# Décomposition de Fitting et conséquences

Dans tout le devoir, on fixe un corps K et un K-espace vectoriel E de dimension finie.

## A. Décomposition de Fitting

Dans toute cette partie, on fixe un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$.

1. Montrer que la suite $(\ker u^k)_{k\in\mathbb{N}}$ (dite *suite des noyaux itérés*) est croissante pour l'inclusion, c'est-à-dire que $\forall k \in \mathbb{N}, \ker u^k \subseteq \ker u^{k+1}$.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker u^k = \ker u^{k+1}$. Montrer que $\ker u^{k+1} = \ker u^{k+2}$.
3. Déduire de ce qui précède l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que
$$\{0_\mathrm{E}\} = \ker u^0 \subsetneq \ker u^1 \subsetneq \cdots \subsetneq \ker u^p = \ker u^{p+1} = \ker u^{p+2} = \cdots$$
4. Montrer que l'entier $p$ de la question précédente vérifie
$$\mathrm{E} = \operatorname{im} u^0 \supsetneq \operatorname{im} u^1 \supsetneq \cdots \supsetneq \operatorname{im} u^p = \operatorname{im} u^{p+1} = \operatorname{im} u^{p+2} = \cdots$$

Dans toute la suite, on posera
$$\mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u) = \ker u^p \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u) = \operatorname{im} u^p,$$
où $p \in \mathbb{N}$ est l'entier défini dans les questions 3. et 4..

5. **Induit nilpotent.**
   (a) Montrer que $\mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, stable sous $u$, tel que l'endomorphisme $u_{\mathrm{nil}}$ induit par $u$ sur $\mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u)$ est nilpotent.
   (b) Soit N un sous-espace vectoriel de E, stable sous $u$, tel que l'endomorphisme induit par $u$ sur N soit nilpotent. Montrer que $\mathrm{N} \subseteq \mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u)$.
6. **Induit inversible.**
   (a) Montrer que $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E, stable sous $u$, tel que l'endomorphisme $u_{\mathrm{inv}}$ induit par $u$ sur $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u)$ est un automorphisme.
   (b) Soit I un sous-espace vectoriel de E, stable sous $u$, tel que l'endomorphisme induit par $u$ sur I soit un automorphisme. Montrer que $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u)$.
7. Montrer la *décomposition de Fitting* : $\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u) \oplus \mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u)$.
8. **Et en dimension infinie ?** On considère l'endomorphisme de dérivation $\mathrm{D} : \begin{cases} \mathrm{K}[\mathrm{X}] \to \mathrm{K}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'. \end{cases}$
   (a) On suppose K de caractéristique non nulle.
   Trouver deux sous-espaces vectoriels N et I, stables sous D, tels que l'induit de D sur N (resp. sur I) soit nilpotent (resp. un automorphisme) et que $\mathrm{K}[\mathrm{X}] = \mathrm{N} \oplus \mathrm{I}$.
   (b) On suppose K de caractéristique nulle. Montrer qu'il n'existe pas deux tels sous-espaces vectoriels.

## B. Semisimplicité de la valeur propre 0

On fixe encore $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On reprend les notations de la partie précédente, dont l'entier $p \in \mathbb{N}$ défini aux questions 3. et 4..

D'après la construction de la première partie, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $p \leq 1$ ;
(ii) $\ker u = \ker u^2$ ;
(iii) $\mathrm{E}_{\mathrm{nil}}(u) = \ker u$ ;
(iv) $\operatorname{im} u = \operatorname{im} u^2$ ;
(v) $\mathrm{E}_{\mathrm{inv}}(u) = \operatorname{im} u$ ;
(vi) $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$.

On dira que *$u$ possède la propriété $(*)$* pour résumer ces propriétés.

9. Montrer que $u$ possède la propriété $(*)$ si et seulement si $\mathrm{E} = \ker u \oplus \operatorname{im} u$.
10. Montrer que $u$ possède la propriété $(*)$ si et seulement s'il existe une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E, un entier $r \in [\![0, n]\!]$ et une matrice inversible $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_r(\mathrm{K})$ tels que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
11. Montrer que $u$ possède la propriété $(*)$ si et seulement s'il existe $u^{\#} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ tel que $u \circ u^{\#} = u^{\#} \circ u$, $u \circ u^{\#} \circ u = u$ et $u^{\#} \circ u \circ u^{\#} = u^{\#}$.
12. Montrer que $u$ possède la propriété $(*)$ si et seulement s'il existe un polynôme $\mathrm{P} \in \mathrm{K}[\mathrm{X}]$ tel que 0 soit une racine simple de P et $\mathrm{P}(u) = 0$.

## C. Dénombrement sur les corps finis

On suppose dans cette section que K est un corps fini, dont on notera $q$ le cardinal.[1]

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\gamma_n$ le cardinal du groupe fini $\mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ (qui dépend donc de $q$, même si la notation ne le signale pas). Point zérologique : le groupe $\mathrm{GL}_0(\mathrm{K})$ est réduit à la matrice $() = \mathrm{I}_0$, donc $\gamma_0 = 1$.

13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer, sans aucun dénombrement, que $\gamma_n$ divise $\gamma_{n+1}$.
14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit V un K-espace vectoriel de dimension $n$. Montrer que V possède $\gamma_n$ bases.
15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathrm{K})$. On note, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{C}_j(\mathrm{A}) \in \mathrm{K}^n$ la $j$-ième colonne de A. Montrer
$$\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K}) \Leftrightarrow \forall j \in [\![1, n]\!], \mathrm{C}_j(\mathrm{A}) \notin \operatorname{Vect}\big(\mathrm{C}_1(\mathrm{A}), \dots, \mathrm{C}_{j-1}(\mathrm{A})\big),$$
avec la convention $\operatorname{Vect}() = \{0\}$ pour le cas $j = 1$.
16. En déduire $\forall n \geq 1, \gamma_n = q^{n(n-1)/2} \prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)$.

On constate que cette formule reste correcte dans le cas $n = 0$, qui n'a été exclu des questions précédentes que par commodité.

17. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et V un K-espace vectoriel de dimension $n$.
    (a) Soit $\mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_2$ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de V, avec $\dim \mathrm{V}_1 = k$. Combien y a-t-il de bases de V adaptées à la décomposition $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ ?
    (b) En déduire que le nombre de couples $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ de sous-espaces vectoriels supplémentaires de V vérifiant $\dim \mathrm{V}_1 = k$ est $\sigma_{n,k} := \dfrac{\gamma_n}{\gamma_k \gamma_{n-k}}$.

1. Les cardinaux des corps finis sont exactement les nombres de la forme $p^d$, avec $p$ premier et $d \in \mathbb{N}^*$. Mais ce fait n'a pas d'importance ici.

18. Soit $k \in [\![0, n]\!]$ et V un K-espace vectoriel de dimension $n$.

    (a) En adaptant la question précédente, déterminer le nombre $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ de sous-espaces vectoriels de dimension $k$ de V (c'est le *q-analogue du coefficient binomial*).

    (b) Constater que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$. Que penser de l'explication « *le supplémentaire d'un sous-espace vectoriel de dimension $k$ étant de dimension $n-k$, on a $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$ par bijection* » ?

19. Justifier rapidement que le nombre d'endomorphismes nilpotents d'un K-espace vectoriel W de dimension finie ne dépend que de sa dimension (et du cardinal $q$ du corps).

On notera $\nu_k$ le nombre d'endomorphismes nilpotents d'un K-espace vectoriel de dimension $k \in \mathbb{N}$. L'unique endomorphisme de l'espace vectoriel trivial étant l'endomorphisme nul[2], il est nilpotent et on a donc $\nu_0 = 1$.

20. En utilisant la première partie du problème, montrer $\forall n \in \mathbb{N}, q^{n^2} = \sum_{k=0}^{n} \sigma_{n,k}\, \nu_k\, \gamma_{n-k}$.
21. Déterminer $\nu_1$ et utiliser la relation précédente pour en déduire $\nu_2$.
22. Montrer (sans récurrence) que $\forall n \in \mathbb{N}, \nu_n = q^{n(n-1)}$ et en déduire une justification de la phrase « étant donné un espace vectoriel fini V de cardinal N, la probabilité qu'un endomorphisme de V soit nilpotent est exactement $\frac{1}{N}$. »

## D. $\mathscr{A}$-modules indécomposables

Dans cette partie, on considère une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{L}(E)$.

- Un sous-espace vectoriel F de E est dit *$\mathscr{A}$-stable* si $\forall a \in \mathscr{A}, a[F] \subseteq F$.
  Pour gagner du temps, on écrira *$\mathscr{A}$-module* au lieu de *sous-espace vectoriel $\mathscr{A}$-stable*.
- Un $\mathscr{A}$-module non trivial M (c'est-à-dire différent de $\{0\}$) est dit *décomposable* s'il existe deux $\mathscr{A}$-modules non triviaux $F_1$ et $F_2$ tels que $M = F_1 \oplus F_2$. Il est dit *indécomposable* dans le cas contraire.
- Soit F un $\mathscr{A}$-module et $\varphi \in \mathscr{L}(F)$. On dit que $\varphi$ est *$\mathscr{A}$-équivariant* si $\forall x \in F, \forall a \in \mathscr{A}, \varphi\big(a(x)\big) = a\big(\varphi(x)\big)$.
  On note $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(F)$ l'ensemble des endomorphismes $\mathscr{A}$-équivariants de F.

23. Soit F un $\mathscr{A}$-module. Montrer que $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(F)$ est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(F)$.
24. Soit F un $\mathscr{A}$-module et $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(F)$. Montrer que $\ker\varphi$ et $\mathrm{im}\,\varphi$ sont des $\mathscr{A}$-modules.
25. Soit $F_1$ et $F_2$ deux $\mathscr{A}$-modules en somme directe. Montrer que le projecteur $p$ sur $F_1$ parallèlement à $F_2$ (qui est donc un endomorphisme de $F_1 \oplus F_2$) appartient à $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(F_1 \oplus F_2)$.
26. Soit M un $\mathscr{A}$-module non trivial. En utilisant la décomposition de Fitting, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :
    (i) M est indécomposable ;
    (ii) tout élément de $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(M)$ est un automorphisme ou nilpotent ;
    (iii) pour tout $\varphi \in \mathrm{End}_{\mathscr{A}}(M)$, au moins l'une des deux applications $\varphi$ et $\mathrm{id}_M - \varphi$ est un automorphisme.

2. C'est aussi l'endomorphisme identité, et il est donc aussi inversible. L'anneau des endomorphismes de l'espace vectoriel trivial est l'anneau nul, d'où ces bizarreries zérologiques. Elles jouent cependant un rôle qui peut être important dans la théorie, un peu comme l'égalité $0^0 = 1$.