

Fonction zêta : prolongements et moments

Les notations suivantes seront utilisées dans tout le devoir.

- ▶ Étant donné un nombre réel $a \in \mathbb{R}$, on notera D_a l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Ré} z > a\}$.
- ▶ Étant donné un nombre réel $x > 0$ et un nombre complexe z , on notera $x^z = \exp(z \ln(x))$.

Partie I. Généralités et un premier prolongement

1. Soit $s \in D_1$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolument.

Notons $\sigma = \operatorname{Ré}(s) \in]1, +\infty[$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\left| \frac{1}{n^s} \right| = |\exp(-s \ln(n))| = \exp(-\sigma \ln(n)) = \frac{1}{n^\sigma}$.

Par comparaison à la série de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\sigma}$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$ converge absolument.

2. Soit $s \in D_0$. On note $\sigma = \operatorname{Ré}(s)$.

- (a) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\left| \frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \right| \leq \frac{C}{k^{\sigma+1}}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^s}$ est dérivable (à valeurs complexes) sur $[2k-1, 2k]$.

Pour $t \in [2k-1, 2k]$, sa dérivée vérifie

$$f'(t) = -\frac{s}{t^{s+1}} \quad \text{donc} \quad |f'(t)| = \frac{|s|}{t^{\sigma+1}} \leq \frac{|s|}{(2k-1)^{\sigma+1}} \leq \frac{|s|}{k^{\sigma+1}},$$

en utilisant la décroissance de $k \mapsto k^{-(\sigma+1)}$ et l'inégalité $2k-1 \geq k$.

D'après l'inégalité des accroissements finis (version complexe), la fonction f est donc $\frac{|s|}{k^{\sigma+1}}$ -lipschitzienne sur $[2k-1, 2k]$, et on a donc

$$\left| \frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \right| = |f(2k-1) - f(2k)| \leq \frac{|s|}{k^{\sigma+1}} |(2k-1) - 2k| = \frac{|s|}{k^{\sigma+1}},$$

ce qui fournit l'inégalité voulue, avec $C = |s|$.

- (b) En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}$ converge.

Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles de la série.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s} = \sum_{k=1}^n \underbrace{\left(\frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \right)}_{=: v_k}$$

D'après la question précédente, $v_n = O\left(\frac{1}{n^{\sigma+1}}\right)$, donc $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge absolument par comparaison.

On en déduit que la suite $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge, vers une limite que l'on notera ℓ .

Par ailleurs, $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^s} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, car $\sigma > 0$.

On en déduit $S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, ce qui montre la convergence de la série.

D'après les questions précédentes, les fonctions suivantes (fonction zêta de Riemann et fonction êta de Dirichlet) sont donc bien définies :

$$\zeta : \begin{cases} D_1 \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \end{cases} \quad \text{et} \quad \eta : \begin{cases} D_0 \rightarrow \mathbb{C} \\ s \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} \end{cases}.$$

3. Montrer que $\forall s \in D_1, \eta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s)$.

Soit $s \in D_1$. Toutes les séries apparaissant dans le calcul étant absolument convergentes¹, on obtient par sommation par paquets

$$\begin{aligned} \eta(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ impair}}} \frac{1}{n^s} - \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^s} && \text{en ajoutant de part et d'autre } \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \text{ pair}}} \frac{1}{n^s} \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^s} - 2 \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{(2n)^s} \\ &= \zeta(s) - \frac{2}{2^s} \zeta(s) = (1 - 2^{1-s}) \zeta(s). \end{aligned}$$

4. Résoudre l'équation $2^{1-s} = 1$, d'inconnue $s \in \mathbb{C}$.

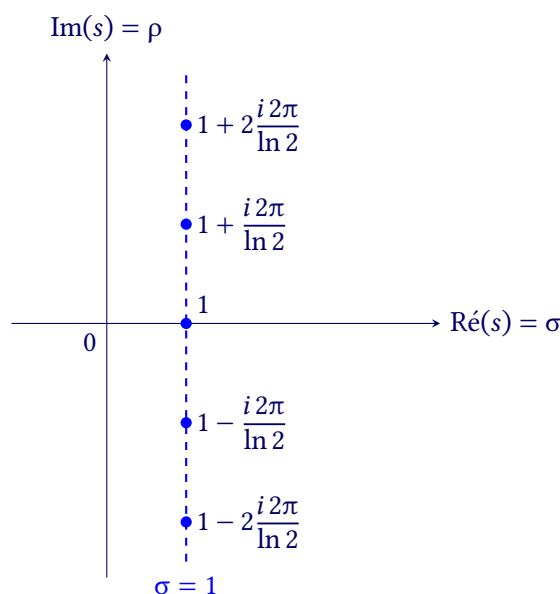
On a la chaîne d'équivalences

$$2^{1-s} = 1 \Leftrightarrow \exp((1-s) \ln(2)) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : (1-s) \ln(2) = i 2\pi k \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : s = 1 - \frac{i 2\pi}{\ln(2)} k.$$

L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{ s \in \mathbb{C} \mid 2^{1-s} = 1 \right\} = \left\{ 1 - \frac{i 2\pi}{\ln(2)} k \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

1. La convergence suffirait en fait, mais la théorie des familles sommables fournissant des notations tellement confortables, je choisis de faire le calcul dans ce cadre.



En notant $D_0^\# = \{s \in D_0 \mid 2^{1-s} \neq 1\}$, on obtient donc un premier prolongement de la fonction ζ à $D_0^\#$ en considérant la fonction $s \mapsto \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$.

On remarquera que $\zeta(s)$ (resp. $\eta(s)$) est un nombre réel dès que $s \in]1, +\infty[$ (resp. $s \in]0, +\infty[$).

Les dernières questions de cette partie étudient les fonctions réelles ainsi définies.

5. Montrer que la restriction de ζ à $]1, +\infty[$ est décroissante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $s \mapsto \frac{1}{n^s} = \exp(-s \ln(n))$, définie sur $]1, +\infty[$ est décroissante.

Soit $s_1 \leq s_2 \in]1, +\infty[$. Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \frac{1}{k^{s_2}} \leq \frac{1}{k^{s_1}}$.

En sommant ces inégalités, on obtient $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{s_2}} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{s_1}}$. Par passage à la limite dans les inégalités larges, on en déduit $\zeta(s_2) \leq \zeta(s_1)$.

6. Soit $s \in]1, +\infty[$.

- (a) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ converge et déterminer sa valeur.

La fonction $f : t \mapsto t^{-s}$ est continue (par morceaux) sur $[1, +\infty[$.

Revenons à la définition pour montrer d'un seul coup la convergence de l'intégrale et calculer sa valeur.

Pour tout $A \geq 1$, on a

$$\int_1^A \frac{dt}{t^s} = \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_{t=1}^A = \underbrace{\frac{A^{1-s}}{1-s}}_{\xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 0} - \frac{1}{1-s} \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{s-1},$$

si bien que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ converge et vaut $\frac{1}{s-1}$.

- (b) En déduire l'encadrement $\frac{1}{s-1} \leq \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, la comparaison série-intégrale, appliquée à la fonction décroissante $f : t \mapsto t^{-s}$, montre

$$\int_1^N \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^s} \leq f(1) + \int_1^N \frac{dt}{t^s}.$$

Tous les termes convergeant, on obtient $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \leq 1 + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^s}$ en faisant tendre N vers $+\infty$, ce qui donne l'encadrement demandé.

7. Déterminer les limites en 1^+ et en $+\infty$ de la fonction ζ et la limite en $+\infty$ de la fonction η .

- La minoration de la question précédente montre déjà $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 1^+} +\infty$.
- Par ailleurs, pour tout $s > 1$, on a la minoration facile $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \geq \frac{1}{1^s} = 1$. Jointe à la majoration $\forall s > 1, \zeta(s) \leq 1 + \frac{1}{s-1}$, elle permet d'obtenir $\zeta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$ par encadrement.
- La formule $\forall s > 1, (1 - 2^{1-s}) \zeta(s) = \eta(s)$ et la convergence $2^{1-s} \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 0$ montrent alors $\eta(s) \xrightarrow{s \rightarrow +\infty} 1$.

8. Soit $s \in]0, +\infty[$.

(a) Montrer l'encadrement $s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^{s+1}} \leq \eta(s) \leq s \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^{s+1}}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f : t \mapsto t^{-s}$ est à valeurs réelles, continue en tout point du segment $[2k-1, 2k]$ et dérivable sur $]2k-1, 2k[$. D'après le théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in]2k-1, 2k[$ tel que $f(2k-1) - f(2k) = -f'(c)$. Autrement dit $\frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} = \frac{s}{c^{s+1}}$.

L'application $t \mapsto \frac{s}{t^{s+1}}$ étant décroissante, on en déduit

$$\frac{s}{(2k)^{s+1}} \leq \frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \leq \frac{s}{(2k-1)^{s+1}}.$$

Pour tout $n \geq 1$, on peut sommer les n premières de ces inégalités et en déduire

$$s \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k)^{s+1}} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(2k-1)^s} - \frac{1}{(2k)^s} \right) \leq s \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)^{s+1}}.$$

Les sommes extrêmes sont les sommes partielles de séries (absolument) convergentes, par comparaison aux séries de Riemann, donc elles convergent. La somme du milieu est une somme partielle de la série convergente définissant η . Toutes ces sommes convergent donc.

En passant à la limite, on obtient donc $s \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^{s+1}} \leq \eta(s) \leq s \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k-1)^{s+1}}$.

(b) En utilisant la question 6.b, en déduire $\eta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$.

Traisons séparément les deux bornes de la question précédente. Soit $s > 0$.

- La borne de gauche est $\frac{s}{2^{s+1}} \zeta(s+1)$; la question 6.b donne $\zeta(s+1) \geq \frac{1}{s}$, si bien que l'on a minoré $\eta(s)$ par $\frac{s}{2^{s+1}} \zeta(s+1) \geq \frac{1}{2^{s+1}}$;
- en écrivant la somme des termes de rang impair comme la différence de la somme totale et de celle des termes de rang pair, la borne de droite est $s \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) \zeta(s+1)$, que la question 6.b nous permet de majorer par

$$s \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right) \left(1 + \frac{1}{s}\right) = (s+1) \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right).$$

Ainsi,

$$\underbrace{\frac{1}{2^{s+1}}}_{\xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 1/2} \leq \eta(s) \leq \underbrace{(s+1) \left(1 - \frac{1}{2^{s+1}}\right)}_{\xrightarrow{s \rightarrow 0^+} 1/2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, $\eta(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}$.

Partie II. Un meilleur prolongement

On va dans cette partie prolonger la fonction ζ au domaine $D_0 \setminus \{1\}$.

On fixe dans toute la partie $s \in D_0 \setminus \{1\}$, et on note $\sigma = \operatorname{Re} s$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $Z_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1}$.

9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Montrer $Z_{n+1}(s) - Z_n(s) = s \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{t^{1+s}} dt$.

Les fonctions $t \mapsto n+1-t$ et $t \mapsto -t^{-s}$ sont de classe C^1 , ce qui permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} s \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{t^{1+s}} dt &= [-(n+1-t)t^{-s}]_{t=n}^{n+1} - \int_n^{n+1} t^{-s} dt \\ &= n^{-s} - \left[\frac{t^{1-s}}{1-s} \right]_{t=n}^{n+1} \\ &= n^{-s} - \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} + \frac{n^{1-s}}{1-s} \\ &= n^{-s} + \frac{(n+1)^{1-s}}{s-1} - \frac{n^{1-s}}{s-1} \\ &= \left(\sum_{k=1}^n k^{-s} + \frac{(n+1)^{1-s}}{s-1} \right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \right) \\ &= Z_{n+1}(s) - Z_n(s). \end{aligned}$$

(b) En déduire $|Z_{n+1}(s) - Z_n(s)| \leq \frac{|s|}{2n^{\sigma+1}}$.

On en déduit,

$$\begin{aligned} |Z_{n+1}(s) - Z_n(s)| &= |s| \left| \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{t^{1+s}} dt \right| \\ &\leq |s| \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{|t^{1+s}|} dt \\ &\stackrel{*}{\leq} \frac{|s|}{n^{1+\sigma}} \int_n^{n+1} (n+1-t) dt \\ &\leq \frac{|s|}{n^{1+\sigma}} \int_0^1 (1-u) du = \frac{|s|}{2n^{1+\sigma}}, \end{aligned}$$

l'inégalité étoilée étant justifiée par le fait que $|t^{1+s}| = t^{1+\sigma} \geq n^{1+\sigma}$.

10. Montrer que la suite $(Z_n(s))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un nombre complexe, que l'on notera $Z(s)$.

Par comparaison à une série de Riemann, la question précédente entraîne que la série télescopique $\sum_{n \geq 1} (Z_{n+1}(s) - Z_n(s))$ converge absolument, ce qui entraîne la convergence de la suite $(Z_n(s))_{n \in \mathbb{N}^}$.*

11. Montrer que $\forall s \in D_1, Z(s) = \zeta(s)$.

Soit $s \in D_1$. On a alors $|n^{1-s}| = n^{1-\sigma} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, si bien que $Z_n(s) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + o(1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \zeta(s)$.

Par unicité de la limite, $Z(s) = \zeta(s)$.

12. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la différence $Z_{2n}(s) - 2^{1-s} Z_n(s)$. Qu'en déduit-on ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}
 Z_{2n}(s) - 2^{1-s} Z_n(s) &= \left(\sum_{k=1}^{2n-1} k^{-s} + \frac{(2n)^{1-s}}{s-1} \right) - 2^{1-s} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \right) \\
 &= \sum_{k=1}^{2n-1} k^{-s} - 2 \sum_{k=1}^{n-1} (2k)^{-s} + \frac{(2n)^{1-s}}{s-1} - \frac{(2n)^{1-s}}{s-1} \\
 &= \sum_{k < 2n} k^{-s} - 2 \sum_{\substack{k < 2n \\ k \text{ pair}}} k^{-s} \\
 &= \sum_{\substack{k < 2n \\ k \text{ impair}}} k^{-s} - \sum_{\substack{k < 2n \\ k \text{ pair}}} k^{-s} \\
 &= \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k^s},
 \end{aligned}$$

qui est une somme partielle de la série définissant $\eta(s)$.

Ainsi, $Z_{2n}(s) - 2^{1-s} Z_n(s) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \eta(s)$.

Par unicité de la limite, si l'on note provisoirement $\tilde{\zeta}(s) = \lim_{n \rightarrow +\infty} Z_n(s)$, on en déduit $(1 - 2^{1-s})\tilde{\zeta}(s) = \eta(s)$,

ce qui entraîne notamment que $\tilde{\zeta}(s) = \frac{\eta(s)}{1 - 2^{1-s}}$ pour tout $s \in D_0^\#$. On en déduit que le prolongement que l'on vient d'effectuer de la fonction zêta est une extension du prolongement de la première partie.

Dans toute la suite du problème, on utilisera ce prolongement de la fonction zêta, que l'on continuera à noter ζ . Autrement dit, la fonction ζ est maintenant définie par

$$\zeta : \begin{cases} D_0 \setminus \{1\} \rightarrow \\ s \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k^{-s} + \frac{n^{1-s}}{s-1} \right), \end{cases} \mathbb{C}$$

et l'on sait que $\forall s \in D_1, \zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$.

Partie III. Une comparaison série-intégrale oscillante

Dans le début de cette section, on démontre un résultat de comparaison série-intégrale assez subtil.

Lemme de comparaison. Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tous $1 \leq a < b$ entiers naturels, et toute fonction $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ concave vérifiant $|f'| \leq 1$, on ait

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| \leq C.$$

13. Soit $h : \begin{cases} [-1, 1] \setminus \{0\} \rightarrow \\ x \mapsto \frac{1}{e^{ix} - 1} - \frac{1}{ix}. \end{cases} \mathbb{C}$

(a) Déterminer $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = -\frac{1}{2} + i\theta x + o_{x \rightarrow 0}(x)$.

C'est un calcul asymptotique sans subtilité.

$$\begin{aligned}
 1e^{ix} - 1 &= \left[ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + o(x^3) \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{ix} \left[1 + \frac{ix}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right]^{-1} \\
 &= \frac{1}{ix} \left[1 - \left(\frac{ix}{2} - \frac{x^2}{6} + o(x^2) \right) + \left(\frac{ix}{2} + o(x) \right)^2 + o(x^2) \right] \\
 &= \frac{1}{ix} \left[1 - \frac{ix}{2} - \frac{x^2}{12} + o(x^2) \right] \\
 &= \frac{1}{ix} - \frac{1}{2} + \frac{ix}{12} + o(x) \\
 \text{donc} \quad h(x) &= -\frac{1}{2} + \frac{ix}{12} + o(x).
 \end{aligned}$$

ce qui est la forme voulue, avec $\theta = \frac{1}{12}$.

(b) Montrer que la fonction h se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[-1, 1]$, à valeurs complexes, que l'on notera encore h .

- ▶ Par opérations, la fonction h est de classe C^1 sur $[-1, 1] \setminus \{0\}$.
- ▶ Le calcul précédent montre que si l'on prolonge h en posant $h(0) = -\frac{1}{2}$, la fonction ainsi créée possède un $DL_1(0)$, et est donc dérivable en 0, de dérivée $h'(0) = \frac{i}{12}$. En particulier, le prolongement h est globalement dérivable.
- ▶ Il reste à vérifier que $h'(x) \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} \frac{i}{12}$ pour s'assurer du caractère C^1 . C'est encore un calcul asymptotique :

$$\begin{aligned}
 h'(x) &= -i \frac{e^{ix}}{(e^{ix} - 1)^2} + \frac{1}{ix^2} \\
 \text{donc} \quad ih'(x) &= \frac{1}{e^{ix} - 2 + e^{-ix}} + \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{1}{2(\cos(x) - 1)} + \frac{1}{x^2} \\
 &= \frac{x^2 + 2(\cos(x) - 1)}{2(\cos(x) - 1)x^2}.
 \end{aligned}$$

Le numérateur est $x^2 + 2(\cos(x) - 1) = x^2 + \left(-x^2 + \frac{x^4}{12} + o(x^4) \right) = \frac{x^4}{12} + o(x^4) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^4}{12}$.

Le dénominateur est $\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^4$.

On en déduit $ih'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{1}{12}$, puis $h'(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{i}{12}$.

Jusqu'à la question 17., on fixe une fonction $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ concave telle que $|f'| \leq 1$.

14. Soit $k \in \llbracket a, b-1 \rrbracket$. On note $g : [k, k+1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction affine coïncidant avec f en k et en $k+1$. On note également $\alpha_k = f(k+1) - f(k)$.

(a) Montrer $\alpha_k \in [-1, 1]$.

Il suffit de remarquer que f est 1-lipschitzienne, d'après l'inégalité des accroissements finis.

(b) Montrer $\forall t \in [k, k+1], g(t) \leq f(t) \leq g(t) + (f'(k) - \alpha_k)(t - k)$.

- ▶ La fonction f étant concave, on a directement $g(t) \leq f(t)$ (par comparaison entre la fonction et sa sécante).

- La fonction f étant de classe C^1 concave, elle est en-dessous de sa tangente en k , c'est-à-dire que l'on a l'inégalité $\forall t \in [a, b], f(t) \leq f(k) + f'(k)(t - k)$. On en déduit

$$\begin{aligned} f(t) - g(t) &\leq (f(k) + f'(k)(t - k)) - (f(k) + \underbrace{(f(k+1) - f(k))}_{=\alpha_k})(t - k) \\ &\leq (f'(k) - \alpha_k)(t - k). \end{aligned}$$

(c) En déduire $\left| \int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{f'(k) - \alpha_k}{2} \leq \frac{f'(k) - f'(k+1)}{2}$.

On utilise l'inégalité triangulaire et la 1-lipschitzianité de $t \mapsto e^{it}$, conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis.

$$\begin{aligned} \left| \int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt \right| &\leq \int_k^{k+1} |e^{if(t)} - e^{ig(t)}| dt \\ &\leq \int_k^{k+1} |f(t) - g(t)| dt \\ &\leq \int_k^{k+1} |f'(k) - \alpha_k|(t - k) dt \quad (\text{ques. préc.}) \\ &\leq |f'(k) - \alpha_k| \underbrace{\int_k^{k+1} (t - k) dt}_{=\int_0^1 u du = 1/2} \\ &\leq \frac{f'(k) - \alpha_k}{2}, \end{aligned}$$

car, d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]k, k+1[$ tel que $\alpha_k = f'(c)$, donc $f'(k) - \alpha_k \geq 0$ par décroissance de f' , c'est-à-dire par concavité de f .

Enfin, la décroissance de f' entraîne $\alpha_k = f'(c) \geq f'(k+1)$, si bien que

$$\left| \int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt \right| \leq \frac{f'(k) - \alpha_k}{2} \leq \frac{f'(k) - f'(k+1)}{2}.$$

(d) Montrer $\int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt = e^{if(k)} - h(\alpha_k)(e^{if(k+1)} - e^{if(k)})$.

Supposons d'abord $\alpha_k \neq 0$. On a alors, en notant que $g(t)$ est affine de coefficient directeur α_k ,

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt &= \left[\frac{1}{i\alpha_k} e^{ig(t)} \right]_{t=k}^{k+1} \\ &= \frac{e^{if(k+1)} - e^{if(k)}}{i\alpha_k} \\ \text{et} \quad e^{if(k)} &= \frac{e^{i\alpha_k} - 1}{e^{i\alpha_k} - 1} e^{if(k)} = \frac{e^{if(k+1)} - e^{if(k)}}{e^{i\alpha_k} - 1}, \end{aligned}$$

donc $\int_k^{k+1} e^{ig(t)} dt - e^{if(k)} = \left(\frac{1}{i\alpha_k} - \frac{1}{e^{i\alpha_k} - 1} \right) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) = -h(\alpha_k)(e^{if(k+1)} - e^{if(k)}),$

ce qui équivaut à la formule demandée.

Si maintenant $\alpha_k = 0$, on a $f(k) = f(k+1)$ donc le membre de droite de l'égalité précédente est nul. Par ailleurs, g est constant dans ce cas, égal à $f(k)$, donc le membre de gauche est également nul. La formule est donc également vraie dans ce cas.

15. Déduire de la question précédente

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| \leq \frac{f'(a) - f'(b)}{2} + \left| \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right|.$$

On réunit les calculs précédents (en notant g_k la fonction qui était notée g précédemment, mais qui dépendait de k et était d'ailleurs définie sur $[k, k+1]$) :

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| &= \left| \sum_{k=a}^{b-1} \left(\int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - e^{if(k)} \right) \right| \\ &= \left| \sum_{k=a}^{b-1} \left(\int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig_k(t)} dt \right) + \sum_{k=a}^{b-1} \left(\int_k^{k+1} e^{ig_k(t)} dt - e^{if(k)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=a}^{b-1} \left| \int_k^{k+1} e^{if(t)} dt - \int_k^{k+1} e^{ig_k(t)} dt \right| + \left| \sum_{k=a}^{b-1} \left(\int_k^{k+1} e^{ig_k(t)} dt - e^{if(k)} \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=a}^{b-1} \frac{f'(k) - f'(k+1)}{2} + \left| \sum_{k=a}^{b-1} -h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right| \\ &\leq \frac{f'(a) - f'(b)}{2} + \left| \sum_{k=a}^{b-1} -h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right|, \end{aligned}$$

en absorbant le signe moins.

16. Déterminer une constante $\tilde{C} \geq 0$ (indépendante de f , de a et de b) telle que

$$\left| \sum_{k=a+1}^{b-1} (h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)) e^{if(k)} \right| \leq \tilde{C}.$$

La fonction h étant de classe C^1 sur un segment, elle est $\|h'\|_\infty$ -lipschitzienne.

On a donc $|h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)| \leq \|h'\|_\infty |\alpha_{k-1} - \alpha_k| = \|h'\|_\infty (\alpha_{k-1} - \alpha_k)$, en utilisant la concavité de f pour en déduire la décroissance de la famille $(\alpha_k)_{k=a}^{b-1} = (f(k+1) - f(k))_{k=a}^{b-1}$.

On majore alors à l'aide de l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=a+1}^{b-1} (h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)) e^{if(k)} \right| &\leq \sum_{k=a+1}^{b-1} |h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)| \underbrace{|e^{if(k)}|}_{\leq 1} \\ &\leq \sum_{k=a+1}^{b-1} (\alpha_{k-1} - \alpha_k) \|h'\|_\infty = (\alpha_a - \alpha_{b-1}) \|h'\|_\infty \leq 2 \|h'\|_\infty, \end{aligned}$$

car tous les α_k appartiennent à $[-1, 1]$. La constante $\tilde{C} = 2\|h'\|_\infty$ convient donc.

17. Conclure la démonstration du lemme de comparaison.

Il reste à faire une transformation d'Abel. On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) &= \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) e^{if(k+1)} - \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) e^{if(k)} \\ &= \underbrace{\sum_{k=a+1}^b h(\alpha_{k-1}) e^{if(k)}}_{\text{telescoping}} - h(\alpha_a) e^{if(a)} \\ &= h(\alpha_{b-1}) e^{if(b)} + \sum_{k=a+1}^{b-1} (h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)) e^{if(k)} - h(\alpha_a) e^{if(a)}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right| &\leq |h(\alpha_{b-1})| + \left| \sum_{k=a+1}^{b-1} (h(\alpha_{k-1}) - h(\alpha_k)) e^{if(k)} \right| + |h(\alpha_a)| \\ &\leq 2\|h\|_\infty + \tilde{C}, \end{aligned}$$

d'après la question précédente.

En revenant à l'estimation précédente,

$$\left| \int_a^b e^{if(t)} dt - \sum_{k=a}^{b-1} e^{if(k)} \right| \leq \frac{f'(a) - f'(b)}{2} + \left| \sum_{k=a}^{b-1} h(\alpha_k) (e^{if(k+1)} - e^{if(k)}) \right|$$

$$\leq 1 + 2\|h\|_\infty + \tilde{C},$$

en utilisant que f' est à valeurs dans $[-1, 1]$.

On a ainsi démontré le lemme de comparaison : $C = 1 + 2\|h\|_\infty + \tilde{C} = 1 + 2\|h\|_\infty + 2\|h'\|_\infty$ convient.

Le corrigé s'arrête pour le moment ici. Il sera fini ce weekend.

Dans la suite, on fixe une constante C vérifiant la conclusion du lemme de comparaison.

18. Soit $1 \leq a < b$ deux entiers et $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq a$. Montrer

$$\left| \sum_{k=a}^{b-1} k^{-i\rho} - \int_a^b t^{-i\rho} dt \right| \leq C.$$

Cette question entraîne le résultat suivant, que l'on pourra utiliser librement dans la fin de cette partie.

Théorème (admis). Soit $a \in \mathbb{N}^*$ et $s = \sigma + i\rho \in D_0 \setminus \{1\}$ tel que $|\rho| \leq a$. Alors

$$\left| \zeta(s) - \sum_{n=1}^{a-1} \frac{1}{n^s} + \frac{a^{1-s}}{1-s} \right| \leq \frac{C+1}{a^\sigma}.$$

19. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq n$, on a

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\rho\right) - \sum_{k=1}^n k^{-1/2-i\rho} \right| \leq \frac{C+1}{\sqrt{n+1}} + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1/4 + \rho^2}}.$$

20. En déduire l'existence d'une constante $K > 0$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $|\rho| \leq n$,

$$\left| \zeta\left(\frac{1}{2} + i\rho\right) - \sum_{k=1}^n k^{-1/2-i\rho} \right| \leq \frac{K\sqrt{n}}{1 + |\rho|}.$$

Partie IV. Deuxième moment de ζ sur la droite critique

Dans toute cette partie, n désigne un entier au moins égal à 2.

21. On note $A_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ k/2 < j < k}} \frac{1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$

(a) Quel est, pour $x > 0$, le signe de $\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$?

(b) Montrer $A_n \leq \sqrt{2} \sum_{1 \leq h \leq k \leq n} \frac{1}{h}.$

(c) En déduire $A_n = O(n \ln(n)).$

22. On note $B_n = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j \in \mathbb{N} \\ 1 \leq j \leq k/2}} \frac{1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$

(a) Montrer $B_n \leq \frac{1}{\ln 2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \right)^2.$

- (b) En déduire $B_n = O(n)$.
23. (a) Montrer $\int_0^n \left| \sum_{k=1}^n k^{-1/2-it} \right|^2 dt = n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + i \sum_{1 \leq j \neq k \leq n} \frac{(k/j)^{-in} - 1}{\sqrt{kj} \ln(k/j)}.$
- (b) En déduire $\int_0^n \left| \sum_{k=1}^n k^{-1/2-it} \right|^2 dt = O(n \ln(n)).$
24. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $T \geq 0$, $\int_0^T \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right) \right|^2 dt \leq C T \ln(T+2).$
- (On admettra que la fonction $t \mapsto \zeta\left(\frac{1}{2} + it\right)$ est continue, et donc que l'intégrale a un sens.)