

Fonction zêta : prolongements et moments

Les notations suivantes seront utilisées dans tout le devoir.

- ▶ Étant donné un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, on notera D_a l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ré} z > a\}$.
- ▶ Étant donné un nombre réel $x > 0$ et un nombre complexe z , on notera $x^z = \exp(z \ln(x))$.

Partie I. Généralités et un premier prolongement

1. Soit $s \in D_1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolument.
2. Soit $s \in D_0$. On note $\sigma = \operatorname{Ré}(s)$.
 - (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \left| \frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \right| \leq \frac{C}{k^{\sigma+1}}$.
 - (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge.

D'après les questions précédentes, les fonctions suivantes (fonction *zêta* de Riemann et fonction *êta* de Dirichlet) sont donc bien définies :

$$\zeta : \begin{cases} D_1 \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta : \begin{cases} D_0 \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \end{cases}.$$

3. Montrer que $\forall s \in D_1, \eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$.
4. Résoudre l'équation $2^{1-s} = 1$, d'inconnue $s \in \mathbb{C}$.

En notant $D_0^\# = \{s \in D_0 \mid 2^{1-s} \neq 1\}$, on obtient donc un premier prolongement de la fonction ζ à $D_0^\#$ en considérant la fonction $s \mapsto \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$.

On remarquera que $\zeta(s)$ (resp. $\eta(s)$) est un nombre réel dès que $s \in]1, +\infty[$ (resp. $s \in]0, +\infty[$).

Les dernières questions de cette partie étudient les fonctions réelles ainsi définies.

5. Montrer que la restriction de ζ à $]1, +\infty[$ est décroissante.
6. Soit $s \in]1, +\infty[$.
 - (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ converge et déterminer sa valeur.
 - (b) En déduire l'encadrement $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.
7. Déterminer les limites en 1^+ et en $+\infty$ de la fonction ζ et la limite en $+\infty$ de la fonction η .
8. Soit $s \in]0, +\infty[$.
 - (a) Montrer l'encadrement $s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{s+1}} \leq \eta(s) \leq s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^{s+1}}$.
 - (b) En utilisant la question 6.b, en déduire $\eta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$.

Partie II. Un meilleur prolongement

On va dans cette partie prolonger la fonction ζ au domaine $D_0 \setminus \{1\}$.

On fixe dans toute la partie $s \in D_0 \setminus \{1\}$, et on note $\sigma = \text{Ré } s$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer $Z_{n+1}(s) - Z_n(s) = s \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{t^{1+s}} dt$.

(b) En déduire $|Z_{n+1}(s) - Z_n(s)| \leq \frac{|s|}{2n^{\sigma+1}}$.

10. Montrer que la suite $(Z_n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre complexe, que l'on notera $Z(s)$.

11. Montrer que $\forall s \in D_1, Z(s) = \zeta(s)$.

12. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la différence $Z_{2n}(s) - 2^{1-s} Z_n(s)$. Qu'en déduit-on ?

Dans toute la suite du problème, on utilisera ce prolongement de la fonction zêta, que l'on continuera à noter ζ . Autrement dit, la fonction ζ est maintenant définie par

$$\zeta : \begin{cases} D_0 \setminus \{1\} \rightarrow \\ s \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \right), \end{cases} \mathbb{C}$$

et l'on sait que $\forall s \in D_1, \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

Partie III. Une comparaison série-intégrale oscillante

Dans le début de cette section, on démontre un résultat de comparaison série-intégrale assez subtil.

Lemme de comparaison. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $1 \leq a < b$ entiers naturels, et toute fonction $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ concave vérifiant $|f'| \leq 1$, on ait

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| \leq C.$$

13. Soit $h : \begin{cases} [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \\ x \mapsto \frac{1}{e^{ix} - 1} - \frac{1}{ix}. \end{cases} \mathbb{C}$

(a) Déterminer $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = -\frac{1}{2} + i\theta x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

(b) Montrer que la fonction h se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[-1, 1]$, à valeurs complexes, que l'on notera encore h .

Jusqu'à la question 17., on fixe une fonction $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ concave telle que $|f'| \leq 1$.

14. Soit $k \in \llbracket a, b-1 \rrbracket$. On note $g : [k, k+1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine coïncidant avec f en k et en $k+1$.
On note également $\alpha_k = f(k+1) - f(k)$.

(a) Montrer $\alpha_k \in [-1, 1]$.

(b) Montrer $\forall t \in [k, k+1], g(t) \leq f(t) \leq g(t) + (f'(k) - \alpha_k)(t - k)$.

(c) En déduire $\left| \int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{f'(k) - \alpha_k}{2} \leq \frac{f'(k) - f'(k+1)}{2}$.

(d) Montrer $\int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt = e^{if(k)} - h(\alpha_k)(e^{if(k+1)} - e^{if(k)})$.

15. Dédurre de la question précédente

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| \leq \frac{f'(a) - f'(b)}{2} + \left| \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k)(e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right|.$$

16. Déterminer une constante $\tilde{C} \geq 0$ (indépendante de f , de a et de b) telle que

$$\left| \sum_{k=a+1}^{b-1} (h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k))e^{if(k)} \right| \leq \tilde{C}.$$

17. Conclure la démonstration du lemme de comparaison.

Dans la suite, on fixe une constante C vérifiant la conclusion du lemme de comparaison.

18. Soit $1 \leq a < b$ deux entiers et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq a$. Montrer

$$\left| \sum_{k=a}^{b-1} k^{-i\rho} - \int_a^b t^{-i\rho} dt \right| \leq C.$$

Cette question entraîne le résultat suivant, que l'on pourra utiliser librement dans la fin de cette partie.

Théorème (admis). Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $s = \sigma + i\rho \in D_0 \setminus \{1\}$ tel que $|\rho| \leq a$. Alors

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s} + \frac{a^{1-s}}{1-s} \right| \leq \frac{C+1}{a^\sigma}.$$

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq n$, on a

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\rho\right) - \sum_{k=1}^n k^{-1/2-i\rho} \right| \leq \frac{C+1}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1/4 + \rho^2}}.$$

20. En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq n$,

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\rho\right) - \sum_{k=1}^n k^{-1/2-i\rho} \right| \leq \frac{K\sqrt{n}}{1 + |\rho|}.$$

Partie IV. Deuxième moment de ζ sur la droite critique

À l'exception de la toute dernière question, qui utilise la question 20., cette partie est indépendante des précédentes.

Dans toute cette partie, n désigne un entier au moins égal à 2.

21. On note $A_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ k/2 < j < k}} \frac{1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$

(a) Quel est, pour $x > 0$, le signe de $\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$?

(b) Montrer $A_n \leq \sqrt{2} \sum_{1 \leq h \leq k \leq n} \frac{1}{h}.$

(c) En déduire $A_n = O(n \ln(n)).$

22. On note $B_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$

(a) Montrer $B_n \leq \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2.$

(b) En déduire $B_n = O(n).$

23. (a) Montrer $\int_0^n \left| \sum_{k=1}^n k^{-1/2-it} \right|^2 dt = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + i \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} \frac{(k/j)^{-in} - 1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$

(b) En déduire $\int_0^n \left| \sum_{k=1}^n k^{-1/2-it} \right|^2 dt = O(n \ln(n)).$

24. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $T \geq 0$, $\int_0^T \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right) \right|^2 dt \leq C T \ln(T+2).$

(On admettra que la fonction $t \mapsto \zeta \left(\frac{1}{2} + it \right)$ est continue, et donc que l'intégrale a un sens.)