Exemples de contraintes symplectiques linéaires

D'après Centrale-Supélec MP 2022, Mathématiques 1

Partie I. Préliminaires.

Q1. *Notons* $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, $B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *et* $(E_1, \dots, E_n)$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$.
La colonne AE_j *est la* j*-ème colonne de* A, *et* $E_i^\top AE_j$ *est donc la matrice de taille* 1×1 *dont l'unique coefficient est le* i*-ème coefficient de cette colonne, c'est-à-dire* $a_{i,j}$.
De même $E_i^\top BE_j$ *a pour unique coefficient* $b_{i,j}$.
En appliquant l'hypothèse avec $X = E_i$ *et* $Y = E_j$ *on obtient donc* $a_{i,j} = b_{i,j}$.
Comme cela est vrai pour tous $i, j \in \{1, \dots, n\}$, *on a bien* $\boxed{A = B}$.

Q2. *Question supprimée.*

Partie II. Objets symplectiques.

Sous-partie A. Structure d'espace vectoriel symplectique réel.

Q3. *Soit* ω *une forme symplectique sur* E *et soit* $x \in E$.
Par antisymétrie (appliquée au couple (x, x)*) on a* $\omega(x, x) = -\omega(x, x)$, *c'est-à-dire* $2\omega(x, x) = 0$.
D'où $\boxed{\omega(x, x) = 0}$.

Q4. *Par définition,* $F^\omega \subset E$.

- F^ω ***est non vide***
  Pour tout $y \in F$, *par linéarité de* ω *par rapport à sa première variable,* $\omega(0_E, y) = 0$.
  Donc $0_E \in F^\omega$.
- F^ω ***est stable par combinaison linéaire***
  Soient $x, x' \in F^\omega$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $y \in F$, *par linéarité de* ω *par rapport à sa première variable,*
  $$\omega(x + \lambda x', y) = \omega(x, y) + \lambda\omega(x', y) = 0 + \lambda \times 0 = 0.$$
  Donc $x + \lambda x' \in F^\omega$.

Ainsi $\boxed{F^\omega \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.

Q5. ***Non.*** *Donnons un contre-exemple.*
Prenons $E = \mathbb{R}^2$ *et*
$$\omega : \begin{vmatrix} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix}$$
où l'on a noté $x = (x_1, x_2)$ *et* $y = (y_1, y_2)$.
L'application ω *est bilinéaire et antisymétrique (c'est le déterminant dans la base canonique* (e_1, e_2) *de* $\mathbb{R}^2$*).*
Elle est non dégénérée : si $x \in \mathbb{R}^2$ *vérifie* $\omega(x, y) = 0$ *pour tout* $y \in \mathbb{R}^2$, *alors* $x_1 = \omega(x, e_2) = 0$ *et* $x_2 = -\omega(x, e_1) = 0$, *donc* $x = 0$.
Ainsi $(\mathbb{R}^2, \omega)$ *est un espace symplectique.*
Prenons alors $F = \mathrm{Vect}(e_1)$.
Pour tout $y = \alpha e_1 \in F$ *(avec* $\alpha \in \mathbb{R}$*) on a* $\omega(e_1, y) = \alpha\omega(e_1, e_1) = 0$, *donc* $e_1 \in F^\omega$.
Ainsi $e_1 \in F \cap F^\omega$ *avec* $e_1 \neq 0$: $\boxed{F \text{ et } F^\omega \text{ ne sont pas en somme directe.}}$
Remarque : *plus généralement, dans tout espace symplectique* (E, ω) *non réduit à* $\{0_E\}$, *si* $x \in E$ *est non nul et* $F = \mathrm{Vect}(x)$, *alors* $x \in F \cap F^\omega$ *par la question* ***Q3****. C'est une différence majeure avec l'orthogonal pour un produit scalaire.*

Q6.

- d_ω ***est linéaire***
  Soient $x, x' \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.
  Pour tout $y \in E$, *par linéarité de* ω *par rapport à sa première variable,*
  $$\omega(x + \lambda x', y) = \omega(x, y) + \lambda\omega(x', y),$$
  c'est-à-dire, cela étant vrai pour tout $y \in E$,
  $$d_\omega(x + \lambda x') = d_\omega(x) + \lambda d_\omega(x').$$
- d_ω ***est injective***
  On a
  $$\mathrm{Ker}(d_\omega) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \omega(x, y) = 0\} = \{0_E\}$$
  par non dégénérescence de ω.
- ***Égalité des dimensions***
  Comme E *est de dimension finie,* $\mathscr{L}(E, \mathbb{R})$ *l'est aussi et*
  $$\dim \mathscr{L}(E, \mathbb{R}) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = \dim(E).$$

Ainsi d_ω *est une application linéaire injective entre deux espaces vectoriels de* ***même dimension finie****.*
D'où $\boxed{d_\omega \text{ est un isomorphisme.}}$

Q7. *Soit* $\varphi \in \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R})$.
Comme E *est de dimension finie,* F *admet un supplémentaire* G *dans* E : $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$.
Notons $p \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ *le projecteur sur* F *parallèlement à* G, *vu comme application linéaire de* E *dans* F, *et posons*

$$\ell = \varphi \circ p \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{R}).$$

Pour tout $x \in \mathrm{F}$ *on a* $p(x) = x$ *et donc* $\ell(x) = \varphi(x)$, *c'est-à-dire* $r_{\mathrm{F}}(\ell) = \ell|_{\mathrm{F}} = \varphi$.
Ainsi $\boxed{r_{\mathrm{F}} \text{ est surjective.}}$
Remarque : *« prolonger* φ *par* 0 *sur* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ *» n'a pas de sens :* $\mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ *n'est pas un sous-espace vectoriel, et l'application ainsi obtenue n'est en général pas linéaire. On prolonge* φ *par* 0 *sur un* ***supplémentaire*** G *de* F, *puis par linéarité : c'est exactement* $\varphi \circ p$.

Q8. *L'application* r_{F} *est linéaire, et donc* $r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}))$.

- ***Noyau***
  Soit $x \in \mathrm{E}$. *On a*

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{Ker}(r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega) &\iff \omega(x, \cdot)|_{\mathrm{F}} = 0 \\ &\iff \forall y \in \mathrm{F}, \omega(x, y) = 0 \\ &\iff x \in \mathrm{F}^\omega. \end{aligned}$$

  Ainsi $\boxed{\operatorname{Ker}(r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega) = \mathrm{F}^\omega.}$
- ***Dimension***
  Par les questions ***Q6*** *et* ***Q7****,* $r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega$ *est surjective (comme composée de deux applications surjectives), c'est-à-dire*

$$\operatorname{Im}(r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega) = \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}).$$

  Par le ***théorème du rang*** *appliqué à* $r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega$ *on a donc*

$$\dim \mathrm{E} = \dim \operatorname{Ker}(r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega) + \dim \operatorname{Im}(r_{\mathrm{F}} \circ d_\omega) = \dim \mathrm{F}^\omega + \dim \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathbb{R}) = \dim \mathrm{F}^\omega + \dim \mathrm{F}.$$

  D'où $\boxed{\dim \mathrm{F}^\omega = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}.}$

Q9. *La restriction* ω_{F} *est bilinéaire et antisymétrique sur* F *(car* ω *l'est sur* E*). De plus*

$$\{x \in \mathrm{F} \mid \forall y \in \mathrm{F}, \omega_{\mathrm{F}}(x, y) = 0\} = \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega.$$

On a donc

$$\omega_{\mathrm{F}} \text{ est une forme symplectique sur F} \iff \mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

Il reste à montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega = \{0_{\mathrm{E}}\}$ *si et seulement si* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$.

- ***Sens réciproque***
  Si $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$ *alors en particulier la somme est directe, c'est-à-dire* $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
- ***Sens direct***
  Supposons $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\omega = \{0_{\mathrm{E}}\}$. *Alors* F *et* F^ω *sont en somme directe et, par la question* ***Q8****,*

$$\dim(\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega) = \dim \mathrm{F} + \dim \mathrm{F}^\omega = \dim \mathrm{E}.$$

  Comme $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega$ *est un sous-espace vectoriel de* E *de même dimension finie que* E, *on a* $\mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}$.

On a donc bien

$$\boxed{\omega_{\mathrm{F}} \text{ est une forme symplectique sur F} \iff \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\omega = \mathrm{E}.}$$

Sous-partie B. Structure symplectique standard sur $\mathbb{R}^n$.

Q10. *Soient* $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ *et* $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$ *deux vecteurs de* $\mathbb{R}^n$, *de colonnes de coordonnées* $\mathrm{X} = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ *et* $\mathrm{Y} = (y_1, \ldots, y_n)^\top$.
Par bilinéarité de ω,

$$\omega(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \omega(e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n \Omega_{i,j} y_j \right).$$

Or pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\sum_{j=1}^n \Omega_{i,j} y_j$ *est le* i*-ème coefficient de la colonne* $\Omega\mathrm{Y}$, *et donc*

$$\boxed{\omega(x, y) = \mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y}.}$$

Q11.

- ***Antisymétrie***
  Pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, *par antisymétrie de* ω,

$$\Omega_{j,i} = \omega(e_j, e_i) = -\omega(e_i, e_j) = -\Omega_{i,j}.$$

  Donc $\boxed{\Omega^\top = -\Omega.}$
- ***Inversibilité***
  Soit $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ *tel que* $\Omega\mathrm{Y} = 0$, *et soit* $y \in \mathbb{R}^n$ *le vecteur de colonne de coordonnées* Y.
  Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, *de colonne de coordonnées* X, *par la question* ***Q10*** *et par antisymétrie,*

$$\omega(y, x) = -\omega(x, y) = -\mathrm{X}^\top \Omega \mathrm{Y} = 0.$$

  Par non dégénérescence de ω *on a donc* $y = 0$, *c'est-à-dire* $\mathrm{Y} = 0$.
  Ainsi le noyau de la matrice ***carrée*** Ω *est réduit à* $\{0\}$ *et donc* $\boxed{\Omega \text{ est inversible.}}$

Q12. *Par la question* ***Q11****,* $\Omega^\top = -\Omega$ *et donc, par multilinéarité du déterminant par rapport aux* n *colonnes,*

$$\det(\Omega) = \det\left(\Omega^\top\right) = \det(-\Omega) = (-1)^n \det(\Omega).$$

Comme Ω *est inversible,* $\det(\Omega) \neq 0$ *et donc* $(-1)^n = 1$.
Ainsi $\boxed{n \text{ est pair.}}$

Q13. *Commençons par deux calculs par blocs, qui serviront dans toute la suite :*

$$\boxed{\mathrm{J}^\top = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} = -\mathrm{J} \quad \text{et} \quad \mathrm{J}^2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{I}_m & 0 \\ 0 & -\mathrm{I}_m \end{pmatrix} = -\mathrm{I}_n.}$$

En particulier J *est* ***inversible****, d'inverse* $\mathrm{J}^{-1} = -\mathrm{J} = \mathrm{J}^\top$.

Pour $x, y \in \mathbb{R}^n$, de colonnes de coordonnées X et Y dans la base canonique, on a
$$b_s(x,y) = \langle x, j(y)\rangle = X^\top JY.$$

- ***Bilinéarité***
  Elle découle de la bilinéarité du produit scalaire et de la linéarité de j.
- ***Antisymétrie***
  Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. La matrice $Y^\top JX$ est de taille 1×1 : elle est donc égale à sa transposée, et
  $$b_s(y,x) = Y^\top JX = \left(Y^\top JX\right)^\top = X^\top J^\top Y = -X^\top JY = -b_s(x,y).$$
- ***Non dégénérescence***
  Soit $x \in \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $b_s(x,y) = 0$.
  Comme J est inversible, j est bijectif et on peut prendre $y = j^{-1}(x)$:
  $$0 = b_s\left(x, j^{-1}(x)\right) = \langle x, x\rangle = \|x\|^2$$
  et donc $x = 0$.

Ainsi b_s est une forme symplectique sur $\mathbb{R}^n$.

Sous-partie C. Endomorphismes et matrices symplectiques réels.

Q14. *Supposons $\lambda\mu \neq 1$.*
Soient $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$, c'est-à-dire $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$.
Comme u est symplectique, puis par bilinéarité de ω,
$$\omega(x,y) = \omega(u(x),u(y)) = \omega(\lambda x, \mu y) = \lambda\mu\omega(x,y)$$
c'est-à-dire $(1-\lambda\mu)\omega(x,y) = 0$.
Comme $1-\lambda\mu \neq 0$ on a bien $\omega(x,y) = 0$.

Q15. *Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$, de colonnes de coordonnées X et Y dans la base canonique.*
Les vecteurs $u(x)$ et $u(y)$ ont pour colonnes de coordonnées MX et MY et donc
$$b_s(u(x),u(y)) = (MX)^\top J(MY) = X^\top\left(M^\top JM\right)Y \quad \text{et} \quad b_s(x,y) = X^\top JY.$$
Ainsi
$$u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n) \iff \forall (X,Y) \in \left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right)^2, \quad X^\top\left(M^\top JM\right)Y = X^\top JY.$$

- ***Sens réciproque***
  Si $M^\top JM = J$ alors pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top\left(M^\top JM\right)Y = X^\top JY$.
- ***Sens direct***
  *Si pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top\left(M^\top JM\right)Y = X^\top JY$, alors par la question **Q1** (appliquée aux matrices $M^\top JM$ et J) on a $M^\top JM = J$.*

On a donc bien
$$\boxed{u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n) \iff M^\top JM = J.}$$

Q16. *On rappelle (question **Q13**) que $J^\top = -J$, $J^2 = -I_n$ et que J est inversible d'inverse $J^{-1} = -J$.*

- ***Inclusion*** $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$
  Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. En prenant le déterminant dans l'égalité $M^\top JM = J$ on obtient
  $$\det(M)^2 \det(J) = \det(J)$$
  et comme $\det(J) \neq 0$ (car J est inversible), $\det(M)^2 = 1$.
  En particulier $\det(M) \neq 0$, c'est-à-dire $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
  On retiendra pour la suite que
  $$\boxed{\forall M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}), \quad \det(M) \in \{-1,1\}.}$$
- ***Élément neutre***
  On a $I_n^\top JI_n = J$ donc $I_n \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- ***Stabilité par produit***
  Soient $M, N \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. On a
  $$(MN)^\top J(MN) = N^\top\left(M^\top JM\right)N = N^\top JN = J$$
  et donc $MN \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.
- ***Stabilité par inverse***
  Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. En multipliant l'égalité $M^\top JM = J$ à gauche par $\left(M^\top\right)^{-1} = \left(M^{-1}\right)^\top$ et à droite par M^{-1} on obtient
  $$J = \left(M^{-1}\right)^\top JM^{-1}$$
  et donc $M^{-1} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

- ***Stabilité par transposition***
  Soit $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$. En passant à l'inverse dans l'égalité $M^\top JM = J$ (tous les facteurs sont inversibles) on obtient
  $$M^{-1}J^{-1}\left(M^\top\right)^{-1} = J^{-1}$$
  c'est-à-dire, comme $J^{-1} = -J$,
  $$M^{-1}J\left(M^\top\right)^{-1} = J.$$
  En multipliant à gauche par M et à droite par $M^\top$ on en déduit
  $$J = MJM^\top = \left(M^\top\right)^\top JM^\top$$

et donc $\boxed{M^\top \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$.

- ***Appartenance de*** J
  On a $J^\top JJ = -J^2 J = J$ *et donc* $\boxed{J \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})}$.

Q17. *Par calcul par blocs on a*

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix}$$

puis

$$M^\top JM = \begin{pmatrix} A^\top & C^\top \\ B^\top & D^\top \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C^\top A - A^\top C & C^\top B - A^\top D \\ D^\top A - B^\top C & D^\top B - B^\top D \end{pmatrix}.$$

Par identification des blocs on a donc

$$M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \iff \begin{cases} C^\top A - A^\top C = 0 \\ C^\top B - A^\top D = -I_m \\ D^\top A - B^\top C = I_m \\ D^\top B - B^\top D = 0. \end{cases}$$

Or $\left(A^\top C\right)^\top = C^\top A$ *et* $\left(B^\top D\right)^\top = D^\top B$ *: la première condition signifie que* $A^\top C$ *est symétrique, et la quatrième que* $B^\top D$ *est symétrique.*
De plus la troisième condition s'obtient en transposant la deuxième (et réciproquement) : elles sont donc équivalentes, et toutes deux équivalentes à $A^\top D - C^\top B = I_m$.
On a donc bien, ***par équivalences****,*

$$\boxed{M \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R}) \iff A^\top C \text{ et } B^\top D \text{ sont symétriques} \quad \text{et} \quad A^\top D - C^\top B = I_m.}$$

Partie III. Déterminant d'une matrice symplectique réelle.

Sous-partie A. Le cas de la dimension 2.

Q18. *Ici* $m = 1$. *Soit* $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
On applique la question ***Q17*** *avec les blocs de taille* 1×1 *:* $A = (a)$, $B = (b)$, $C = (c)$ *et* $D = (d)$.
Les matrices $A^\top C = (ac)$ *et* $B^\top D = (bd)$ *sont de taille* 1×1, *donc toujours symétriques, et* $A^\top D - C^\top B = (ad - bc)$. *Ainsi*

$$M \in \mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) \iff ad - bc = 1 \iff \det(M) = 1 \iff M \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Comme cette équivalence est vraie pour toute matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, *on a bien* $\boxed{\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})}$.
Remarque : *on est parti d'une matrice quelconque de* $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ *et on a raisonné par équivalences, ce qui donne bien les deux inclusions.*

Sous-partie B. Commutant de J.

Q19. *Soit* $M \in \mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R})$, *que l'on écrit par blocs* $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ *avec* $A, B, C, D \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$.
On a

$$JM = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C & -D \\ A & B \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad MJ = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & -A \\ D & -C \end{pmatrix}$$

et donc, par identification des blocs,

$$M \in \mathscr{C}_J \iff \begin{cases} -C = B \\ -D = -A \\ A = D \\ B = -C \end{cases} \iff D = A \text{ et } B = -C.$$

- ***Sens direct***
  Si $M \in \mathscr{C}_J$, *alors* $M = \begin{pmatrix} A & -C \\ C & A \end{pmatrix}$ *et le couple* $(U, V) = (A, C)$ *convient.*
- ***Sens réciproque***
  S'il existe $(U, V) \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})^2$ *tel que* $M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$, *alors* $A = D = U$ *et* $B = -V = -C$, *et donc* $M \in \mathscr{C}_J$ *par l'équivalence ci-dessus.*

On a donc bien

$$\boxed{M \in \mathscr{C}_J \iff \exists (U, V) \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_m(\mathbb{R}), \quad M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}.}$$

Q20. *Soit* $M \in \mathscr{C}_J$. *Par la question* ***Q19*** *il existe* $U, V \in \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ *tels que* $M = \begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix}$.
On travaille dans $\mathscr{M}_{2m}(\mathbb{C})$ *et on pose*

$$P = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix}.$$

Les matrices P *et* Q *sont triangulaires inférieures avec des* 1 *sur la diagonale, donc* $\det(P) = \det(Q) = 1$.
Par calcul par blocs on a

$$PM = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ iI_m & I_m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} U & -V \\ V & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & -V \\ iU + V & U - iV \end{pmatrix}$$

puis

$$PMQ = \begin{pmatrix} U & -V \\ iU + V & U - iV \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -iI_m & I_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ iU + V - i(U - iV) & U - iV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U + iV & -V \\ 0 & U - iV \end{pmatrix}.$$

Cette dernière matrice est triangulaire par blocs, et donc

$$\det(M) = \det(P)\det(M)\det(Q) = \det(PMQ) = \det(U + iV)\det(U - iV).$$

Or U *et* V *sont à coefficients* ***réels****, donc* $U - iV = \overline{U + iV}$ *(conjugaison coefficient par coefficient). Comme le déterminant d'une matrice est une expression polynomiale à coefficients entiers en ses coefficients, et que la conjugaison est compatible avec la somme et le produit dans* $\mathbb{C}$*, on a*

$$\det(U - iV) = \det\left(\overline{U + iV}\right) = \overline{\det(U + iV)}.$$

Ainsi

$$\boxed{\det(M) = \det(U + iV)\overline{\det(U + iV)} = |\det(U + iV)|^2 \geq 0.}$$

Sous-partie C. Décomposition polaire d'une matrice symplectique réelle.

Q21. ▸ ***Sous-groupe***

Par la question ***Q16****,* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, et par le cours* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *en est un aussi.*
Leur intersection $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ *est donc un sous-groupe de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$*, inclus dans* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$*.*
Ainsi $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})}$ *est un sous-groupe de* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$*.*

▸ ***Compacité***

Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *est de* ***dimension finie****, il suffit de montrer que* $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$ *est une partie fermée et bornée de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, et l'on peut choisir la norme (elles sont toutes équivalentes).*

- Fermé. *Les applications*

$$f : \left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top J M\end{array}\right. \quad \text{et} \quad g : \left|\begin{array}{ccc}\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M^\top M\end{array}\right.$$

sont continues, car les coefficients de $f(M)$ *et de* $g(M)$ *sont des fonctions polynomiales des coefficients de* M*.*
Les singletons $\{J\}$ *et* $\{I_n\}$ *sont des fermés de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, et donc* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{J\})$ *et* $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = g^{-1}(\{I_n\})$ *sont des fermés de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, comme images réciproques de fermés par des applications continues.*
Ainsi $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est un fermé de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*, comme intersection de deux fermés.*

- Borné. *On munit* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ *de sa norme euclidienne canonique* $N : M \mapsto \sqrt{\mathrm{tr}(M^\top M)} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n M_{i,j}^2}$*.*
Pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *on a* $N(M)^2 = \mathrm{tr}\left(M^\top M\right) = \mathrm{tr}(I_n) = n$*.*
Ainsi $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *est borné, et donc* $\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *aussi.*

On a donc bien $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})}$ *est compact.*

Remarque : *on a montré au passage que* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *est fermé. En revanche* $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *n'est pas compact, car il n'est pas borné : par la question* ***Q17****, pour tout* $t > 0$*,* $\begin{pmatrix} tI_m & 0 \\ 0 & t^{-1}I_m \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$*.*

Q22. *Soit* $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$*.*
Comme $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*,* M *est inversible et* $M^\top = M^{-1}$*. Comme* $M \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ *on a donc*

$$M^{-1}JM = M^\top JM = J$$

et en multipliant à gauche par M *on obtient* $JM = MJ$*, c'est-à-dire* $M \in \mathscr{C}_J$*.*
D'où $\boxed{\mathrm{OSp}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{C}_J}$*.*

Q23. *Soit* $M \in \mathrm{OSp}_n(\mathbb{R})$*.*
Comme $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *on a* $\det(M)^2 = \det\left(M^\top\right)\det(M) = \det\left(M^\top M\right) = \det(I_n) = 1$ *et donc* $\det(M) \in \{-1, 1\}$*.*
Par les questions ***Q22*** *et* ***Q20*** *on a de plus* $\det(M) \geq 0$*.*
D'où $\boxed{\det(M) = 1}$*.*

Q24. *Question supprimée.*

Q25. *Question supprimée.*

Q26. *Question supprimée.*

Sous-partie D. Génération du groupe symplectique par les transvections symplectiques.

III.D.1) Transvection symplectique

Q27. ▸ ***Transvection***

Posons $\ell = \lambda\omega(a, \cdot) = \lambda d_\omega(a) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{R})$*.*
Par la question ***Q3****,* $\ell(a) = \lambda\omega(a, a) = 0$*, c'est-à-dire* $a \in \mathrm{Ker}(\ell)$*.*
De plus $\tau_a^\lambda : x \mapsto x + \ell(x)a$ *est linéaire (car* ℓ *l'est) : c'est un endomorphisme de* E*.*
Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda}$ *est une transvection de* E*.*

▸ ***Endomorphisme symplectique***

Soient $x, y \in E$*. Par bilinéarité de* ω*,*

$$\begin{aligned}\omega\left(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)\right) &= \omega(x + \lambda\omega(a, x)a, y + \lambda\omega(a, y)a) \\ &= \omega(x, y) + \lambda\omega(a, y)\omega(x, a) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, y) + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a) \\ &= \omega(x, y) + \lambda\omega(a, y)(\omega(x, a) + \omega(a, x)) + \lambda^2\omega(a, x)\omega(a, y)\omega(a, a).\end{aligned}$$

Or $\omega(x, a) + \omega(a, x) = 0$ *par antisymétrie et* $\omega(a, a) = 0$ *par la question* ***Q3****. Donc*

$$\omega\left(\tau_a^\lambda(x), \tau_a^\lambda(y)\right) = \omega(x, y).$$

Ainsi $\boxed{\tau_a^\lambda \in \mathrm{Symp}_\omega(E)}$*.*

Q28. *Soit* $x \in E$*.*
Par linéarité de ω *par rapport à sa seconde variable et par la question* ***Q3****,*

$$\omega\left(a, \tau_a^\lambda(x)\right) = \omega(a, x + \lambda\omega(a, x)a) = \omega(a, x) + \lambda\omega(a, x)\omega(a, a) = \omega(a, x).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\tau_a^\mu\big(\tau_a^\lambda(x)\big) &= \tau_a^\lambda(x) + \mu\omega\big(a, \tau_a^\lambda(x)\big)a \\ &= x + \lambda\omega(a,x)a + \mu\omega(a,x)a \\ &= x + (\lambda+\mu)\omega(a,x)a \\ &= \tau_a^{\lambda+\mu}(x).\end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a bien $\boxed{\tau_a^\mu \circ \tau_a^\lambda = \tau_a^{\lambda+\mu}}$.

Q29. *Par la question **Q28** (appliquée avec les réels $\frac{\lambda}{2}$ et $\frac{\lambda}{2}$) on a*

$$\tau_a^\lambda = \tau_a^{\frac{\lambda}{2}} \circ \tau_a^{\frac{\lambda}{2}} \quad \text{et donc} \quad \det\big(\tau_a^\lambda\big) = \det\left(\tau_a^{\frac{\lambda}{2}}\right)^2 \geq 0.$$

*De plus, toujours par la question **Q28**,*

$$\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$$

donc τ_a^λ est inversible et $\det\big(\tau_a^\lambda\big) \neq 0$.
D'où $\boxed{\det\big(\tau_a^\lambda\big) > 0}$.
Remarque : *on a en fait $\det\big(\tau_a^\lambda\big) = 1$. En effet, comme $a \neq 0_\mathrm{E}$, on peut compléter a en une base $(a, b_2, \dots, b_n)$ de E. On a $\tau_a^\lambda(a) = a$ et pour tout $k \in \{2, \dots, n\}$, $\tau_a^\lambda(b_k) = b_k + \lambda\omega(a, b_k)a$: la matrice de τ_a^λ dans cette base est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale.*

Q30. ***Oui.*** *Par la question **Q28** on a*

$$\tau_a^\lambda \circ \tau_a^{-\lambda} = \tau_a^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \tau_a^{-\lambda} \circ \tau_a^\lambda$$

et donc

$$\boxed{\big(\tau_a^\lambda\big)^{-1} = \tau_a^{-\lambda}}$$

qui est bien une transvection symplectique de E.

III.D.2) Un lemme

Q31. *Remarquons d'abord que $y - x \neq 0_\mathrm{E}$ (sinon on aurait $\omega(x,y) = \omega(x,x) = 0$ par la question **Q3**), de sorte que τ_{y-x}^λ est bien définie pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $\omega(y-x, x) = \omega(y,x) - \omega(x,x) = \omega(y,x)$, on a

$$\tau_{y-x}^\lambda(x) = x + \lambda\omega(y-x, x)(y-x) = x + \lambda\omega(y,x)(y-x).$$

Comme $\omega(y,x) = -\omega(x,y) \neq 0$, on peut poser

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\omega(y,x)} = -\frac{1}{\omega(x,y)}}$$

et on a alors $\tau_{y-x}^\lambda(x) = x + (y-x) = y$.

Q32. *Comme $x \neq 0_\mathrm{E}$ et $y \neq 0_\mathrm{E}$, par non dégénérescence de ω il existe $z_1, z_2 \in \mathrm{E}$ tels que*

$$\omega(x, z_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega(y, z_2) \neq 0.$$

Distinguons trois cas.

- *Si $\omega(y, z_1) \neq 0$, alors $z = z_1$ convient.*
- *Si $\omega(x, z_2) \neq 0$, alors $z = z_2$ convient.*
- *Sinon, $\omega(y, z_1) = 0$ et $\omega(x, z_2) = 0$. Posons alors $z = z_1 + z_2$. On a*
$$\omega(x,z) = \omega(x,z_1) + \omega(x,z_2) = \omega(x,z_1) \neq 0 \quad \text{et} \quad \omega(y,z) = \omega(y,z_1) + \omega(y,z_2) = \omega(y,z_2) \neq 0.$$

Dans tous les cas, on a trouvé $z \in \mathrm{E}$ tel que $\boxed{\omega(x,z) \neq 0 \text{ et } \omega(y,z) \neq 0}$.
Remarque : *l'hypothèse $\omega(x,y) = 0$ n'a pas servi. Géométriquement, on a montré que E n'est pas la réunion des deux hyperplans $\mathrm{Ker}(\omega(x,\cdot))$ et $\mathrm{Ker}(\omega(y,\cdot))$.*

Q33.

- ***Premier cas :*** *$\omega(x,y) \neq 0$*
  *Par la question **Q31** il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\gamma = \tau_{y-x}^\lambda$ vérifie $\gamma(x) = y$: une seule transvection symplectique suffit.*
- ***Second cas :*** *$\omega(x,y) = 0$*
  *Par la question **Q32** il existe $z \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(x,z) \neq 0$ et $\omega(y,z) \neq 0$. En particulier $z \neq 0_\mathrm{E}$.*
  *Comme x et z sont non nuls et $\omega(x,z) \neq 0$, la question **Q31** (appliquée au couple (x,z)) fournit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{z-x}^\lambda(x) = z$.*
  *Comme z et y sont non nuls et $\omega(z,y) = -\omega(y,z) \neq 0$, la question **Q31** (appliquée au couple (z,y)) fournit $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\tau_{y-z}^\mu(z) = y$.*
  Alors $\gamma = \tau_{y-z}^\mu \circ \tau_{z-x}^\lambda$ est une composée de deux transvections symplectiques et $\gamma(x) = \tau_{y-z}^\mu(z) = y$.

Dans les deux cas, on a construit une composée γ d'au plus deux transvections symplectiques de E telle que $\boxed{\gamma(x) = y}$, *ce qui démontre le lemme.*

III.D.3) Le théorème

Q34. *Comme $e_1 \neq 0_\mathrm{E}$, par non dégénérescence de ω il existe $y \in \mathrm{E}$ tel que $\omega(e_1, y) \neq 0$.*
Posons

$$f_1 = \frac{1}{\omega(e_1, y)} y.$$

Par linéarité de ω par rapport à sa seconde variable on a $\omega(e_1, f_1) = 1$.
*De plus f_1 n'est pas colinéaire à e_1 : sinon, comme $e_1 \neq 0_\mathrm{E}$, il existerait $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f_1 = \alpha e_1$ et on aurait $\omega(e_1, f_1) = \alpha\omega(e_1, e_1) = 0$ par la question **Q3**, ce qui est exclu.*

Ainsi $\boxed{f_1 \text{ convient.}}$

Q35. *Montrons d'abord que* u ***est injectif***.
Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. *Pour tout* $y \in \mathrm{E}$, *comme* u *est symplectique,*
$$\omega(x, y) = \omega(u(x), u(y)) = \omega(0_{\mathrm{E}}, u(y)) = 0$$
et donc $x = 0_{\mathrm{E}}$ *par non dégénérescence de* ω.
Comme $e_1 \neq 0_{\mathrm{E}}$ *on a donc* $u(e_1) \neq 0_{\mathrm{E}}$.
Les vecteurs $u(e_1)$ *et* e_1 *sont non nuls : par le lemme (question* ***Q33****, appliquée à* $x = u(e_1)$ *et* $y = e_1$*), il existe une composée* δ_1 *d'au plus deux transvections symplectiques de* E *telle que* $\boxed{\delta_1(u(e_1)) = e_1}$.

Q36. ▸ ***Deux remarques préliminaires***
D'une part, une composée d'endomorphismes symplectiques est symplectique : si $v, w \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$, *alors pour tous* $x, y \in \mathrm{E}$, $\omega(v(w(x)), v(w(y))) = \omega(w(x), w(y)) = \omega(x, y)$.
Par la question ***Q27****,* $\delta_1 \circ u$ *est donc symplectique et par conséquent*
$$\omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = \omega(\delta_1(u(e_1)), \delta_1(u(f_1))) = \omega(e_1, f_1) = 1.$$
D'autre part, une transvection symplectique τ_a^λ *telle que* $\omega(a, e_1) = 0$ *fixe* e_1, *puisque* $\tau_a^\lambda(e_1) = e_1 + \lambda\omega(a, e_1)a$.
Enfin f_1 *et* $\tilde{f}_1$ *sont non nuls, puisque* $\omega(e_1, f_1) = \omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = 1$.
On reprend alors la preuve du lemme, en veillant à n'utiliser que de telles transvections.

▸ ***Premier cas :*** $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) \neq 0$
Par la question ***Q31*** *(appliquée au couple* $\left(\tilde{f}_1, f_1\right)$*) il existe* $\lambda \in \mathbb{R}$ *tel que*
$$\tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}\left(\tilde{f}_1\right) = f_1.$$
De plus
$$\omega\left(f_1 - \tilde{f}_1, e_1\right) = \omega(f_1, e_1) - \omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right) = -1 + 1 = 0$$
et donc $\tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}(e_1) = e_1$.
Ainsi $\delta_2 = \tau^\lambda_{f_1 - \tilde{f}_1}$ *convient.*

▸ ***Second cas :*** $\omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) = 0$
On cherche un vecteur intermédiaire z *tel que* $\omega\left(\tilde{f}_1, z\right) \neq 0$ *et* $\omega(z, f_1) \neq 0$ *(pour appliquer deux fois la question* ***Q31****), mais aussi tel que* $\omega(e_1, z) = 1$ *(pour que les deux transvections obtenues fixent* e_1*). Posons*
$$z = \tilde{f}_1 + e_1.$$
On a, par la question ***Q3*** *et les égalités* $\omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = \omega(e_1, f_1) = 1$,
$$\omega\left(\tilde{f}_1, z\right) = \omega\left(\tilde{f}_1, e_1\right) = -1, \quad \omega(z, f_1) = \omega\left(\tilde{f}_1, f_1\right) + \omega(e_1, f_1) = 1 \quad \text{et} \quad \omega(e_1, z) = \omega\left(e_1, \tilde{f}_1\right) = 1.$$
En particulier $z \neq 0_{\mathrm{E}}$.
Par la question ***Q31*** *(appliquée au couple* $\left(\tilde{f}_1, z\right)$ *puis au couple* (z, f_1)*) il existe* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *tels que*
$$\tau^\lambda_{z - \tilde{f}_1}\left(\tilde{f}_1\right) = z \quad \text{et} \quad \tau^\mu_{f_1 - z}(z) = f_1.$$
De plus
$$\omega\left(z - \tilde{f}_1, e_1\right) = \omega(e_1, e_1) = 0 \quad \text{et} \quad \omega(f_1 - z, e_1) = \omega(f_1, e_1) - \omega(z, e_1) = -1 + 1 = 0$$
et donc ces deux transvections fixent e_1.
Ainsi $\delta_2 = \tau^\mu_{f_1 - z} \circ \tau^\lambda_{z - \tilde{f}_1}$ *convient :* $\delta_2(e_1) = e_1$ *et* $\delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = \tau^\mu_{f_1 - z}(z) = f_1$.

Dans les deux cas, on a construit une composée δ_2 *d'au plus deux transvections symplectiques de* E *telle que*
$$\boxed{\delta_2(e_1) = e_1 \quad \text{et} \quad \delta_2\left(\tilde{f}_1\right) = f_1.}$$

Q37. *Par les conditions (III.1) on a* $v(e_1) = e_1$ *et* $v(f_1) = f_1$.
Par linéarité de v, *pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,
$$v(\alpha e_1 + \beta f_1) = \alpha e_1 + \beta f_1.$$
Ainsi pour tout $x \in \mathrm{P} = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$ *on a* $v(x) = x \in \mathrm{P}$, *c'est-à-dire* $\boxed{\mathrm{P} \text{ est stable par } v \text{ et } v_{\mathrm{P}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{P}}}$.

Q38. *L'endomorphisme* $v = \delta \circ u$ *est symplectique, comme composée d'endomorphismes symplectiques (questions* ***Q27*** *et* ***Q36****).*
Soit $x \in \mathrm{P}^\omega$.
Soit $y \in \mathrm{P}$. *Par la question* ***Q37****,* $v(y) = y$ *et donc, comme* v *est symplectique,*
$$\omega(v(x), y) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x, y) = 0.$$
Comme cela est vrai pour tout $y \in \mathrm{P}$, *on a* $v(x) \in \mathrm{P}^\omega$.
Ainsi $\boxed{\mathrm{P}^\omega \text{ est stable par } v.}$

Q39. ▸ ***On a*** $\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega$
Soit $x \in \mathrm{P} \cap \mathrm{P}^\omega$. *Il existe* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *tels que* $x = \alpha e_1 + \beta f_1$ *et, comme* $x \in \mathrm{P}^\omega$,
$$0 = \omega(x, f_1) = \alpha\omega(e_1, f_1) + \beta\omega(f_1, f_1) = \alpha \quad \text{et} \quad 0 = \omega(x, e_1) = \alpha\omega(e_1, e_1) + \beta\omega(f_1, e_1) = -\beta.$$
Donc $x = 0_{\mathrm{E}}$, *c'est-à-dire* $\mathrm{P} \cap \mathrm{P}^\omega = \{0_{\mathrm{E}}\}$.
Comme à la question ***Q9*** *(égalité des dimensions donnée par la question* ***Q8****), on en déduit que*
$$\boxed{\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega.}$$

▸ $\omega_{\mathrm{P}^\omega}$ ***est une forme symplectique sur*** P^ω
Elle est bilinéaire et antisymétrique car ω *l'est.*
Soit $x \in \mathrm{P}^\omega$ *tel que pour tout* $y \in \mathrm{P}^\omega$, $\omega(x, y) = 0$.
Comme $x \in \mathrm{P}^\omega$, *on a aussi* $\omega(x, y) = 0$ *pour tout* $y \in \mathrm{P}$.

Par linéarité de ω par rapport à sa seconde variable, et comme $\mathrm{E} = \mathrm{P} + \mathrm{P}^\omega$, on a donc $\omega(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{E}$, d'où $x = 0_\mathrm{E}$ par non dégénérescence de ω.
Ainsi $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ est un espace symplectique.

- ***v_{P^ω} est symplectique***

*Par la question **Q38**, v_{P^ω} est bien défini, et pour tous $x, y \in \mathrm{P}^\omega$, comme v est symplectique,*

$$\omega_{\mathrm{P}^\omega}(v_{\mathrm{P}^\omega}(x), v_{\mathrm{P}^\omega}(y)) = \omega(v(x), v(y)) = \omega(x,y) = \omega_{\mathrm{P}^\omega}(x,y).$$

Ainsi $v_{\mathrm{P}^\omega} \in \mathrm{Symp}_{\omega_{\mathrm{P}^\omega}}(\mathrm{P}^\omega)$.

Q40. *On convient qu'une composée de zéro transvection est l'identité (on peut aussi remarquer que $\mathrm{Id}_\mathrm{E} = \tau_a^0$ est une transvection symplectique, pour $a \in \mathrm{E} \setminus \{0_\mathrm{E}\}$ quelconque).*
Montrons par récurrence sur $m \in \mathbb{N}^*$ la propriété
$\mathscr{H}_m$: « pour tout espace symplectique (E, ω) de dimension $2m$, tout $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$ est la composée d'au plus $4m$ transvections symplectiques de E ».
*Dans les deux étapes, étant donnés un espace symplectique (E, ω) de dimension $2m$ et $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$, on reprend les notations des questions **Q34** à **Q39** : $e_1 \in \mathrm{E}$ est un vecteur non nul (il en existe car $\dim \mathrm{E} \geq 2$), puis on dispose de f_1, P, δ et $v = \delta \circ u$.*
Écrivons $\delta = \sigma_q \circ \cdots \circ \sigma_1$ avec $q \leq 4$ et $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ des transvections symplectiques de E. Alors

$$\delta^{-1} = \sigma_1^{-1} \circ \cdots \circ \sigma_q^{-1}$$

*est encore une composée de $q \leq 4$ transvections symplectiques de E, par la question **Q30**.*

- ***Initialisation** ($m = 1$)*

La famille (e_1, f_1) est libre dans E de dimension 2 : c'en est une base, et $\mathrm{P} = \mathrm{E}$.
*Par la question **Q37** on a donc $v = v_\mathrm{P} = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, c'est-à-dire $\delta \circ u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, et donc*

$$u = \delta^{-1}$$

est une composée d'au plus $4 = 4m$ transvections symplectiques de E. D'où $\mathscr{H}_1$.

- ***Hérédité***

Soit $m \geq 2$ tel que $\mathscr{H}_{m-1}$ est vraie, et soient (E, ω) un espace symplectique de dimension $2m$ et $u \in \mathrm{Symp}_\omega(\mathrm{E})$.
*Par les questions **Q8** et **Q39**, $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ est un espace symplectique de dimension $2m - 2 = 2(m-1)$ et v_{P^ω} en est un endomorphisme symplectique.*
Par $\mathscr{H}_{m-1}$ il existe donc un entier $p \leq 4(m-1)$, des vecteurs non nuls $a_1, \ldots, a_p \in \mathrm{P}^\omega$ et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$v_{\mathrm{P}^\omega} = \tau'_p \circ \cdots \circ \tau'_1$$

où, pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, τ'_k est la transvection symplectique de $(\mathrm{P}^\omega, \omega_{\mathrm{P}^\omega})$ définie par

$$\forall x \in \mathrm{P}^\omega, \quad \tau'_k(x) = x + \lambda_k \omega(a_k, x) a_k.$$

Pour tout $k \in \{1, \ldots, p\}$, notons $\tau_k = \tau_{a_k}^{\lambda_k}$: c'est une transvection symplectique de E, et

- *pour tout $x \in \mathrm{P}^\omega$, $\tau_k(x) = \tau'_k(x) \in \mathrm{P}^\omega$;*
- *pour tout $x \in \mathrm{P}$, comme $a_k \in \mathrm{P}^\omega$, on a $\omega(a_k, x) = 0$ et donc $\tau_k(x) = x$.*

*Posons $w = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1 \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Par ce qui précède et par la question **Q37** :*

- *pour tout $x \in \mathrm{P}^\omega$, $w(x) = \tau'_p \circ \cdots \circ \tau'_1(x) = v_{\mathrm{P}^\omega}(x) = v(x)$;*
- *pour tout $x \in \mathrm{P}$, $w(x) = x = v(x)$.*

*Les endomorphismes v et w coïncident sur P et sur P^ω. Comme $\mathrm{E} = \mathrm{P} \oplus \mathrm{P}^\omega$ (question **Q39**), ils sont égaux :*

$$\delta \circ u = v = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$$

et donc

$$u = \delta^{-1} \circ \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$$

est une composée d'au plus $4 + 4(m-1) = 4m$ transvections symplectiques de E. D'où $\mathscr{H}_m$.

Par récurrence, $\mathscr{H}_m$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, ce qui démontre le théorème annoncé.

III.D.4) Une conséquence topologique

Q41.

- ***Matrice d'une transvection symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$***

Soient $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, de colonne de coordonnées A dans la base canonique, et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, de colonne de coordonnées X, le réel $b_s(a,x) = \mathrm{A}^\top \mathrm{J} \mathrm{X}$ est une matrice de taille 1×1 et la colonne des coordonnées de $\tau_a^\lambda(x) = x + \lambda b_s(a,x)a$ est donc

$$\mathrm{X} + \lambda \mathrm{A}\big(\mathrm{A}^\top \mathrm{J} \mathrm{X}\big) = \big(\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \mathrm{J}\big)\mathrm{X}.$$

Ainsi la matrice de τ_a^λ dans la base canonique est $\mathrm{I}_n + \lambda \mathrm{A}\mathrm{A}^\top \mathrm{J}$.

- ***Tout élément de $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ est relié à I_n par un chemin continu dans $\mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$***

Soit $\mathrm{M} \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$ et soit u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.
*Par la question **Q15**, $u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n)$ et par le théorème (question **Q40**) il existe $p \in \mathbb{N}$, des vecteurs non nuls $a_1, \ldots, a_p$ de $\mathbb{R}^n$, de colonnes de coordonnées $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p$, et des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que*

$$u = \tau_{a_p}^{\lambda_p} \circ \cdots \circ \tau_{a_1}^{\lambda_1}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mathrm{M} = \big(\mathrm{I}_n + \lambda_p \mathrm{A}_p \mathrm{A}_p^\top \mathrm{J}\big) \cdots \big(\mathrm{I}_n + \lambda_1 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_1^\top \mathrm{J}\big).$$

Posons alors

$$\gamma : \left| \begin{array}{l} [0,1] \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ t \quad \mapsto \big(\mathrm{I}_n + t\lambda_p \mathrm{A}_p \mathrm{A}_p^\top \mathrm{J}\big) \cdots \big(\mathrm{I}_n + t\lambda_1 \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_1^\top \mathrm{J}\big). \end{array} \right.$$

- *Pour tout $t \in [0,1]$, $\gamma(t)$ est la matrice dans la base canonique de $\tau_{a_p}^{t\lambda_p} \circ \cdots \circ \tau_{a_1}^{t\lambda_1}$, qui est un endomorphisme symplectique de $(\mathbb{R}^n, b_s)$ comme composée d'endomorphismes symplectiques. Par la question **Q15** on a donc $\gamma(t) \in \mathrm{Sp}_n(\mathbb{R})$.*
- *L'application γ est continue, car chaque coefficient de $\gamma(t)$ est une fonction polynomiale de t.*

- *On a* $\gamma(0) = I_n$ *et* $\gamma(1) = M$.

Ainsi γ *est un chemin continu dans* $Sp_n(\mathbb{R})$ *reliant* I_n *à* M.

▸ ***Conclusion***

Soient $M, N \in Sp_n(\mathbb{R})$. *Par ce qui précède,* M *et* N *sont tous deux reliés à* I_n *par un chemin continu dans* $Sp_n(\mathbb{R})$. *Comme la relation « être relié par un chemin continu dans* $Sp_n(\mathbb{R})$ *» est une relation d'équivalence (en particulier symétrique et transitive),* M *et* N *sont reliés par un chemin continu dans* $Sp_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{Sp_n(\mathbb{R}) \text{ est connexe par arcs.}}$

III.D.5) Deuxième conséquence

Q42. *Soit* $M \in Sp_n(\mathbb{R})$ *et soit* u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^n$ *canoniquement associé à* M.

Par la question ***Q15****,* $u \in \mathrm{Symp}_{b_s}(\mathbb{R}^n)$ *et par le théorème (question* ***Q40****) il existe* $p \in \mathbb{N}$ *et des transvections symplectiques* $\tau_1, \dots, \tau_p$ *de* $(\mathbb{R}^n, b_s)$ *telles que* $u = \tau_p \circ \cdots \circ \tau_1$.

Par la question ***Q29*** *on a donc (le produit valant* 1 *si* $p = 0$*)*

$$\det(M) = \det(u) = \det(\tau_p) \times \cdots \times \det(\tau_1) > 0.$$

Or on a vu à la question ***Q16*** *que* $\det(M) \in \{-1, 1\}$. *D'où* $\det(M) = 1$, *c'est-à-dire* $M \in SL_n(\mathbb{R})$.

Ainsi $\boxed{Sp_n(\mathbb{R}) \subset SL_n(\mathbb{R}).}$

Remarque : *on peut aussi utiliser la question* ***Q41****. L'application* det *est continue sur* $Sp_n(\mathbb{R})$, *qui est connexe par arcs : son image* $\det(Sp_n(\mathbb{R}))$ *est donc une partie connexe par arcs de* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire un intervalle. Or cet intervalle est inclus dans* $\{-1, 1\}$ *(question* ***Q16****) et contient* $\det(I_n) = 1$ *: c'est* $\{1\}$.

Partie IV. Exemples de problèmes de plongements symplectiques linéaires.

Sous-partie A. Injection par $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ d'une boule dans un cylindre.

Q43. *Soit* $r > 0$.

L'idée est de multiplier par r *les coordonnées numéro* 1 *et* $m+1$, *et de compenser sur une troisième coordonnée pour garder un déterminant égal à* 1. *C'est possible car* $2m \geq 4$ *: la coordonnée numéro* 2 *est distincte des coordonnées numéro* 1 *et* $m+1$.

Soit donc u *l'endomorphisme de* $\mathbb{R}^{2m}$ *dont la matrice dans la base canonique est la matrice diagonale de coefficients diagonaux* r *(en positions* 1 *et* $m+1$*),* $\frac{1}{r^2}$ *(en position* 2*) et* 1 *(ailleurs) :* u *multiplie* x_1 *et* y_1 *par* r, *divise* x_2 *par* r^2 *et laisse les autres coordonnées inchangées. On a*

$$\det(u) = r \times \frac{1}{r^2} \times r = 1, \quad \text{c'est-à-dire} \quad u \in SL(\mathbb{R}^{2m}).$$

Soit $x = (x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m) \in B^{2m}(1)$. *Les coordonnées numéro* 1 *et* $m+1$ *de* $u(x)$ *sont* rx_1 *et* ry_1, *et*

$$(rx_1)^2 + (ry_1)^2 = r^2\left(x_1^2 + y_1^2\right) \leq r^2\|x\|^2 \leq r^2$$

c'est-à-dire $u(x) \in Z^{2m}(r)$.

Ainsi $\boxed{u \in SL(\mathbb{R}^{2m}) \text{ et } u\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r).}$

Sous-partie B. Injection par $u \in SL(\mathbb{R}^{2m})$ d'une boule dans une autre.

Q44. ▸ ***Majoration de*** $\|u(x)\|$

Soit $x \in \mathbb{R}^{2m}$.

Si $x = 0$ *alors* $\|u(x)\| = 0 = r\|x\|$.

Sinon, $\frac{x}{\|x\|}$ *est de norme* 1, *donc appartient à* $B^{2m}(1)$, *et par hypothèse* $u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in B^{2m}(r)$. *Par linéarité de* u *et homogénéité de la norme,*

$$\frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq r.$$

Dans les deux cas $\boxed{\|u(x)\| \leq r\|x\|.}$

▸ ***Majoration de*** $\left\|u^k(x)\right\|$

Soit $x \in \mathbb{R}^{2m}$. *Montrons par récurrence sur* $k \in \mathbb{N}$ *que* $\left\|u^k(x)\right\| \leq r^k\|x\|$.

Pour $k = 0$, $\left\|u^0(x)\right\| = \|x\| = r^0\|x\|$.

Soit $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $\left\|u^k(x)\right\| \leq r^k\|x\|$. *Par le point précédent appliqué au vecteur* $u^k(x)$,

$$\left\|u^{k+1}(x)\right\| = \left\|u\left(u^k(x)\right)\right\| \leq r\left\|u^k(x)\right\| \leq r^{k+1}\|x\|.$$

▸ ***Majoration des coefficients de*** U^k

Soit $k \in \mathbb{N}$. *Notons* $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m})$ *la base canonique de* $\mathbb{R}^{2m}$ *; elle est* ***orthonormée*** *pour le produit scalaire canonique.*

La matrice U^k *est la matrice de* u^k *dans cette base, et donc pour tous* $i, j \in \{1, \dots, 2m\}$, *son coefficient en position* (i, j) *est la* i*-ème coordonnée de* $u^k(\varepsilon_j)$, *c'est-à-dire*

$$\left(U^k\right)_{i,j} = \left\langle \varepsilon_i, u^k(\varepsilon_j)\right\rangle.$$

Par l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz*** *puis le point précédent,*

$$\left|\left(U^k\right)_{i,j}\right| \leq \|\varepsilon_i\|\left\|u^k(\varepsilon_j)\right\| \leq r^k\|\varepsilon_i\|\|\varepsilon_j\| = r^k.$$

Ainsi $\boxed{\text{tous les coefficients de } U^k \text{ sont majorés en valeur absolue par } r^k.}$

Q45. *Supposons par l'absurde que* $r < 1$.

Alors $r^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et, par la question* ***Q44****, chaque coefficient de* U^k *tend vers* 0 *lorsque* $k \to +\infty$. *Comme* $\mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R})$ *est de dimension finie, cela signifie que*

$$U^k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{dans } \mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R}).$$

Le déterminant est continu sur $\mathscr{M}_{2m}(\mathbb{R})$ *(c'est une fonction polynomiale des coefficients), et donc*

$$\det\left(U^k\right) \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \det(0) = 0.$$

Or pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\det\left(U^k\right) = \det(U)^k = 1$ *car* $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$. *C'est absurde.*
D'où $\boxed{1 \leq r.}$

Q46. *Soit* $r > 0$. *Montrons que la condition cherchée est* $r \geq 1$.

- ***Condition nécessaire***
  S'il existe $u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ *tel que* $u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r)$, *alors* $r \geq 1$ *par la question* ***Q45****.*
- ***Condition suffisante***
  Si $r \geq 1$, *alors* $u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}}$ *convient :* $\det(u) = 1$ *et* $u\left(B^{2m}(1)\right) = B^{2m}(1) \subset B^{2m}(r)$.

Ainsi

$$\boxed{\exists u \in \mathrm{SL}\left(\mathbb{R}^{2m}\right), \quad u\left(B^{2m}(1)\right) \subset B^{2m}(r) \quad \Longleftrightarrow \quad r \geq 1.}$$

Sous-partie C. Injection symplectique d'une boule dans un cylindre.

Q47. - ***Calcul de*** $b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)$
  Par la question ***Q16****,* $M^\top \in \mathrm{Sp}_{2m}(\mathbb{R})$ *et donc, par la question* ***Q15****,* $\psi^\top \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$. *On a donc*
  $$b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right) = b_s(e_1, f_1) = \langle e_1, j(f_1)\rangle.$$
  Or f_1 *est le* $(m+1)$*-ème vecteur de la base canonique, donc* $j(f_1)$ *a pour colonne de coordonnées la* $(m+1)$*-ème colonne de* $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{pmatrix}$ *: c'est-à-dire* $j(f_1) = -e_1$. *Ainsi*
  $$b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right) = \langle e_1, -e_1\rangle = -\|e_1\|^2 = -1$$
  et donc $\boxed{\left|b_s\left(\psi^\top(e_1), \psi^\top(f_1)\right)\right| = 1.}$
- ***L'endomorphisme*** j ***conserve la norme***
  Soit $y \in \mathbb{R}^{2m}$, *de colonne de coordonnées* Y. *Comme* $J^\top J = -J^2 = I_{2m}$ *(question* ***Q13****),*
  $$\|j(y)\|^2 = (JY)^\top (JY) = Y^\top J^\top JY = Y^\top Y = \|y\|^2.$$
- ***Minoration des normes***
  Par l'inégalité de ***Cauchy-Schwarz*** *et le point précédent,*
  $$1 = \left|\left\langle \psi^\top(e_1), j\left(\psi^\top(f_1)\right)\right\rangle\right| \leq \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \left\|j\left(\psi^\top(f_1)\right)\right\| = \left\|\psi^\top(e_1)\right\| \left\|\psi^\top(f_1)\right\|.$$
  Si l'on avait $\left\|\psi^\top(e_1)\right\| < 1$ *et* $\left\|\psi^\top(f_1)\right\| < 1$, *le produit de ces deux réels positifs serait strictement inférieur à* 1, *ce qui est exclu.*
  D'où $\boxed{\left\|\psi^\top(e_1)\right\| \geq 1 \text{ ou } \left\|\psi^\top(f_1)\right\| \geq 1.}$

Q48. - ***Coordonnées numéro*** 1 ***et*** $m+1$ ***de*** $\psi(x)$
  Soit $x \in \mathbb{R}^{2m}$. *Notons* X, E_1 *et* F_1 *les colonnes des coordonnées de* x, e_1 *et* f_1 *dans la base canonique.*
  La première coordonnée de $\psi(x)$ *est*
  $$\langle e_1, \psi(x)\rangle = E_1^\top MX = \left(M^\top E_1\right)^\top X = \left\langle \psi^\top(e_1), x\right\rangle$$
  et de même sa $(m+1)$*-ème coordonnée est* $\langle f_1, \psi(x)\rangle = \left\langle \psi^\top(f_1), x\right\rangle$.
  Ainsi, par définition du cylindre,
  $$\psi(x) \in Z^{2m}(r) \quad \Longleftrightarrow \quad \left\langle \psi^\top(e_1), x\right\rangle^2 + \left\langle \psi^\top(f_1), x\right\rangle^2 \leq r^2.$$
- ***Conclusion***
  Par la question ***Q47****, on peut choisir* $g \in \{e_1, f_1\}$ *tel que* $\left\|\psi^\top(g)\right\| \geq 1$.
  Posons
  $$x = \frac{1}{\left\|\psi^\top(g)\right\|} \psi^\top(g).$$
  On a $\|x\| = 1$, *donc* $x \in B^{2m}(1)$ *et par hypothèse* $\psi(x) \in Z^{2m}(r)$. *Par le point précédent, en minorant par* 0 *l'un des deux carrés,*
  $$r^2 \geq \left\langle \psi^\top(g), x\right\rangle^2 = \left(\frac{\left\|\psi^\top(g)\right\|^2}{\left\|\psi^\top(g)\right\|}\right)^2 = \left\|\psi^\top(g)\right\|^2 \geq 1.$$
  Comme $r > 0$ *on a bien* $\boxed{1 \leq r.}$

Q49. *Soient* $R > 0$ *et* $R' > 0$.

- ***Sens réciproque***
  Supposons $R \leq R'$. *L'endomorphisme* $\psi = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{2m}}$ *est symplectique et, pour tout* $x = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m) \in B^{2m}(R)$,
  $$x_1^2 + y_1^2 \leq \|x\|^2 \leq R^2 \leq R'^2$$
  c'est-à-dire $\psi(x) = x \in Z^{2m}(R')$.
- ***Sens direct***
  Supposons qu'il existe $\psi \in \mathrm{Symp}_{b_s}\left(\mathbb{R}^{2m}\right)$ *tel que* $\psi\left(B^{2m}(R)\right) \subset Z^{2m}(R')$, *et posons* $r = \frac{R'}{R} > 0$.
  Soit $x \in B^{2m}(1)$. *Alors* $\|Rx\| = R\|x\| \leq R$, *donc* $Rx \in B^{2m}(R)$ *et*
  $$R\psi(x) = \psi(Rx) \in Z^{2m}(R').$$
  En notant x_1' *et* y_1' *les coordonnées numéro* 1 *et* $m+1$ *de* $\psi(x)$, *on a donc* $(Rx_1')^2 + (Ry_1')^2 \leq R'^2$, *c'est-à-dire* $x_1'^2 + y_1'^2 \leq r^2$.
  Ainsi $\psi\left(B^{2m}(1)\right) \subset Z^{2m}(r)$, *et par la question* ***Q48*** *on a* $1 \leq r$, *c'est-à-dire* $R \leq R'$.

On a donc bien montré le théorème de non-tassement linéaire.