Théorème de Thurston

Dans tout le devoir, d désigne un entier naturel non nul, et $\mathbb{R}^d$ est muni de son produit scalaire canonique, noté $\langle\cdot|\cdot\rangle$, et de la norme euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$.

Étant donné $a \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on notera $\mathrm{B}(a,r) = \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \|x-a\| < r\right\}$ la boule ouverte pour cette norme et $\overline{\mathrm{B}}(a,r)$ et $\mathrm{S}(a,r)$ la boule fermée et la sphère correspondantes.

Il est recommandé d'illustrer abondamment vos raisonnements avec des dessins.

Partie I. Projection sur un convexe fermé

1. **Triangles isocèles.** Soit $a,b,c \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|b-a\| = \|c-a\|$. On note δ cette norme commune. Montrer que $\left\|\frac{b+c}{2} - a\right\| \leq \delta$, avec égalité si et seulement si $b = c$.

   On a

   $$\begin{aligned}\left\|\frac{b+c}{2} - a\right\|^2 &= \frac{1}{4}\|(b-a)+(c-a)\|^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\|b-a\|^2 + 2\langle b-a|c-a\rangle + \|c-a\|^2\right) \\ &\leq \frac{1}{4}\left(\|b-a\|^2 + 2\|b-a\|\,\|c-a\| + \|c-a\|^2\right) && \textit{(Cauchy-Schwarz)} \\ &\leq \delta^2. && \textit{(toutes les normes sont égales)}\end{aligned}$$

   Si $\left\|\frac{b+c}{2} - a\right\| = \delta$, il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc les vecteurs $b-a$ et $c-a$ sont positivement colinéaires. Comme ils ont la même norme, $b-a = c-a$, c'est-à-dire $b = c$.
   La réciproque est immédiate.

2. **Triangles obtus.** Soit $a,b,c \in \mathbb{R}^d$ tels que $\langle b-a|c-a\rangle \leq 0$. Montrer que $\max\big(\|b-a\|, \|c-a\|\big) \leq \|b-c\|$.

   On écrit $c-b = (c-a)-(b-a)$, et on en déduit

   $$\begin{aligned}\|c-b\|^2 &= \|c-a\|^2 - 2\langle c-a|b-a\rangle + \|b-a\|^2 \\ &\geq \|c-a\|^2 + \|b-a\|^2 \\ &\geq \max\big(\|c-a\|^2, \|b-a\|^2\big) = \max\big(\|c-a\|, \|b-a\|\big)^2.\end{aligned}$$

Dans la suite de cette partie, on fixe une partie convexe, fermée, non vide C de $\mathbb{R}^d$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe un unique élément $y \in \mathrm{C}$ tel que

   $$\|x-y\| = \min\left\{\|x-z\| \,\middle|\, z \in \mathrm{C}\right\}.$$

Existence. *Comme* C *est non vide, on peut fixer* $c_0 \in \mathrm{C}$. *Notons* $r = \|x - c_0\|$. *L'intersection* $\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{B}}(x,r)$ *est fermée (par intersection) et bornée (en tant que partie d'une boule). Comme* $\mathbb{R}^d$ *est un espace vectoriel normé de dimension finie, l'intersection* $\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{B}}(x,r)$ *est compacte, et non vide car elle contient* c_0. *D'après le théorème des bornes atteintes, la fonction continue* $\|\cdot - x\|$ *est bornée sur* $\mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{B}}(x,r)$ *et atteint ses bornes.*

On peut donc trouver $y \in \mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{B}}(x,r)$ *tel que* $\forall z \in \mathrm{C} \cap \overline{\mathrm{B}}(x,r), \|x-y\| \leq \|x-z\|$.

En particulier, $\|x-y\| \leq \|x-c_0\| = r$.

D'un autre côté, si $z \in \mathrm{C} \setminus \overline{\mathrm{B}}(x,r)$, *on a* $\|x-y\| \leq r \leq \|x-z\|$.

Cela montre $\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \,|\, z \in \mathrm{C}\}$.

Unicité. *Soit* $y, y' \in \mathrm{C}$ *tels que* $\|x-y\| = \min\{\|x-z\| \,|\, z \in \mathrm{C}\} = \|x-y'\|$.

Notons δ *cette distance minimale.*

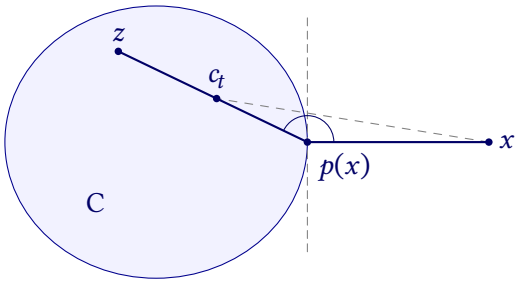
Comme $\dfrac{y+y'}{2} \in \mathrm{C}$, *la question* 1. *entraîne que* $\left\|x - \dfrac{y+y'}{2}\right\| \leq \delta$. *Mais la minimalité de* δ *force cette inégalité à être une égalité, et la question* 1. *entraîne* $y = y'$, *ce qui clôt la démonstration d'unicité.*

Dans la suite de cette partie, cet unique élément du convexe C sera noté $p(x)$: on obtient ainsi une application de « projection » $p : \mathbb{R}^d \to \mathrm{C}$ telle que $\forall z \in \mathrm{C}, \|x - p(x)\| \leq \|x - z\|$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $z \in \mathrm{C}$.
   En remarquant que, pour tout $t \in [0,1]$, $(1-t)p(x) + tz \in \mathrm{C}$, montrer que $\langle x - p(x) | z - p(x) \rangle \leq 0$.

   La convexité de C *entraîne que, pour tout* $t \in [0,1]$, *la combinaison convexe* $c_t = (1-t)p(x) + tz$ *appartient à* C, *si bien que* $\|x - c_t\| \geq \|x - p(x)\|$. *On en déduit que, pour tout* $t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} q(t) := \|x - c_t\|^2 &= \big\|x - \big((1-t)p(x) + tz\big)\big\|^2 \\ &= \big\|\big(x - p(x)\big) + t\big(p(x) - z\big)\big\|^2 \\ &= \|x - p(x)\|^2 + 2t\,\langle x - p(x) | p(x) - z\rangle + t^2\,\|p(x) - z\|^2. \end{aligned}$$



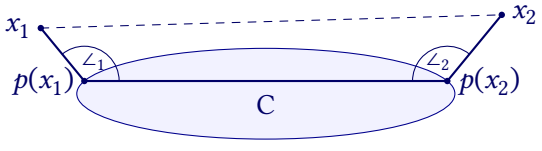
   La fonction q, *polynomiale, est dérivable, de dérivée* $2\langle x - p(x) | p(x) - z\rangle$ *en* 0. *Comme* q *atteint son minimum sur* $[0,1]$ *en* 0 *(parce que* $p(x)$ *est le point le plus proche de* x *dans* C), *cette dérivée doit être* ≥ 0, *ce qui montre que* $\langle x - p(x) | p(x) - z\rangle \geq 0$, *c'est-à-dire* $\langle x - p(x) | z - p(x)\rangle \leq 0$.

5. Montrer que l'application $p : \mathbb{R}^d \to \mathrm{C}$ est 1-lipschitzienne.

   Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$. *On va appliquer la question précédente deux fois, pour la projection de* x_1 *sur* C *et aussi pour la projection de* x_2 *sur* C. *On aura donc*

   - *Pour tout* $z \in \mathrm{C}$, $\langle x_1 - p(x_1) | z - p(x_1)\rangle \leq 0$, *donc en particulier* $\langle x_1 - p(x_1) | p(x_2) - p(x_1)\rangle \leq 0$;
   - *de même, pour tout* $z \in \mathrm{C}$, $\langle x_2 - p(x_2) | z - p(x_2)\rangle \leq 0$, *donc* $\langle x_2 - p(x_2) | p(x_1) - p(x_2)\rangle \leq 0$.

   On notera ces deux inégalités $(\angle_1)$ *et* $(\angle_2)$, *respectivement.*



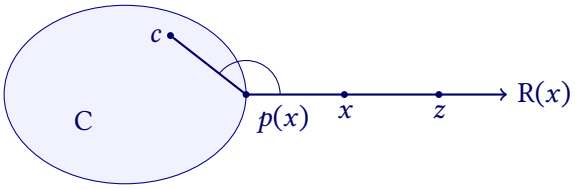
On a alors

$$\begin{aligned}\langle x_2 - x_1 | p(x_2) - p(x_1)\rangle &= \underbrace{\langle x_2 - p(x_2) | p(x_2) - p(x_1)\rangle}_{\geq 0 (\angle_2)} + \langle p(x_2) - p(x_1) | p(x_2) - p(x_1)\rangle \\ &\qquad + \underbrace{\langle p(x_1) - x_1 | p(x_2) - p(x_1)\rangle}_{\geq 0 (\angle_1)} \\ &\geq \langle p(x_2) - p(x_1) | p(x_2) - p(x_1)\rangle = \|p(x_2) - p(x_1)\|^2.\end{aligned}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit $\|p(x_2) - p(x_1)\|^2 \leq \|x_2 - x_1\| \|p(x_2) - p(x_1)\|$. En distinguant le cas $p(x_1) = p(x_2)$, on obtient l'inégalité $\|p(x_2) - p(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|$.

6. **Lemme des rayons.** Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$. On note $\mathrm{R}(x) = \{p(x) + t(x - p(x)) \,|\, t \in \mathbb{R}_+\}$ la demi-droite issue de $p(x)$ et passant par x. Montrer que $\forall z \in \mathrm{R}(x), p(z) = p(x)$.

   Soit $c \in \mathrm{C}$. On va montrer l'inégalité $\|z - p(x)\| \leq \|z - c\|$, ce qui montrera $p(z) = p(x)$ en revenant à la définition.



   Soit $z \in \mathrm{R}(x)$. On peut donc trouver $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $z = p(x) + t(x - p(x))$. Alors

$$\langle z - p(x) | c - p(x)\rangle = t \langle x - p(x) | c - p(x)\rangle \leq 0.$$

   D'après la question 2., on en déduit $\|z - p(x)\| \leq \|z - c\|$.

On rappelle que la *frontière de* C, notée ici $\partial \mathrm{C}$, est l'ensemble $\overline{\mathrm{C}} \setminus \mathring{\mathrm{C}} = \mathrm{C} \setminus \mathring{\mathrm{C}}$ des points non intérieurs de C.

7. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$, on a $p(x) \in \partial \mathrm{C}$.

   Posons $\gamma : \begin{cases} [0,1] \to & \mathbb{R}^d \\ t & \mapsto (1-t)p(x) + tx \end{cases}$, le chemin qui va à vitesse uniforme de $p(x)$ (dans C) à x (hors de C).
   On voit que, pour tout $t \in]0,1]$, le point $\gamma(t)$ n'appartient pas à C. En effet, il vérifie

$$\|x - \gamma(t)\| = \underbrace{(1-t)}_{<1} \underbrace{\|x - p(x)\|}_{>0} < \|x - p(x)\|,$$

   donc son appartenance à C contredirait la définition de $p(x)$.
   On a donc $\underbrace{\gamma(1/n)}_{\in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \gamma(0) = p(x)$, donc $p(x) \notin \mathring{\mathrm{C}}$.
   Cela démontre que $p(x) \in \mathrm{C} \setminus \mathring{\mathrm{C}} = \partial \mathrm{C}$.

On suppose dans la suite C borné et l'on fixe $r > 0$ tel que C soit inclus dans la boule ouverte $\mathrm{B}(0, r)$.

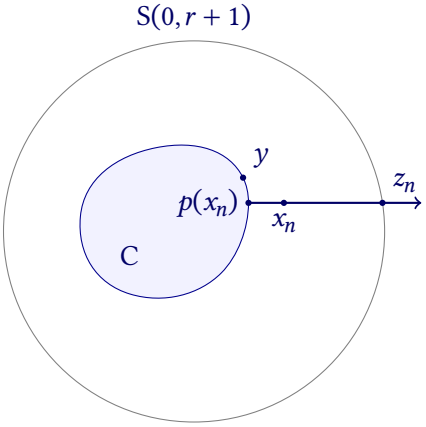
8. Soit $y \in \partial \mathrm{C}$.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|p(x_n) - y\| \leq \|x_n - y\| \leq \frac{1}{n}.$$

   Comme $y \in \partial \mathrm{C}$, on peut trouver pour tout $\delta > 0$ un élément $x \in \mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$ tel que $\|x - y\| \leq \delta$. En particulier, on obtient ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{C}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \|x_n - y\| \leq \frac{1}{n}$.
   Le caractère 1-lipschitzien de p (et l'observation que $y \in \mathrm{C}$, donc $p(y) = y$) montre alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|p(x_n) - y\| = \|p(x_n) - p(y)\| \leq \|x_n - y\|$.

(b) En déduire qu'il existe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans la sphère $\mathrm{S}(0,r+1)$ telle que $\forall n\in\mathbb{N}^*, \|p(z_n)-y\|\leq\dfrac{1}{n}$.

On va appliquer le lemme des rayons. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout $z\in\mathrm{R}(x_n)$, c'est-à-dire de la forme $z=p(x_n)+t\big(x_n-p(x_n)\big)$ (pour un certain paramètre $t\in\mathbb{R}_+$), on sait que $p(z)=p(x_n)$.
En notant $u=x_n-p(x_n)$, il suffit donc de montrer l'existence d'un paramètre $t\in\mathbb{R}_+$ tel que $\|p(x_n)+tu\|=r+1$.



Or, la fonction $t\mapsto\|p(x_n)+tu\|$ est continue $\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, elle vaut $\|p(x_n)\|<r$ quand $t=0$ (car $p(x_n)\in\mathrm{C}\subseteq\mathrm{B}(0,r)$), et elle tend vers $+\infty$ quand $t\to+\infty$, car d'après l'inégalité triangulaire à l'envers

$$\|p(x_n)+tu\|\geq\|tu\|-\|p(x_n)\|=t\|u\|-\|p(x_n)\|.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver $t\in\mathbb{R}_+$ tel que $\|p(x_n)+tu\|=r+1$, ce qui conclut : le point $z_n=p(x_n)+tu$ convient.

(c) Montrer qu'il existe $z\in\mathrm{S}(0,r+1)$ tel que $p(z)=y$.

La sphère $\mathrm{S}(0,r+1)$ étant compacte, on peut trouver une extractrice φ et $z\in\mathrm{S}(0,r+1)$ tels que $z_{\varphi(n)}\xrightarrow[n\to+\infty]{}z$. Par continuité de p (conséquence du caractère lipschitzien), on a $p(z_{\varphi(n)})\xrightarrow[n\to+\infty]{}p(z)$.
Mais la construction de la suite fournissait $\forall n\in\mathbb{N}^*, \|p(z_n)-y\|\leq\dfrac{1}{n}$, si bien que l'on a aussi $p(z_{\varphi(n)})\xrightarrow[n\to+\infty]{}y$.
Par unicité de la limite, $p(z)=y$.

9. Soit $y\in\partial\mathrm{C}$. Montrer qu'il existe $v\in\mathbb{R}^d$ non nul tel que $\forall z\in\mathrm{C}, \langle z|v\rangle\leq\langle y|v\rangle$.

D'après la question précédente, on peut trouver $z\in\mathbb{R}^d\setminus\mathrm{C}$ tel que $y=p(z)$.
D'après la question 4., on a alors $\forall c\in\mathrm{C}, \langle c-y|z-p(z)\rangle=\langle c-y|v\rangle\leq 0$, en posant $v=z-p(z)$, qui est un vecteur non nul car $z\notin\mathrm{C}$, donc $z\neq p(z)$.
Par bilinéarité du produit scalaire, on a donc montré $\forall c\in\mathrm{C}, \langle c|v\rangle\leq\langle y|v\rangle$, ce qui est équivalent à l'assertion de l'énoncé (qui aurait mieux fait d'utiliser une autre lettre que z, mea culpa*).*

10. Déduire des questions précédentes que si $d\geq 2$, alors $\partial\mathrm{C}$ est connexe par arcs.

En dimension $d\geq 2$, toutes les sphères sont connexes par arcs. En effet,

- *$\mathrm{X}=\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ est connexe par arcs : il y a plein de façons de montrer cela, on peut par exemple remarquer que les deux ensembles $\mathrm{X}_+=\big\{x\in\mathrm{X}\,\big|\,x_1\geq 0\big\}$ et $\mathrm{X}_-=\big\{x\in\mathrm{X}\,\big|\,x_1\leq 0\big\}$ sont connexes par arcs car étoilés par rapport à $e_\pm=(\pm1,0,\dots,0)$, et que leur intersection n'est pas vide (elle contient par exemple : $(0,1,0,\dots,0)$). La composante connexe par arcs de ce point d'intersection est donc X tout entier.*
- *$\mathrm{S}(0,\mathrm{R})$ est l'image de X par l'application continue $x\mapsto\mathrm{R}\dfrac{x}{\|x\|}$, donc elle hérite de sa connexité par arcs.*

Remarque. *On peut aussi montrer que les sphères sont connexes par arcs en généralisant les* coordonnées

sphériques : $\mathrm{S}(0,1)$ *est par exemple l'image de* $\mathbb{R}^{d-1}$ *par l'application continue*

$$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^{d-1} & \to & \mathbb{R}^d \\ \begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\\ \vdots\\ \theta_{d-1}\end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix}\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{d-2})\cos(\theta_{d-1})\\ \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\cos(\theta_{d-2})\sin(\theta_{d-1})\\ \cos(\theta_1)\cos(\theta_2)\cdots\sin(\theta_{d-2})\\ \vdots\\ \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\\ \sin(\theta_1)\end{pmatrix}\end{array}\right.$$

Un intérêt de la démonstration passant par $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$ *est qu'elle continue à fonctionner quelle que soit la norme.*

Puisque les questions précédentes ont établi que $\partial\mathrm{C}$ *était l'image de la sphère* $\mathrm{S}(0,r+1)$ *par l'application continue p, on en déduit que cette frontière est connexe par arcs.*

Partie II. Intermède linéaire

On considère d'abord un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ de dimension m (muni de la norme euclidienne). Commençons par montrer que $\mathrm{V}\cap[-1,1]^{\mathrm{N}}$ contient un vecteur avec au moins m coordonnées égales à ±1.

11. Montrer qu'il existe $v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_{\mathrm{N}}\end{pmatrix}\in\mathrm{V}\cap[-1,1]^{\mathrm{N}}$ de norme maximale.

On peut simplifier le raisonnement en utilisant les divers théorèmes concernant les espaces vectoriels de dimension finie.
Le sous-espace vectoriel V *est un sous-espace vectoriel de dimension finie d'un espace vectoriel normé, donc il est automatiquement fermé.*
Le cube $[-1,1]^{\mathrm{N}}$ *est fermé, par exemple parce qu'il s'agit de la boule unité fermée pour la norme uniforme, donc il est fermé pour cette norme, et donc pour toutes parce qu'elles sont équivalentes. Pour la même raison, il est borné.*
Par intersection, $\mathrm{K}=\mathrm{V}\cap[-1,1]^{\mathrm{N}}$ *est fermé et borné, donc compact. Il est par ailleurs non vide car* $0\in\mathrm{K}$.
Enfin, la norme $\|\cdot\|$ *est continue car* 1*-lipschitzienne.*
D'après le théorème des bornes atteintes, $\|\cdot\|$ *atteint son maximum sur* K.

On note $\mathrm{I}=\left\{i\in[\![1,\mathrm{N}]\!]\,\middle|\,v_i=-1 \text{ ou } v_i=1\right\}$.

12. Supposons par l'absurde $|\mathrm{I}|<m$.

(a) Montrer qu'il existe $h=\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots\\ h_{\mathrm{N}}\end{pmatrix}\in\mathrm{V}$ non nul tel que $\forall i\in\mathrm{I}, h_i=0$.

L'application linéaire $\pi:\begin{cases}\mathbb{R}^{\mathrm{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathrm{I}}\\ h=(h_i)_{i=1}^{\mathrm{N}} & \mapsto & (h_i)_{i\in\mathrm{I}}\end{cases}$ *définit une restriction* $\pi_{|\mathrm{V}}\in\mathscr{L}(\mathrm{V},\mathbb{R}^{\mathrm{I}})$.
Comme $\dim\mathrm{V}=m>|\mathrm{I}|=\dim\mathbb{R}^{\mathrm{I}}$, *cette application linéaire ne peut pas être injective, donc il existe un vecteur non nul* $h\in\ker\pi_{|\mathrm{V}}$, *c'est-à-dire un vecteur* $h\in\mathrm{V}$ *non nul tel que* $\forall i\in\mathrm{I}, h_i=0$.

(b) Montrer que $\left\{t\in\mathbb{R}\,\middle|\,v+th\in\mathrm{V}\cap[-1,1]^{\mathrm{N}}\right\}$ est un voisinage de 0.

Notons que, par combinaison linéaire, il est immédiat que $\forall t\in\mathbb{R}, v+th\in\mathrm{V}$. *L'enjeu est l'appartenance au cube* $[-1,1]^{\mathrm{N}}$.
Soit $i\in[\![1,\mathrm{N}]\!]$. *On va montrer que pour un certain ouvert* U_i *contenant* 0, *la* i*-ème coordonnée de* $v+th$ *appartient à* $[-1,1]$ *quel que soit* $t\in\mathrm{U}_i$.

- *Si $i \in \mathrm{I}$, $h_i = 0$, donc la i-ème coordonnée de $v + th$ est $v_i = \pm 1$. L'ouvert $\mathrm{U}_i = \mathbb{R}$ convient donc.*
- *Si $i \notin \mathrm{I}$, $v_i \in]-1,1[$. L'image réciproque U_i de $]-1,1[$ par l'application continue $t \mapsto v_i + th_i$ convient donc, car il s'agit d'un ouvert contenant 0.*

Ainsi, l'ensemble de l'énoncé contient l'ouvert $\mathrm{U} = \bigcap_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{U}_i$. Comme $0 \in \mathrm{U}$, l'ensemble de l'énoncé est bien un voisinage de 0.

(c) Aboutir à une contradiction.

L'ensemble de la question précédente étant un voisinage de 0, il contient un intervalle non trivial centré en 0 et en particulier deux nombres opposés $\pm\delta$, pour un certain $\delta > 0$.
Autrement dit, $v \pm \delta h \in \mathrm{V} \cap [-1,1]^{\mathrm{N}}$.
Par maximalité de la norme en v sur $\mathrm{V} \cap [-1,1]^{\mathrm{N}}$, on a $\|v \pm \delta h\| \leq \|v\|$ et $v = \frac{1}{2}((v+\delta h) + (v - \delta h))$, si bien que

$$\|v\| \leq \frac{\|v+\delta h\| + \|v-\delta h\|}{2} \leq \|v\|.$$

Les inégalités intermédiaires sont donc des égalités, ce qui force $\|v \pm \delta h\| = \|v\|$.
D'après la question 1., on en déduit $v + \delta h = v - \delta h$, c'est-à-dire $\delta h = 0$. Cela fournit la contradiction souhaitée, car on sait que $\delta > 0$ et $h \neq 0$.

On applique le résultat précédent à un problème d'équilibrage de vecteurs : soit $(\mathrm{E}, \|\cdot\|)$ un espace euclidien de dimension d et $v_1, \dots, v_{\mathrm{N}} \in \mathrm{E}$ des vecteurs de norme ≤ 1. On cherche à choisir des signes pour que la somme $\pm v_1 \pm v_2 \pm \cdots \pm v_{\mathrm{N}}$ soit la plus courte possible.

13. Soit $s, z \in \mathrm{E}$, et $\lambda \in [-1,1]$.

(a) Simplifier $\frac{1+\lambda}{2}\|s + (1-\lambda)z\|^2 + \frac{1-\lambda}{2}\|s - (1+\lambda)z\|^2$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1+\lambda}{2}\|s + (1-\lambda)z\|^2 + \frac{1-\lambda}{2}\|s - (1+\lambda)z\|^2 &= \frac{1+\lambda}{2}\left[\|s\|^2 + 2(1-\lambda)\langle s|z\rangle + (1-\lambda)^2\|z\|^2\right] \\ &\quad + \frac{1-\lambda}{2}\left[\|s\|^2 - 2(1+\lambda)\langle s|z\rangle + (1+\lambda)^2\|z\|^2\right] \\ &= \|s\|^2 + (1-\lambda^2)\|z\|^2.\end{aligned}$$

(b) En déduire $\min\left(\|s + (1-\lambda)z\|^2, \|s - (1+\lambda)z\|^2\right) \leq \|s\|^2 + \|z\|^2$.

C'est une variante de l'argument « le minimum est plus petit que la moyenne » : si l'on note m le minimum de l'énoncé, on a $m \leq \|s + (1-\lambda)z\|^2$ et $m \leq \|s - (1+\lambda)z\|^2$, donc en remarquant que $\frac{1+\lambda}{2}$ et $\frac{1-\lambda}{2}$ sont deux nombres positifs dont la somme vaut 1,

$$\begin{aligned}m &= \frac{1+\lambda}{2}m + \frac{1-\lambda}{2}m \\ &\leq \frac{1+\lambda}{2}\|s + (1-\lambda)z\|^2 + \frac{1-\lambda}{2}\|s - (1+\lambda)z\|^2 \\ &\leq \|s\|^2 + (1-\lambda^2)\|z\|^2 \\ &\leq \|s\|^2 + \|z\|^2.\end{aligned}$$

14. Soit $z_1, \dots, z_k \in \mathrm{E}$ de norme ≤ 1 et $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in [-1,1]$.
Montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k \in \{-1,1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^{k} (\varepsilon_j - \lambda_j) z_j \right\| \leq \sqrt{k}$.

On va utiliser la question précédente pour choisir les signes, de façon gloutonne.

Pour tout $\ell \in [\![0,k]\!]$, on note $\mathrm{P}(\ell)$ l'assertion : « il existe $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{\pm 1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^{\ell} (\varepsilon_j - \lambda_j) z_j \right\|^2 \leq \ell$. »

Montrons $\forall \ell \in [\![0,k]\!], \mathrm{P}(\ell)$ par récurrence finie.

Initialisation. *L'assertion $\mathrm{P}(0)$ est tautologique.*

Hérédité. *Soit $\ell \in [\![0, k-1]\!]$ tel que $\mathrm{P}(\ell)$, on peut donc trouver $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\ell \in \{\pm 1\}$ tels que la somme $s := \sum_{j=1}^{\ell} (\varepsilon_j - \lambda_j) z_j$ vérifie $\|s\|^2 \leq \ell$.*

D'après la question précédente, l'un (au moins) des deux vecteurs $s + (1 - \lambda_{\ell+1}) z_{\ell+1}$ ou $s - (1 + \lambda_{\ell+1}) z_{\ell+1}$, notons-le s', vérifie $\|s'\|^2 \leq \|s\|^2 + \|z_{\ell+1}\|^2 \leq \ell + 1$. Remarquons que $s' = s + (\pm 1 - \lambda_{\ell+1}) z_{\ell+1}$. En notant $\varepsilon_{\ell+1}$ le signe apparaissant dans cette formule, on a donc $\left\| \sum_{j=1}^{\ell+1} (\varepsilon_j - \lambda_j) z_j \right\|^2 = \|s'\|^2 \leq \ell + 1$, ce qui montre $\mathrm{P}(\ell+1)$ et clôt la récurrence.

L'assertion $\mathrm{P}(k)$ et la croissance de $\sqrt{\cdot}$ concluent alors.

15. Montrer que $\mathrm{V} = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_\mathrm{N}) \in \mathbb{R}^\mathrm{N} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j v_j = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ et déterminer sa dimension en fonction de $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_\mathrm{N})$.

L'ensemble V est le noyau de l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^\mathrm{N} & \to & \mathrm{E} \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_\mathrm{N}) & \mapsto & \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j v_j, \end{cases}$ dont l'image est le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_\mathrm{N})$.
À ce titre, il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ de dimension

$$\dim \mathrm{V} = \dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^\mathrm{N} - \dim \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_\mathrm{N}) = \mathrm{N} - \mathrm{rg}(v_1, \dots, v_\mathrm{N}).$$

16. En déduire qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_\mathrm{N} \in [-1,1]$, dont au moins $\mathrm{N} - d$ sont égaux à ± 1, tels que $\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \lambda_j v_j = 0$.

On a tautologiquement $\mathrm{rg}(v_1, \dots, v_\mathrm{N}) \leq \dim \mathrm{E} = d$, donc $m = \dim \mathrm{V}$ vérifie $m \geq \mathrm{N} - d$.
D'après la toute-puissante question 12., on peut donc trouver dans V un vecteur à coordonnées dans $[-1,1]$ et dont au moins m coordonnées valent ± 1, ce qui conclut.

17. Montrer qu'il existe des signes $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_\mathrm{N} \in \{-1,1\}$ tels que $\left\| \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \varepsilon_j v_j \right\| \leq \sqrt{d}$.

Fixons des λ_j comme dans la question précédente. Notons $\mathrm{J} = \left\{ j \in [\![1,\mathrm{N}]\!] \,\middle|\, |\lambda_j| = 1 \right\}$ et $\mathrm{J}^c = [\![1,\mathrm{N}]\!] \setminus \mathrm{J}$ son complémentaire. On a donc $|\mathrm{J}| \geq \mathrm{N} - d$ et $|\mathrm{J}^c| \leq d$.

On applique la question 14. aux vecteurs $(v_j)_{j \in \mathrm{J}^c}$ et aux scalaires λ_j correspondants : on trouve ainsi une famille $(\varepsilon_j)_{j \in \mathrm{J}^c}$ de signes telle que $\left\| \sum_{j \in \mathrm{J}^c} (\varepsilon_j - \lambda_j) v_j \right\| \leq \sqrt{|\mathrm{J}^c|} \leq \sqrt{d}$.

On prolonge ensuite cette famille de signes en posant $\varepsilon_j = \lambda_j$ pour tout $j \in \mathrm{J}$.

Comme $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j = 0$, *on a ainsi*

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j v_j\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{N} \varepsilon_j v_j - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j v_j\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{N} (\varepsilon_j - \lambda_j) v_j\right\| \\ &= \left\|\sum_{j \in J^c} (\varepsilon_j - \lambda_j) v_j\right\| \leq \sqrt{d}.\end{aligned}$$

Remarque. *La borne est optimale, comme le montre l'exemple d'une base orthonormée. Il est remarquable qu'elle ne dépende que de la dimension d, et pas du nombre* N *de vecteurs.*

Partie III. Toute norme est un maximum

On fixe désormais une norme N sur $\mathbb{R}^d$ (que l'on ne suppose pas euclidienne). On définit alors

- $B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid N(x) \leq 1\}$ la boule unité fermée de N ;
- $B^* = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in \mathbb{R}^d, \langle x|v\rangle \leq N(x)\}$.

18. Montrer que $B^* = \{v \in \mathbb{R}^d \mid \forall x \in B, \langle x|v\rangle \leq 1\}$.

On procède par double inclusion.

- *Soit* $v \in B^*$. *Soit* $x \in B$. *On a alors* $\langle x|v\rangle \leq N(x) \leq 1$.
- *Soit* $v \in \mathbb{R}^d$ *tel que* $\forall x \in B, \langle x|v\rangle \leq 1$.
  Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
  - *Si* $x = 0$, *on a* $\langle x|v\rangle = 0 \leq 0 = N(x)$.
  - *Si* $x \neq 0$, *on applique l'hypothèse à* $\frac{x}{N(x)} \in B$ *pour obtenir* $\left\langle \frac{x}{N(x)} \middle| v \right\rangle \leq 1$.
    Par bilinéarité du produit scalaire, on en déduit $\langle x|v\rangle \leq N(x)$.

  On a donc montré $v \in B^*$.

19. Montrer que B^* est compact.

- *Pour tout* $x \in B$, *la forme linéaire* $v \mapsto \langle x|v\rangle$ *est automatiquement continue, donc* $\{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle x|v\rangle \leq 1\}$ *est fermé, en tant qu'image réciproque de la demi-droite fermée* $]-\infty, 1]$.
  L'intersection $B^* = \bigcap_{x \in B} \{v \in \mathbb{R}^d \mid \langle x|v\rangle \leq 1\}$ *est donc fermée.*
- *Notons* $e_1, \dots, e_d$ *les vecteurs de la base canonique. La boule* B *étant un voisinage de* 0 *(elle contient la boule unité ouverte pour la norme* N*), elle contient tous les vecteurs* $\pm\delta e_j$, *pour* $\delta > 0$ *assez petit.*
  On en déduit que les $v \in B^*$ *vérifient* $\forall j \in [\![1, d]\!], \langle \pm\delta e_j | v\rangle \leq 1$, *c'est-à-dire que toutes les coordonnées de v sont, en valeur absolue,* $\leq \frac{1}{\delta}$.
  Cela montre que B^* *est borné.*

Fermé et borné en dimension finie, B^* *est donc compact.*

20. Montrer que B est compact, convexe et non vide, et que $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid N(x) = 1\}$.

- *La compacité des boules fermées en dimension finie est du cours.*
- *La convexité des boules est du cours.*
- *On a évidemment* $0 \in B$.
- *Montrons* $\partial B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid N(x) = 1\}$ *par double inclusion. Remarquons déjà que* B *est un fermé, si bien que* $\partial B = \overline{B} \setminus \mathring{B} = B \setminus \mathring{B}$.

- *Soit $x \in \partial B$. Si (par l'absurde) on avait $N(x) < 1$, le vecteur x appartiendrait à la boule unité ouverte $\{x \in \mathbb{R}^d \,|\, N(x) < 1\}$, qui est un ouvert inclus dans B. On aurait donc $x \in \mathring{B}$, ce qui est exclu.*
- *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $N(x) = 1$. On a $\underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right)x}_{\notin B} \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$, donc $x \notin \mathring{B}$, et $x \in \partial B$.*

Remarque. *La question est un peu bancale : est-ce que le fait que l'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte correspondante est du cours ? On l'a montré ici, par acquit de conscience. La question est surtout là pour préparer l'application de la partie I à la boule B.*

21. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^d, N(x) = \max\{\langle x|v\rangle \,|\, v \in B^*\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$.
Notons que, par définition, on a $\forall v \in B^*, \langle x|v\rangle \leq N(x)$. L'enjeu est de montrer l'existence d'un vecteur $v \in B^*$ pour lequel cette inégalité est une égalité.

- *Si $x = 0$, le vecteur nul appartient à B^* et vérifie clairement $\langle x|v\rangle = 0 = N(x)$.*
- *Supposons désormais x non nul. Le vecteur $y = \frac{x}{N(x)}$ vérifie alors $N(y) = 1$, donc $y \in \partial B$ d'après la question précédente.*
  D'après la question 9., on peut donc trouver $\tilde{v} \in \mathbb{R}^d$ non nul tel que $\forall z \in B, \langle z|\tilde{v}\rangle \leq \langle y|\tilde{v}\rangle$.
  En appliquant cette inégalité à $\delta\tilde{v}$, qui appartiendra à B pourvu que $\delta > 0$ soit assez petit, on obtient $\langle y|\tilde{v}\rangle \geq \langle \delta\tilde{v}|\tilde{v}\rangle > 0$. On peut alors considérer $v = \frac{\tilde{v}}{\langle y|\tilde{v}\rangle}$, qui vérifie maintenant $\forall z \in B, \langle z|v\rangle \leq \langle y|v\rangle = 1$.
  Cette inégalité montre que $v \in B^*$ d'après la question 18.
  En revenant à x, on a donc trouvé $v \in B^*$ tel que $\langle x|v\rangle = N(x)$, ce qui conclut la démonstration.

22. **Universalité de $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$.** On munit l'espace vectoriel $\ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ des suites réelles bornées de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$, définie, pour toute suite réelle bornée u, par $\|u\|_\infty = \sup\{|u_n| \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.
Montrer qu'il existe une application linéaire $j : \mathbb{R}^d \to \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \|j(x)\|_\infty = N(x)$.

- *Admettons provisoirement pouvoir trouver une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B^* telle que $D = \{v_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ soit dense dans B^*.*
  On peut alors définir

$$j : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to & \ell^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R}) \\ x \mapsto & (\langle x|v_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \end{cases}.$$

  - *Soit $x \in \mathbb{R}^d$.*
    En appliquant la définition de B^* à $\pm x$, on a $\forall n \in \mathbb{N}, \langle \pm x|v_n\rangle \leq N(x)$, donc $|\langle x|v_n\rangle| \leq N(x)$. Cela montre à la fois que j est bien définie et l'inégalité $\|j(x)\|_\infty \leq N(x)$.
  - *La linéarité de j est une conséquence immédiate de la bilinéarité du produit scalaire.*
  - *Soit $x \in \mathbb{R}^d$.*
    - *On a déjà montré $\|j(x)\|_\infty \leq N(x)$.*
    - *Réciproquement, on sait pouvoir trouver $v \in B^*$ tel que $\langle x|v\rangle = N(x)$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut alors trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|v - v_n\| \leq \varepsilon$, d'où $|N(x) - \langle x|v_n\rangle| = |\langle x|v - v_n\rangle| \leq \varepsilon\|x\|$ par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.*
      On a donc montré $\forall \varepsilon > 0, \|j(x)\|_\infty \geq N(x) - \varepsilon\|x\|$, ce qui montre $\|j(x)\|_\infty \geq N(x)$ par passage à la limite.
- *Reste à montrer qu'il existe bel et bien des suites à valeurs dans B^* dont l'image est dense dans B^*.*
  On a montré plus haut que B^* était compact. Sa définition rend par ailleurs clair qu'il est convexe.
  On peut donc appliquer[1] les résultats de la partie I et considérer la projection $p : \mathbb{R}^d \to B^*$, qui est 1-lipschitzienne donc continue.

1. Il existe des démonstrations plus légères. On peut en fait montrer que pour toute partie non vide X de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite à valeurs dans X dont l'image est dense dans X. C'est un bon exercice !

On fixe une énumération $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des éléments de $\mathbb{Q}^d$, qui est bien dénombrable. La suite $\big(p(r_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc à valeurs dans B^*. Il reste à montrer que son image est dense.
Soit $v \in \mathrm{B}^*$ et $\varepsilon > 0$. Par densité de $\mathbb{Q}^d$, on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|v - r_n\| \leq \varepsilon$. Le caractère 1-lipschitzien de p force donc $\|v - p(r_n)\| = \|p(v) - p(r_n)\| \leq \|v - r_n\| \leq \varepsilon$.

Partie IV. Vecteurs exposés

Dans cette section, on cherche à améliorer le résultat de la question 21. en remplaçant l'ensemble B^* par un ensemble plus petit, que l'on notera $\widehat{\mathrm{B}}$, au prix du remplacement du maximum par une borne supérieure.
Plus précisément, étant donné deux vecteurs $u \in \mathbb{R}^d$ et $v \in \mathrm{B}^*$, on dira que *u expose v* si

$$\langle u|v\rangle = \mathrm{N}(u) \qquad \text{et} \qquad \forall w \in \mathrm{B}^* \setminus \{v\}, \langle u|w\rangle < \mathrm{N}(u),$$

et l'on notera $\widehat{\mathrm{B}}$ l'ensemble des vecteurs $v \in \mathrm{B}^*$ exposés par au moins un vecteur u.
L'objectif de cette partie est de montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{N}(x) = \sup\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\}$.
On fixe donc dans la suite un vecteur $x \in \mathbb{R}^d$.

23. Justifier que, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction $h_\varepsilon : \begin{cases} \mathrm{B}^* \to & \mathbb{R} \\ v \mapsto & \langle x|v\rangle + \dfrac{\varepsilon}{2}\|v\|^2 \end{cases}$ admet un maximum en (au moins) un point de B^*, que l'on notera v_ε dans la suite.

    La fonction h_ε est continue par opérations, et B^* est un compact non vide. Le théorème des bornes atteintes conclut.

24. Montrer que $\langle x|v_\varepsilon\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{N}(x)$.

    - *Par définition de B^*, on a $\forall \varepsilon > 0, \langle x|v_\varepsilon\rangle \leq \mathrm{N}(x)$.*
    - *Par compacité de B^*, fixons $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall v \in \mathrm{B}^*, \|v\| \leq \mathrm{M}$.*
      Grâce à la partie précédente, on sait pouvoir trouver $w \in \mathrm{B}^*$ tel que $\mathrm{N}(x) = \langle x|w\rangle$. Par définition des vecteurs v_ε, on a donc $\forall \varepsilon > 0, h_\varepsilon(w) \leq h_\varepsilon(v_\varepsilon)$, ce qui donne pour tout $\varepsilon > 0$,

    $$\langle x|v_\varepsilon\rangle \geq \mathrm{N}(x) + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|w\|^2 - \|v_\varepsilon\|^2\right) \geq \mathrm{N}(x) - \frac{\varepsilon}{2}\mathrm{M}^2.$$

    D'après le théorème des gendarmes, $\langle x|v_\varepsilon\rangle \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathrm{N}(x)$.

25. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $v_\varepsilon \in \widehat{\mathrm{B}}$.

    Remarque. *Cette question est franchement difficile.*
    Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $w \in \mathrm{B}^*$, on a

    $$\begin{aligned} \langle x|w\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|w\|^2 \leq \langle x|v_\varepsilon\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|v_\varepsilon\|^2 \qquad & \textit{donc} \qquad \langle x|w\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\left(\|v_\varepsilon\|^2 + 2\langle v_\varepsilon|w - v_\varepsilon\rangle + \|w - v_\varepsilon\|^2\right) \leq \langle x|v_\varepsilon\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|v_\varepsilon\|^2 \\ & \textit{donc} \qquad \langle x + \varepsilon v_\varepsilon|w\rangle - \varepsilon\langle v_\varepsilon|v_\varepsilon\rangle + \frac{\varepsilon}{2}\|w - v_\varepsilon\|^2 \leq \langle x|v_\varepsilon\rangle \\ & \textit{donc} \qquad \langle x + \varepsilon v_\varepsilon|w\rangle \leq \langle x + \varepsilon v_\varepsilon|v_\varepsilon\rangle - \frac{\varepsilon}{2}\|w - v_\varepsilon\|^2, \end{aligned}$$

    ce qui montre, en posant $u = x + \varepsilon v_\varepsilon$, que $\langle u|w\rangle \leq \langle u|v_\varepsilon\rangle$, avec égalité si et seulement si $w = v_\varepsilon$.
    Ainsi, u expose le vecteur v_ε, ce qui montre $v_\varepsilon \in \widehat{\mathrm{B}}$.

26. En déduire $\mathrm{N}(x) = \sup\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\}$.

    Par définition, $\widehat{\mathrm{B}} \subseteq \mathrm{B}^*$, donc l'ensemble $\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\}$ est majoré par $\max\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \mathrm{B}^*\right\} = \mathrm{N}(x)$, ce qui montre que la borne supérieure de l'énoncé existe et est majorée par $\mathrm{N}(x)$.
    Réciproquement, les questions précédentes fournissent une suite $(v_{1/n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de $\widehat{\mathrm{B}}$ telle que $\left\langle x\middle|v_{1/n}\right\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{N}(x)$. Cela conclut.

Partie V. Théorème de Thurston (1986)

On conserve les notations de la partie précédente.

27. Soit $v \in \widehat{\mathrm{B}}$, exposé par un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$. On considère une suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et on définit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (nu + r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on fixe un vecteur $w_n \in \mathrm{B}^*$ tel que $\left\langle w_n \middle| u + \frac{r_n}{n} \right\rangle = \mathrm{N}\left(u + \frac{r_n}{n}\right)$.

(a) Montrer que $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers v.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans le compact B^*, donc il suffit de vérifier que v est son unique valeur d'adhérence. Soit φ une extractrice et $\ell \in \mathrm{B}^*$ tel que $w_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Comme $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, $u + \frac{r_{\varphi(n)}}{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} u$ donc, par continuité du produit scalaire et de la norme, on obtient $\langle \ell | u \rangle = \mathrm{N}(u)$ en passant à la limite.
Comme u expose le vecteur v, on a nécessairement $\ell = v$, ce qui conclut.

(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{\langle v|r_n\rangle}{n} \leq \mathrm{N}\left(u + \frac{r_n}{n}\right) - \mathrm{N}(u) \leq \frac{\langle w_n|r_n\rangle}{n}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- *On a*
$$\mathrm{N}\left(u + \frac{r_n}{n}\right) = \left\langle w_n \middle| u + \frac{r_n}{n} \right\rangle = \langle w_n|u\rangle + \frac{\langle w_n|r_n\rangle}{n} \leq \mathrm{N}(u) + \frac{\langle w_n|r_n\rangle}{n},$$
car $w_n \in \mathrm{B}^*$.
- *De la même façon, parce que $v \in \mathrm{B}^*$,*
$$\mathrm{N}(u) = \langle v|u\rangle = \left\langle v \middle| u + \frac{r_n}{n} \right\rangle - \frac{\langle v|r_n\rangle}{n} \leq \mathrm{N}\left(u + \frac{r_n}{n}\right) - \frac{\langle v|r_n\rangle}{n}.$$
Ces deux inégalités fournissent l'encadrement de l'énoncé.

(c) Déduire des deux questions précédentes $\mathrm{N}(x_n) - \langle v|x_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

L'encadrement de la question précédente donne, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les encadrements
$$\langle v|r_n\rangle \leq \mathrm{N}(x_n) - n\underbrace{\mathrm{N}(u)}_{=\langle u|v\rangle} \leq \langle w_n|r_n\rangle \qquad \text{donc} \qquad 0 \leq \mathrm{N}(x_n) - \langle nu + r_n|v\rangle \leq \langle w_n - v|r_n\rangle$$
$$\text{donc} \qquad 0 \leq \mathrm{N}(x_n) - \langle x_n|v\rangle \leq \|w_n - v\|\,\|r_n\|.$$
grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
Comme $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} v$ et que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée, on obtient $\mathrm{N}(x_n) - \langle x_n|v\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème des gendarmes.

On suppose désormais que $\forall e \in \mathbb{Z}^d, \mathrm{N}(e) \in \mathbb{Z}$, et l'on veut montrer que N est définie par un nombre fini de formes linéaires à coefficients entiers, c'est-à-dire qu'il existe $v_1, \dots, v_r \in \mathbb{Z}^d$ tels que
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \mathrm{N}(x) = \max_{j=1}^{r} \langle v_j|x\rangle.$$

28. Soit $v \in \widehat{\mathrm{B}}$, exposé par $u \in \mathbb{R}^d$.
On fixe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^d$ telle que $(x_n - nu)_{n\in\mathbb{N}^*}$ soit bornée.

(a) Montrer que, pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$, on a $\langle v|x_n + e\rangle = k_n + o(1)$, pour une certaine suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers relatifs.

La question précédente montre que, pour toute suite de la forme $nu + \mathrm{O}(1)$, c'est-à-dire pour toute suite de la forme $(x_n) = (nu + r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ avec $(r_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ bornée, on a $\mathrm{N}(x_n) = \langle v|x_n\rangle + o(1)$.
Pour tout $e \in \mathbb{Z}^d$, la suite $(x_n + e)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est elle aussi de la forme $nu + \mathrm{O}(1)$, donc on a $\langle v|x_n + e\rangle = \mathrm{N}(x_n + e) + o(1)$. Comme, par hypothèse, $(\mathrm{N}(x_n + e))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$, cela conclut.

(b) En déduire $v \in \mathbb{Z}^d$.

Soit $e \in \mathbb{R}^d$. D'après la question précédente, appliquée à 0 et à e, on a deux suites $(k_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'entiers relatifs telles que

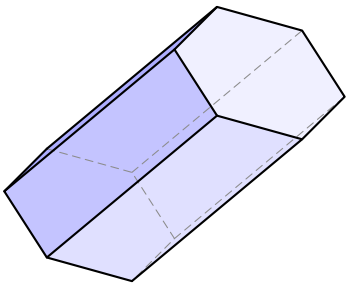
$$\langle v|x_n + e\rangle = k_n + o(1) \qquad et \qquad \langle v|x_n\rangle = \ell_n + o(1).$$

Par différence, $\langle v|e\rangle = k_n - \ell_n + o(1)$, c'est-à-dire $\underbrace{k_n - \ell_n}_{\in\mathbb{Z}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle v|e\rangle$.

Comme l'ensemble $\mathbb{Z}$ est fermé dans $\mathbb{R}$ (par exemple parce que $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}]n, n+1[$ est ouvert en tant qu'union d'ouverts), on en déduit $\langle v|e\rangle \in \mathbb{Z}$.
En appliquant cette propriété pour tous les vecteurs de la base canonique, on en déduit $v \in \mathbb{Z}^d$.

29. Conclure.

La question précédente a montré $\widehat{\mathrm{B}} \subseteq \mathbb{Z}^d$. Mais $\widehat{\mathrm{B}}$ est inclus dans le compact B^*, donc il est borné. On en déduit que $\widehat{\mathrm{B}}$ est fini (une partie bornée de $\mathbb{Z}^d$ est incluse dans un cube $[\![-\mathrm{N}, \mathrm{N}]\!]^d$, donc possède au plus $(2\mathrm{N}+1)^d$ éléments). On peut donc noter $\widehat{\mathrm{B}} = \{v_1, \dots, v_r\}$.
La partie IV montre alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{N}(x) = \sup\left\{\langle x|v\rangle \,\middle|\, v \in \widehat{\mathrm{B}}\right\} = \max\left\{\langle x|v_j\rangle \,\middle|\, j \in [\![1, r]\!]\right\}$.
Géométriquement, $\mathrm{B} = \bigcap_{j=1}^{r} \left\{x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \langle x|v_j\rangle \le 1\right\}$ est une intersection d'un nombre fini de demi-espaces.



$$\begin{cases} x - z \le 1, \\ -x + z \le 1, \\ y \le 1, \\ -y \le 1, \\ x + y - z \le 1, \\ -x - y + z \le 1, \\ z \le 1, \\ -z \le 1. \end{cases}$$

Un polyèdre défini par des inéquations linéaires à coefficients entiers.

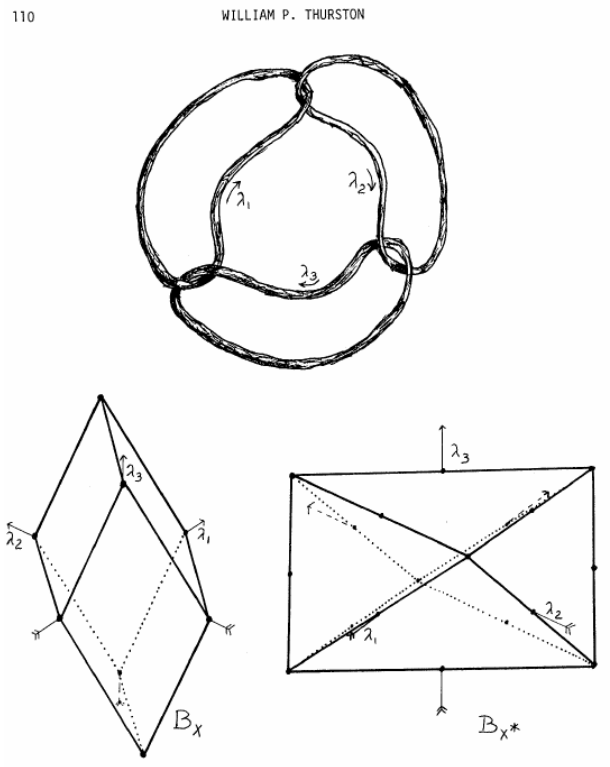


Figure 4
A 3-link chain.
B_X is a parallelepiped obtained by adding 2 tetrahedra to an octahedron (whose 1-skeleton is shown: it lies on ∂B_X).
B_{X^*} is an octahedron obtained by removing two opposite corners of a cube.

Un dessin tiré de l'article original : W. P. Thurston, A norm for the homology of 3-manifolds, *Mem. Am. Math. Soc.* ***339*** *(1986), p. 99-130.*