.

De même pour l'autre sens.

Exercice 49.

- Par exemple écrire $|f(x)| \leq |f(y)| + \int_0^{2\pi} |f'(t)| dt$ puis intégrer.
- La question est floue : cela reste vrai sur un segment mais pas sur $\mathbb{R}$ (construire un contre-exemple), et de même $A = 0$ et $B = 0$ ne conviennent pas.

Exercice 50. Utiliser la version somme finie et passer à la limite.

Ou plus simplement adapter la preuve :

- constater que pour tous $(t, s) \in [a, b]^2$,

$$(f(t) - f(s))(g(t) - g(s)) \geq 0$$

- Intégrer par rapport à une variable puis par rapport à une autre
- Simplifier.

Exercice 51. On obtient sans surprise $\exp\left(\frac{1}{b-a} \int_a^b \ln(f(t)) dt\right)$.

Exercice 52. Réponse : la borne inférieure vaut $\frac{1}{e}$ et n'est pas atteinte.

Remarquer que $f' - f$ n'est rien d'autre que $e^x \frac{df(x)}{dx} e^{-x}$.

De $e^x \geq 1$ on obtient la minoration.

On remarque que pour avoir l'égalité il faudrait que $e^x \frac{df(x)}{dx} e^{-x} = \frac{1}{e} \delta_0(x)$ (masse totale $\frac{1}{e}$ par conditions aux bords) ce qui n'est pas possible.

Mais on peut approcher δ_0 par une suite $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 53.

- Deux options au moins :
 - Si ce n'est pas le cas prendre une "bosse" de phase bien choisie autour d'un maximum du module.
 - Approcher $\bar{f}$ par une fonction valant 0 sur les bords et régulière.

2. En posant F une primitive bien choisie de f montrer que $(F + g)$ est orthogonal à toutes les fonctions tests de moyenne nulle, c'est à dire constante.
3. Dans un sens IPP. Dans l'autre, que dire de $g(x) = \int_0^x (x-t)f(t) dt$.
4. On est donc dans l'orthogonal d'un orthogonal...

Exercice 54. Commencer par montrer que $(F(y_0) = \min_{y \in E} (F(y)))$ équivaut à ce que pour tout $z \in E$, la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $t \mapsto F(y_0 + tz)$ admette un minimum en 0.

Faire ensuite une étude de fonction, avec une IPP.

Conclure par "orthogonalité".

Exercice 55. Plusieurs options, dans tous les cas commencer par faire un schéma, et faire le cas C^1 (deux méthodes). Constaté ensuite qu'ici on a seulement C^0 et pas C^1 .

On peut ensuite par exemple remplacer les intégrales par des sommes et les IPP par des transformées d'Abel.

Exercice 56.

1. On a (propriété de la dérivée logarithmique) dans $\mathbb{C}(X)$, $\frac{(fg)'}{fg} = \frac{f'}{f} + \frac{g'}{g}$.
2. Réponse : $F(a) = 1$ si $|a| < 1$, et $F(a) = 0$ si $|a| > 1$. Pour cela faire un développement de séries géométriques de raison de module strictement inférieur à 1. Plus précisément
 - (a) Si $|a| < 1$: $\frac{e^{it}}{e^{it} - a} = \frac{1}{1 - ae^{-it}} = \sum_{n=0}^N a^n e^{-int} + \frac{a^{N+1} e^{-i(N+1)t}}{1 - ae^{-it}}$. Puis intégrer.
 - (b) Si $|a| > 1$: $\frac{e^{it}}{e^{it} - a} = -\frac{e^{it}}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e^{it}}{a}} = -\sum_{n=1}^N \frac{e^{int}}{a^n} - \frac{e^{i(N+1)t}}{a^N (a - e^{it})}$. Puis intégrer.
3. La question précédente donne après un changement d'échelle $N_{r(X-a)}$. En déduire par propriété logarithmique $N_{r((X-a)^{-1})}$ puis $N_{r(f)}$.