

Dénombrabilité

Exemples

Exercice 1. *La sphère unité n'est pas dénombrable.*

Soit $d \geq 2$. Montrer que la *sphère unité* $S = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x\| = 1\}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 2. *(Non-)dénombrabilité.*

Les ensembles suivants sont-ils dénombrables ?

1. (a) L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites entières.
(b) L'ensemble des suites entières ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.
(c) L'ensemble des suites entières stationnaires.
(d) L'ensemble des suites entières croissantes.
2. (a) L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des bijections de $\mathbb{N}$.
(b) L'ensemble des bijections de $\mathbb{N}$ coïncidant avec l'identité en dehors d'un ensemble fini.

Exercice 3. *Un critère parfaitement inutilisable.*

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble

$$\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ constante}\}$$

soit dénombrable.

Exercice 4. *Parties discrètes de $\mathbb{R}$.*

1. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ une partie *discrète*, c'est-à-dire telle que pour tout $x \in D$, il existe $\eta > 0$ tel que l'on ait $D \cap]x - \delta, x + \delta[= \{x\}$. (On dit aussi que tous les points de D sont *isolés*.)
Montrer que D est au plus dénombrable.
2. Donner un exemple de partie dénombrable de $\mathbb{R}$ qui ne soit pas discrète.

Exercice 5. *Parties bien ordonnées de $\mathbb{R}$.*

Une partie $W \subseteq \mathbb{R}$ est dite *bien ordonnée* si toute suite décroissante à valeurs dans W est stationnaire.

1. Soit $W \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que W est bien ordonnée si et seulement si toute partie non vide S de W possède un plus petit élément.
2. Montrer que toute partie bien ordonnée de $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Exercice 6. *Projections génériques.*

Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble dénombrable.

Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{U}$ tel que la restriction à D de l'application $z \mapsto \operatorname{Ré}(uz)$ soit injective.

★ **Exercice 7.** *Autour du problème de Pisot-Vijayaraghavan.*

Étant donné un nombre réel t , on note $\|t\| = \min\{|t - m| \mid m \in \mathbb{Z}\}$ sa distance à $\mathbb{Z}$.

Notons $\mathcal{P} = \{x \in]1, +\infty[\mid \exists \lambda \in \mathbb{R}_+^* : \|\lambda x^n\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{P}$ est infini et que $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \in \mathcal{P}$.
2. Montrer que $\mathcal{P}$ est dénombrable.

Remarque. Les nombres algébriques appartenant à $\mathcal{P}$ sont connus sous le nom de *nombres de Pisot-Vijayaraghavan* et relativement bien compris. Un problème ouvert important est de savoir si $\mathcal{P}$ contient des nombres transcendants.

Dénombrabilité et analyse

Exercice 8. *Fonction continue échangeant rationnels et irrationnels.*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que $f[\mathbb{Q}] \subseteq \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f[\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}] \subseteq \mathbb{Q}$.

Exercice 9. *Contrôle de la non-régularité.*

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe. Montrer que l'ensemble des points de non-dérivabilité de f est au plus dénombrable.

★ **Exercice 10.** *Théorème des époux Young.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on note

$$A_{s,\delta} = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall a \in [x - \delta, x[, f(a) < s \text{ et } \forall b \in]x, x + \delta], f(b) > s\}.$$

Montrer que, pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, l'ensemble $A_{s,\delta}$ est dénombrable.

2. Un point x est une *discontinuité de première espèce* (pour f) si la fonction f admet des limites à gauche et à droite différentes en x .

Montrer que f admet un nombre au plus dénombrable de discontinuité de première espèce.

Exercice 11. *Fonction dont tout point est un minimum local.*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admettant en tout point un minimum local. Montrer que $f[\mathbb{R}]$ est au plus dénombrable.

Donner un exemple non trivial d'une telle fonction.

★ **Exercice 12.** *Ensemble des suites extraites d'une suite.*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles.

Montrer que l'ensemble des sous-suites de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas en bijection avec $\mathbb{N}$.

★★ **Exercice 13.** *Théorème d'isomorphisme de Cantor (1895).*

Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ dénombrable et dense.

1. Construire une fonction $f : \mathbb{Q} \rightarrow D$ bijective et strictement croissante.
2. Montrer que f se prolonge en une unique application continue $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, et que g est automatiquement bijective.

Dénombrabilité et algèbre

Exercice 14. Complémentaire d'un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Lyon

Soit G un sous-groupe strict de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ n'est pas dénombrable.

Exercice 15. Classes d'isomorphisme des groupes finis.

Montrer qu'il y a, à isomorphisme près, un nombre dénombrable de groupes finis.

Plus formellement : montrer qu'il existe une suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de groupes finis telle que tout groupe fini soit isomorphe à exactement l'un des G_n , $n \in \mathbb{N}$.

Δ **Exercice 16.** Groupes de type fini.

Un groupe est dit *de type fini* s'il possède une partie génératrice finie.

Montrer que tout groupe de type fini est au plus dénombrable, mais que la réciproque est fausse.

★ **Exercice 17.** Un cas très particulier du théorème de Löwenheim-Skolem.

1. Montrer qu'il existe un sous-groupe dénombrable G de $\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in G, e^x \in G$.
2. Un tel groupe peut-il être de type fini ?

Exercice 18. Espaces vectoriels rationnels.

1. Soit E un $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie. Montrer que E est dénombrable.
2. *Quid* d'un espace vectoriel de dimension dénombrable (c'est-à-dire possédant une base dénombrable) ?
3. Donner un exemple de $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel infini non dénombrable.

★ **Exercice 19.** Extensions dénombrables de $\mathbb{C}$.

1. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel possédant une famille génératrice au plus dénombrable. Montrer que toute famille libre de E est au plus dénombrable.
2. Soit L un sur-corps de $\mathbb{C}$ (c'est-à-dire que $\mathbb{C} \subseteq L$ et que $\mathbb{C}$ est un sous-corps de L). Rappeler comment L est naturellement muni d'une structure de $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.
3. On suppose dans la suite que le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel L admet une famille génératrice au plus dénombrable.
 - (a) Montrer qu'il n'existe pas d'application linéaire injective $\mathbb{C}(X) \rightarrow L$.
 - (b) Soit $x \in L$. Montrer que la famille $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est liée.
 - (c) En déduire $L = \mathbb{C}$.

Puissance du continu

Exercice 20. Équipotence des intervalles.

Montrer que tous les intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ sont équipotents.

Exercice 21. Ensembles ayant la puissance du continu.

1. Exhiber une bijection $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
2. Exhiber une bijection $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$.

Exercice 22. Deux espaces vectoriels de dimension infinie possédant la puissance du continu.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles est équipotent à $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble $C^0(\mathbb{R})$ des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues est équipotent à $\mathbb{R}$.
3. En déduire une démonstration extrêmement chic de l'existence de fonctions discontinues.

Exercice 23. Chaînes indénombrables dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Trouver une famille $(A_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de parties de $\mathbb{N}$ telle que, pour tous $x < y \in \mathbb{R}$, l'ensemble A_x soit strictement inclus dans A_y .

★ **Exercice 24.** Lemme de Sierpiński.

1. Soit Λ un ensemble et $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de parties disjointes et non vides de $\mathbb{N}$. Montrer que Λ est au plus dénombrable.
2. Construire une famille $(A_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ **presque disjointes**, au sens où, pour tous $x \neq y \in \mathbb{R}$, l'intersection $A_x \cap A_y$ est finie.

Équipotence en général

Exercice 25. Encore une application de l'hôtel de Hilbert.

Soit E un ensemble infini non dénombrable, et $D \subseteq E$ une partie au plus dénombrable.

Montrer que E et $E \setminus D$ sont équipotents.

Exercice 26. Une caractérisation des ensembles infinis.

X

Soit X un ensemble. Montrer que X est infini si et seulement si, pour toute application $f : X \rightarrow X$, il existe un ensemble $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset, X\}$ tel que $f[A] \subseteq A$.

★ **Exercice 27.** $\aleph_0 \cdot \kappa = \max(\aleph_0, \kappa)$.

Soit X un ensemble infini.

1. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des triplets (Y_0, Y, φ) constitués de deux parties $Y_0 \subseteq Y$ de X et d'une bijection $\varphi : Y_0 \times \mathbb{N} \rightarrow Y$ telle que $\forall y_0 \in Y_0, \varphi(y_0, 0) = y_0$.
 - (a) Faire un dessin.
 - (b) Étant donné (Y_0, Y, φ) et $(Z_0, Z, \psi) \in \mathcal{P}$, on note $(Y_0, Y, \varphi) \preceq (Z_0, Z, \psi)$ si $Y_0 \subseteq Z_0$, $Y \subseteq Z$ et que φ et ψ coïncident sur $Y_0 \times \mathbb{N}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ est non vide et que $\preceq$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}$.
 - (c) Montrer que $\preceq$ est *inductif*, c'est-à-dire que pour toute chaîne $Q \subseteq \mathcal{P}$ (c'est-à-dire toute partie telle que $\forall q_1, q_2 \in Q, q_1 \preceq q_2$ ou $q_2 \preceq q_1$), il existe $m \in \mathcal{P}$ tel que $\forall q \in Q, q \preceq m$.
D'après le *lemme de Zorn* (une conséquence de l'axiome du choix), on peut alors trouver un élément *maximal* de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire $(Y_0, Y, \varphi) \in \mathcal{P}$ tel que $\forall p \in \mathcal{P}, (Y_0, Y, \varphi) \preceq p \Rightarrow (Y_0, Y, \varphi) = p$. On fixe un tel élément maximal pour la question suivante.
 - (d) Montrer que le complémentaire $X \setminus Y$ est fini.
2. Déduire de ce qui précède l'existence d'un ensemble Y_0 et d'une bijection $Y_0 \times \mathbb{N} \rightarrow X$.
3. Montrer que les ensembles X et $X \times \mathbb{N}$ sont en bijection.

Exercice 28. *Théorème de König et cofinalité de $\mathfrak{c}$.*

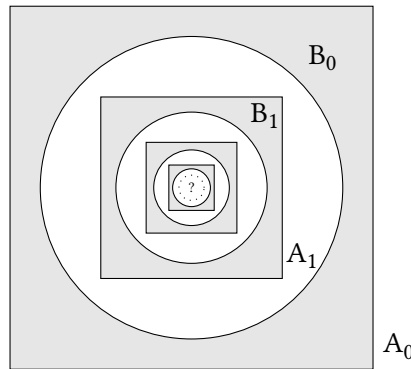
1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'ensembles. On suppose que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il n'existe pas de surjection $A_n \rightarrow B_n$.

Montrer qu'il n'existe pas de surjection $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$.

2. **Application.** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$ telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = \mathbb{R}$.
Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et une surjection $X_n \rightarrow \mathbb{R}$.

Démonstrations du théorème de Cantor-Bernstein**Exercice 29.** *Démonstration de Bernstein (1897).*

1. Soit A_0 un ensemble, $\varphi : A_0 \rightarrow A_0$ une fonction injective, dont on note l'image $A_1 = \varphi[A_0]$.
Soit B_0 un ensemble tel que $A_1 \subseteq B_0 \subseteq A_0$. Le but est de montrer que A_0 et B_0 sont équipotents.



- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $A_n = (\varphi \circ \dots \circ \varphi)[A_0]$ et $B_n = (\varphi \circ \dots \circ \varphi)[B_0]$, avec à chaque fois n occurrences de la lettre φ .

Montrer que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$. On notera cet ensemble C .

- (b) Montrer les décompositions

$$A_0 = C \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \setminus B_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus A_{n+1}) \quad \text{et} \quad B_0 = C \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} (A_n \setminus B_n) \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (B_n \setminus A_{n+1}),$$

et que tous les ensembles apparaissant dans ces décompositions sont disjoints.

- (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \setminus B_n$ est équipotent à $A_{n+1} \setminus B_{n+1}$, et conclure.

2. En déduire une démonstration du théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice 30. *Démonstration par existence d'un point fixe.*

1. **Théorème de Knaster-Tarski (1928).** Soit Ω un ensemble et $\varphi : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathcal{P}(\Omega)$ une application croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire telle que $\forall A, B \in \mathcal{P}(\Omega), A \subseteq B \Rightarrow \varphi(A) \subseteq \varphi(B)$.

Montrer qu'alors φ possède un point fixe, c'est-à-dire $\exists X \in \mathcal{P}(\Omega) : \varphi(X) = X$.

2. Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ deux injections.

En considérant $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E) \\ A \mapsto E \setminus g[F \setminus f[A]] \end{cases}$, montrer que X et Y sont équipotents.

Indications

Exercice 1. On pourra commencer par le cas $d = 2$ et construire une injection $\mathbb{R} \rightarrow S$.

Exercice 2. Dans tous les exemples E pour lesquels la réponse est non, on est capable de construire une injection $\{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow E$.

Exercice 3. Même s'il ne s'agit pas d'une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, on pourra remarquer que si f est l'unique application $\{0, 1\} \rightarrow \{0\}$, l'ensemble de l'énoncé est $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et qu'il n'est donc pas dénombrable.

Exercice 4. Pour la première question, on pourra construire une injection $D \rightarrow \mathbb{Q}$.

Exercice 5.

1. L'aspect « bien ordonné » de W garantit qu'un algorithme naïf de recherche de minimum termine toujours.
2. On pourra montrer que tout point $x \in W$, à part le maximum de W (s'il existe), possède un *successeur* $x^+ \in W$ vérifiant $x < x^+$ et $W \cap]x, x^+ [= \emptyset$.

Exercice 6. On vérifiera que pour tous $z_1, z_2 \in D$, il existe un unique $u \in \mathbb{U}$ tel que $f_u : z \mapsto \text{Ré}(uz)$ vérifie $f_u(z_1) = f_u(z_2)$. Un dessin aide !

Exercice 7. Si $x \in \mathcal{P}$, on peut trouver $\lambda > 0$ et une suite u à valeurs entières telle que $\lambda x^n = u_n + o(1)$. On pourra alors montrer $u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2}{u_n} + o(1)$.

Exercice 8. On montrera qu'une telle fonction possède nécessairement une image dénombrable, avant de comprendre que cela est **très** contraignant pour une fonction continue.

Exercice 9.

1. On construira une injection $\text{Disc}(f) \rightarrow \mathbb{Q}$.
2. On pourra montrer qu'une fonction convexe $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est partout dérivable à gauche et à droite.

Exercice 10.

1. On pourra montrer que deux éléments de $A_{s,\delta}$ sont toujours distants d'au moins 2δ .
2. On montrera que l'ensemble des discontinuités de première espèce de f est inclus dans $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{s \in \mathbb{Q}} A_{s,n^{-1}}$.

Exercice 11.

- On pourra montrer que l'ensemble $\{]r, s[\mid r < s \in \mathbb{Q}\}$ des intervalles ouverts rationnels est dénombrable.
- On pourra chercher des exemples parmi les fonctions « en escalier », ou d'ailleurs dans des généralisations de ces fonctions.

Exercice 12. L'ensemble des extractrices $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ n'est lui-même pas dénombrable, mais il peut arriver, si la suite u n'est pas injective, que deux extractrices différentes définissent la même sous-suite. On arrive cependant à trouver beaucoup de sous-suites dans deux cas extrêmes :

- la suite u est injective (ce qui permet, en extrayant, de traiter le cas des suites u qui prennent une infinité de valeurs);
- il existe deux valeurs que la suite u prend chacune une infinité de fois.

Il existe des suites qui ne tombent dans aucune des deux catégories (c'est un ensemble connu de suites!), et elles ont en fait un nombre fini de sous-suites.

Exercice 13. Pour la première question, on peut par exemple écrire $\mathbb{Q}$ comme une union croissante de sous-ensembles simples : $\mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} S_n$ et construire par récurrence des injections strictement croissantes $\varphi_n : S_n \rightarrow D$. Il faut cependant faire un peu attention à obtenir à la fin de cette construction une application **surjective** $\mathbb{Q} \rightarrow D$. Une idée technique commode consiste à fixer dès le départ une énumération $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de D et de garantir au cours de la construction que l'image de φ_n contienne toujours l'élément d_n .

Exercice 14. La considération des classes à gauche montre que si H est un sous-groupe strict d'un groupe G , alors H s'injecte dans $G \setminus H$.

Exercice 15. On pourra montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de groupes fini de cardinal fixé, à isomorphisme près.

Exercice 16. On se souviendra que, si $G = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$, les éléments de G peuvent s'écrire comme des *mots* sur l'*alphabet* $\{x_1^{\pm 1}, \dots, x_s^{\pm 1}\}$.

Exercice 17.

1. Aller lire l'excellente page web <https://www.dpmms.cam.ac.uk/~wtg10/justdoit.html> sur le concept de *just do it! proofs*.
2. On pourra utiliser la transcendance de e .

Exercice 18.

1. Une base de E donne une description explicite des éléments de E qui montre directement que E est dénombrable.
2. On peut par exemple écrire E comme une union dénombrable de $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels de dimension finie (ou adapter la démonstration de la question précédente).

Exercice 19.

1. On pourra montrer que si $f : X \rightarrow D$ est une application *finite-to-one* (en bon français : « à fibres finies », c'est-à-dire que pour tout $d \in D$, l'image réciproque $f^{-1}[\{d\}]$ est finie) et que D est au plus dénombrable, alors X est aussi au plus dénombrable.
Or, si $(y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ est une famille libre, et $(x_\delta)_{\delta \in \Delta}$ une famille génératrice de E , on peut en considérant en décomposant les premiers en fonction des derniers et en considérant le « support » d'une telle décomposition construire une application $\Lambda \rightarrow \mathcal{P}_f(\Delta)$, où $\mathcal{P}_f(\Delta)$ est l'ensemble des parties finies de Δ . Il reste à montrer que cette application est *finite-to-one*.
3. La décomposition en éléments simples fournit une famille libre non dénombrable dans $\mathbb{C}(X)$.

Exercice 20. C'est très facile pour des intervalles du même type (segments, demi-droites ouvertes, etc.) et des fonctions usuelles permettent de passer par exemple de $\mathbb{R}$ à $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Le premier cas vraiment non trivial est donc celui de $[0, 1]$ et $]0, 1]$, qui ne pourra pas être obtenu avec une fonction continue (pourquoi?). On pourra construire une suite injective $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0, 1]$ telle que $x_0 = 0$ et « pousser d'un cran » chaque élément de la suite.

Exercice 21. On pourra vérifier

- que si D est un ensemble constitué de « deux copies de $\mathbb{N}$ » (plus formellement, si D est en bijection avec $\{0, 1\} \times \mathbb{N}$), alors $\mathcal{P}(D)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$;
- que si D est en bijection avec $\mathbb{N}^2$, alors $\mathcal{P}(D)$ est en bijection avec $\mathcal{P}(\mathbb{N})^{\mathbb{N}}$.

Exercice 22. Pour la première question, on pourra utiliser l'équipotence entre $\mathbb{R}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Pour la deuxième, on montrera qu'il existe une injection $C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$ et on utilisera le théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice 23. On pourra plutôt chercher des parties de $\mathbb{Q}$!

Exercice 24. Pour la deuxième question, on pourra plutôt chercher des parties de n'importe quel ensemble dénombrable. Voilà deux idées, à vous de rédiger les détails :

Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut construire une suite **strictement croissante** $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de rationnels telle que $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et considérer l'image $A_x = \{r_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Q}$ d'une telle suite.

Droite pixélisée, aussi connue sous le nom de « réel d'Eudoxe ». Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut considérer la « droite pixélisée » $\Delta_x = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid |b - xa| \leq 1\}$.

Exercice 25. Le cas où D est un singleton est déjà intéressant : si on veut « faire disparaître » d_0 , c'est-à-dire trouver une bijection $E \rightarrow E \setminus \{d_0\}$, on pourra s'aider d'une suite injective $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ issue de d_0 .

Exercice 26. Étant donné $p \in X$, on pourra considérer la suite récurrente d'itératrice f , c'est-à-dire la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = p$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = f(x_n)$. Une telle suite n'a que deux destins possibles : elle peut être injective ou « pré-périodique ».

Dans le cas où X est infini, cette remarque est, dans les deux cas, une source d'ensembles stables sous f non triviaux.

Exercice 27. Une fois que le complémentaire $X \setminus Y$ est fini, on peut réintégrer « à la main » les quelques éléments manquants à l'une des « suites » $\varphi[\{y_0\} \times \mathbb{N}]$ en modifiant φ .

La dernière question est une conséquence presque immédiate de l'avant-dernière.

Exercice 28. C'est une variante de l'argument diagonal. Une application $\Phi : \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \rightarrow \prod_{n \in \mathbb{N}} B_n$ définit pour tout $m \in \mathbb{N}$ (avec des notations non définies mais suggestives) une application $\varphi_m = \pi_m \circ \Phi \circ i_m : A_m \rightarrow B_m$ qui ne peut pas être surjective. On peut donc trouver $y_m \in B_m$ qui n'est pas dans l'image de φ_m ...

Pour la deuxième question, on pourra commencer par montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont en bijection.

Exercice 29. La première question est de la pure rédaction automatique.

Pour la deuxième, étant donné deux injections $i : X \rightarrow Y$ et $j : Y \rightarrow X$, on pourra remarquer que $(j \circ i)[X] \subseteq j[Y] \subseteq X$ et tenter d'appliquer la première question.

Exercice 30. Pour la première question, on pourra montrer que toute fonction croissante $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ possède un point fixe (en introduisant la bonne borne supérieure), puis trouver un point fixe pour φ par analogie.