Théorème de Thurston

Dans tout le devoir, d désigne un entier naturel non nul, et $\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

Étant donné $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on notera $\mathrm{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, \|x-a\| < r\}$ la boule ouverte pour cette norme et $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ et $\mathrm{S}(a,r)$ la boule fermée et la sphère correspondantes.

Il est recommandé d'illustrer abondamment vos raisonnements avec des dessins.

Partie I. Projection sur un convexe fermé

1. **Triangles isocèles.** Soit $a,b,c \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|b-a\| = \|c-a\|$. On note δ cette norme commune. Montrer que $\left\|\dfrac{b+c}{2} - a\right\| \leq \delta$, avec égalité si et seulement si $b = c$.
2. **Triangles obtus.** Soit $a,b,c \in \mathbb{R}^d$ tels que $\langle b-a|c-a\rangle \leq 0$. Montrer que $\max\big(\|b-a\|, \|c-a\|\big) \leq \|b-c\|$.

Dans la suite de cette partie, on fixe une partie convexe, fermée, non vide C de $\mathbb{R}^d$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un unique élément $y \in \mathrm{C}$ tel que
$$\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \,|\, z \in \mathrm{C}\}.$$

Dans la suite de cette partie, cet unique élément du convexe C sera noté $p(x)$: on obtient ainsi une application de « projection » $p : \mathbb{R}^d \to \mathrm{C}$ telle que $\forall z \in \mathrm{C}, \|x-p(x)\| \leq \|x-z\|$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \mathrm{C}$.
En remarquant que, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)p(x) + tz \in \mathrm{C}$, montrer que $\langle x-p(x)|z-p(x)\rangle \leq 0$.
5. Montrer que l'application $p : \mathbb{R}^d \to \mathrm{C}$ est 1-lipschitzienne.
6. **Lemme des rayons.** Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$. On note $\mathrm{R}(x) = \{p(x) + t\big(x-p(x)\big) \,|\, t \in \mathbb{R}_+\}$ la demi-droite issue de $p(x)$ et passant par x. Montrer que $\forall z \in \mathrm{R}(x), p(z) = p(x)$.

On rappelle que la *frontière de* C, notée ici $\partial\mathrm{C}$, est l'ensemble $\overline{\mathrm{C}} \setminus \mathring{\mathrm{C}} = \mathrm{C} \setminus \mathring{\mathrm{C}}$ des points non intérieurs de C.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$, on a $p(x) \in \partial\mathrm{C}$.

On suppose dans la suite C borné et l'on fixe $r > 0$ tel que C soit inclus dans la boule ouverte $\mathrm{B}(0,r)$.

8. Soit $y \in \partial\mathrm{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$ telle que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|p(x_n) - y\| \leq \|x_n - y\| \leq \frac{1}{n}.$$
   (b) En déduire qu'il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans la sphère $\mathrm{S}(0,r+1)$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|p(z_n) - y\| \leq \dfrac{1}{n}$.
   (c) Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{S}(0,r+1)$ tel que $p(z) = y$.
9. Soit $y \in \partial\mathrm{C}$. Montrer qu'il existe $v \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $\forall z \in \mathrm{C}, \langle z|v\rangle \leq \langle y|v\rangle$.
10. Déduire des questions précédentes que si $d \geq 2$, alors $\partial\mathrm{C}$ est connexe par arcs.

Partie II. Intermède linéaire

Cette partie est indépendante de la suite du problème, et n'utilise que la question 1. de la partie précédente.
On considère d'abord un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^N$ de dimension m (muni de la norme euclidienne).
Commençons par montrer que $V \cap [-1,1]^N$ contient un vecteur avec au moins m coordonnées égales à ± 1.

11. Montrer qu'il existe $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{pmatrix} \in V \cap [-1,1]^N$ de norme maximale.

On note $I = \{i \in [\![1, N]\!] \mid v_i = -1 \text{ ou } v_i = 1\}$.

12. Supposons par l'absurde $|I| < m$.
    (a) Montrer qu'il existe $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{pmatrix} \in V$ non nul tel que $\forall i \in I, h_i = 0$.
    (b) Montrer que $\{t \in \mathbb{R} \mid v + th \in V \cap [-1,1]^N\}$ est un voisinage de 0.
    (c) Aboutir à une contradiction.

On applique le résultat précédent à un problème d'équilibrage de vecteurs : soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension d et $v_1, \dots, v_N \in E$ des vecteurs de norme ≤ 1. On cherche à choisir des signes pour que la somme $\pm v_1 \pm v_2 \pm \cdots \pm v_N$ soit la plus courte possible.

13. Soit $s, z \in E$, et $\lambda \in [-1,1]$.
    (a) Simplifier $\frac{1+\lambda}{2}\|s + (1-\lambda)z\|^2 + \frac{1-\lambda}{2}\|s - (1+\lambda)z\|^2$.
    (b) En déduire $\min\big(\|s + (1-\lambda)z\|^2, \|s - (1+\lambda)z\|^2\big) \leq \|s\|^2 + \|z\|^2$.
14. Soit $z_1, \dots, z_k \in E$ de norme ≤ 1 et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [-1,1]$.
    Montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1,1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^{k} (\varepsilon_j - \lambda_j) z_j \right\| \leq \sqrt{k}$.
15. Montrer que $V = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \;\middle|\; \sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ et déterminer sa dimension en fonction de $\operatorname{rg}(v_1, \dots, v_N)$.
16. En déduire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in [-1,1]$, dont au moins $N - d$ sont égaux à ± 1, tels que $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j = 0$.
17. Montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N \in \{-1,1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j v_j \right\| \leq \sqrt{d}$.

Partie III. Toute norme est un maximum

On fixe désormais une norme N sur $\mathbb{R}^d$ (que l'on ne suppose pas euclidienne). On définit alors

- $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid N(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de N ;
- $B^* = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in \mathbb{R}^d, \langle x|v\rangle \leq N(x)\}$.

18. Montrer que $B^* = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in B, \langle x|v\rangle \leq 1\}$.
19. Montrer que B^* est compact.
20. Montrer que B est compact, convexe et non vide, et que $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid N(x) = 1\}$.
21. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^d, N(x) = \max\{\langle x|v\rangle \mid v \in B^*\}$.
    On pourra utiliser les résultats de la partie I.

22. **Universalité de $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$.** On munit l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, définie, pour toute suite réelle bornée u, par $\|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer qu'il existe une application linéaire $j : \mathbb{R}^d \to \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \|j(x)\|_\infty = \mathrm{N}(x)$.

Partie IV. Vecteurs exposés

Dans cette section, on cherche à améliorer le résultat de la question 21. en remplaçant l'ensemble B^* par un ensemble plus petit, que l'on notera $\widehat{\mathrm{B}}$, au prix du remplacement du maximum par une borne supérieure.

Plus précisément, étant donné deux vecteurs $u \in \mathbb{R}^d$ et $v \in \mathrm{B}^*$, on dira que *u expose v* si

$$\langle u|v\rangle = \mathrm{N}(u) \qquad \text{et} \qquad \forall w \in \mathrm{B}^* \setminus \{v\}, \langle u|w\rangle < \mathrm{N}(u),$$

et l'on notera $\widehat{\mathrm{B}}$ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathrm{B}^*$ exposés par au moins un vecteur u.

L'objectif de cette partie est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{N}(x) = \sup\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\}$.

On fixe donc dans la suite un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$.

23. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $h_\varepsilon : \begin{cases} \mathrm{B}^* \to & \mathbb{R} \\ v \mapsto & \langle x|v\rangle + \dfrac{\varepsilon}{2}\|v\|^2 \end{cases}$ admet un maximum en (au moins) un point de B^*, que l'on notera v_ε dans la suite.
24. Montrer que $\langle x|v_\varepsilon\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{N}(x)$.
25. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $v_\varepsilon \in \widehat{\mathrm{B}}$.
26. En déduire $\mathrm{N}(x) = \sup\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\}$.

Partie V. Théorème de Thurston (1986)

On conserve les notations de la partie précédente.

27. Soit $v \in \widehat{\mathrm{B}}$, exposé par un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$. On considère une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (n\,u + r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe un vecteur $w_n \in \mathrm{B}^*$ tel que $\left\langle w_n \middle| u + \dfrac{r_n}{n}\right\rangle = \mathrm{N}\left(u + \dfrac{r_n}{n}\right)$.
    (a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers v.
    (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\langle v|r_n\rangle}{n} \leq \mathrm{N}\left(u + \dfrac{r_n}{n}\right) - \mathrm{N}(u) \leq \dfrac{\langle w_n|r_n\rangle}{n}$.
    (c) Déduire des deux questions précédentes $\mathrm{N}(x_n) - \langle v|x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On suppose désormais que $\forall e \in \mathbb{Z}^d, \mathrm{N}(e) \in \mathbb{Z}$, et l'on veut montrer que N est définie par un nombre fini de formes linéaires à coefficients entiers, c'est-à-dire qu'il existe $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{Z}^d$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{N}(x) = \max_{j=1}^{r} \left\langle v_j \middle| x\right\rangle.$$

28. Soit $v \in \widehat{\mathrm{B}}$, exposé par $u \in \mathbb{R}^d$.
On fixe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ telle que $(x_n - nu)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée.
    (a) Montrer que, pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$, on a $\langle v|x_n + e\rangle = k_n + o(1)$, pour une certaine suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers relatifs.
    (b) En déduire $v \in \mathbb{Z}^d$.
29. Conclure.

Remarque. La démonstration donnée ici est due à Mikael de la Salle (2016).