

Utilisation de la topologie pour les EDOs

Merci d'indiquer sur la première page de votre copie le temps passé sur le devoir.

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

- ▶ Une application $\Phi : E \rightarrow E$ est dite **contractante** s'il existe $k \in [0, 1[$ tel que
$$\forall x, y \in E, \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leq k\|x - y\|.$$
- ▶ Étant donnée une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$, on dira que la suite est une **suite de Cauchy** ssi
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|x_p - x_q\| < \varepsilon.$$
- ▶ On dit que l'espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ est **complet** ssi toute suite de Cauchy dans E est convergente.

A. Autour du point fixe de Picard

Q1. Montrer que toute suite convergente est une suite de Cauchy, et que toute suite de Cauchy est une suite bornée.

1. Point fixe de Picard

On fixe dans cette sous-partie une application $\Phi : E \rightarrow E$ contractante.

Q2. Soit une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \Phi(x_n)$$

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Q3. (Théorème du point fixe de Picard)

On suppose que $(E, \|\cdot\|)$ est **complet**.

Alors Φ admet un et unique point fixe.

2. Exemples d'espaces non complets

On cherche dans cette sous-partie à construire des exemples d'espaces non complets, c'est-à-dire de suites de Cauchy qui ne convergent pas.

Q4. On considère la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right).$$

Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie, qu'elle est de Cauchy mais qu'elle n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$ (c'est-à-dire qu'il n'existe pas de $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$).

Les contre-exemples suivants fonctionnent sur le même principe : on construit des suites de Cauchy qui convergeraient si on prenait un « espace plus grand » (complété de l'espace de départ) mais qui ne convergent pas dans l'espace de départ.

Dans les questions **Q5** à **Q7** on pose $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$ muni de $\|\cdot\|_1$.

Q5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la fonction $f_n \in E$, affine par morceaux, nulle sur $[0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}]$, égale à 1 sur $[\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}]$ (cf. schéma en annexe).

Montrer que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy et qu'elle n'est pas convergente.

Dans les questions **Q6** et **Q7** on définit $\Phi : E \rightarrow E$ par

$$\forall y \in E, \Phi(y) : t \mapsto \begin{cases} 1 + t \int_t^1 \frac{y(s)}{s^2} ds & \text{si } t \neq 0 \\ 1 + y(0) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

et on considère une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \Phi(y_n).$$

Q6. Montrer que Φ est bien définie et contractante, et en déduire que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Q7. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

3. Exemples d'espaces complets

Q8. Montrer que pour $E = \mathbb{C}$ muni de $|\cdot|$, toute suite de Cauchy est convergente.

Indication. On pourra utiliser que dans $\mathbb{C}$, toute suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence est convergente.

On cherche dans les questions **Q9** à **Q11** à montrer que $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{C})$, muni de $\|\cdot\|_\infty$, est un espace complet.

On fixe donc une suite de Cauchy $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$.

Q9. Montrer qu'il existe une fonction $y : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ bornée telle que

$$\forall t \in [0, 1], y_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y(t)$$

Q10. Montrer que

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Q11. Montrer que y est continue et conclure.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on notera dans la suite du sujet, pour $y \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

$$\|y\|_{\infty, \lambda} = \sup_{t \geq 0} (|y(t)| e^{\lambda t}) \in [0, +\infty]$$

et

$$E_\lambda = \{y \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}) \mid \|y\|_{\infty, \lambda} < +\infty\}$$

Q12. Montrer, en s'inspirant des questions précédentes, que $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$ est un espace vectoriel normé **complet**.

B. Applications aux équations différentielles

Dans toute cette partie on fixe une fonction continue $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et un point $y_0 \in \mathbb{C}$.

On note (P) le problème de Cauchy

$$(P) : \begin{cases} \forall t \geq 0, y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

On note aussi, pour toute fonction continue $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$,

$$\Phi(y) : t \mapsto y_0 + \int_0^t f(y(s)) ds.$$

1. Cauchy-Lipschitz

Dans cette sous-partie on suppose qu'il existe $L > 0$ tel que f est L -lipschitzienne, c'est-à-dire

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{C}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L |x_1 - x_2|,$$

et on fixe $\lambda < -L$.

Q13. (Lemme intégral de Gronwall)

Soient $z_0 \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Soit $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$z(t) \leq z_0 + \int_0^t \alpha(s) z(s) ds.$$

Montrer que pour tout $t \geq 0$ on a

$$z(t) \leq z_0 e^{\int_0^t \alpha(s) ds}.$$

Q14. Soit $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

Montrer que $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et est solution de (P) **si et seulement si** $y \in E_\lambda$ et $\Phi(y) = y$.

Ainsi par la question **Q14**, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver un point fixe de Φ dans E_λ .

Q15. Montrer que E_λ est stable par Φ et que l'application induite sur E_λ par Φ est contractante pour la norme $\|\cdot\|_{\infty, \lambda}$.

Q16. (Théorème de Cauchy-Lipschitz)

Conclure sur l'existence et l'unicité d'une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ au problème de Cauchy (P).

Q17. ▶ Montrer que pour $f : x \mapsto x^2$ et $y_0 > 0$ il n'y a **pas existence** de solution au problème de Cauchy (P) sur $\mathbb{R}_+$.

▶ Montrer que pour $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $y_0 = 0$ il n'y a **pas unicité** des solutions au problème de Cauchy (P).

Ainsi la question **Q17** montre qu'on ne peut pas se contenter de l'hypothèse de continuité de f pour garantir l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy (P).

2. Module d'uniforme continuité

Pour tout $r \geq 0$ on pose

$$\omega(r) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ |x_1 - x_2| \leq r}} (|f(x_1) - f(x_2)|) \in [0, +\infty]$$

c'est-à-dire le supremum des écarts que peut prendre f entre deux points à distance au plus r .

Q18. Déterminer une CNS sur ω pour que f soit uniformément continue.

On suppose désormais que f est uniformément continue, la fonction ω est alors appelée **module d'uniforme continuité** de f .

Q19. Montrer que ω est :

- croissante,
- sous-additive (c'est-à-dire $\forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+, \omega(r_1 + r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2)$).

Q20. Dédurre de la question **Q19** que ω est à valeurs finies et uniformément continue.

Q21. Dédurre des questions précédentes que

$$\omega(r) = O_{r \rightarrow +\infty}(r).$$

3. Un lemme de Gronwall–Osgood

Dans cette sous-partie on fixe une fonction $\omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue, croissante et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

Q22. Soient $z_0 > 0$ et $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Soit $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$z(t) \leq z_0 + \int_0^t \alpha(s) \omega(z(s)) ds.$$

Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Q23. Soient $z_0 = 0$ et $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$.

Soit $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que, pour tout $t \geq 0$, on ait

$$z(t) \leq 0 + \int_0^t \alpha(s) \omega(z(s)) ds.$$

Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\int_0^{z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Q24. (Lemme d'Osgood)

On suppose de plus que

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty.$$

Soient $\alpha \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ telle que

$$\forall t \geq 0, z(t) \leq \int_0^t \alpha(s) \omega(z(s)) ds.$$

Montrer que $z = 0_{\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+}$.

4. Cauchy–Osgood

Dans cette sous-partie on généralise l'hypothèse de lipschitzianité de $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par l'hypothèse

- ▶ f est uniformément continue et non constante,
- ▶ son module d'uniforme continuité ω vérifie

$$\int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} = +\infty.$$

On remarque que par les questions Q19 et Q20, ω est croissante et continue, comme f n'est pas constante, ω est de plus strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Ainsi ω vérifie les hypothèses de la sous-partie précédente (il n'est pas demandé de le redémontrer).

Q25. (Théorème de Cauchy–Osgood unicité)

Montrer que (P) admet au plus une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

On cherche désormais à prouver l'existence d'une solution. La fonction Φ précédente n'est plus nécessairement contractante, on ne peut donc plus appliquer le théorème du point fixe de Picard.

On va néanmoins considérer la suite itérée qui permettrait de montrer le théorème du point fixe de Picard, et montrer «à la main» qu'il s'agit bien d'une suite de Cauchy dans un espace vectoriel normé bien choisi.

Ainsi on définit la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ par $y_0 = y_0$ (la fonction constante égale à y_0) et

$$\forall n \in \mathbb{N}, y_{n+1} = \Phi(y_n).$$

Par la question Q21 il existe $B > 0$ tel que

$$\forall r \geq 0, \omega(r) \leq B(1+r).$$

On pose $C = |f(y_0)| + B$, puis on définit la suite de fonctions $(M_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ par

$$M_0 : t \mapsto \frac{C}{B}(e^{Bt} - 1) \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, M_{n+1} : t \mapsto \int_0^t \omega(M_n(s)) ds.$$

On remarque que par récurrence immédiate, les M_n sont bien définies, dérivables, positives et nulles en 0 (il n'est pas demandé de le redémontrer).

Q26. Montrer que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, |y_{n+k}(t) - y_n(t)| \leq M_n(t).$$

Indication. On pourra procéder par récurrence sur n et pour l'initialisation $n = 0$, procéder par récurrence sur k .

Q27. Montrer que pour tout $t \geq 0$ la suite $(M_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q28. Soient $T > 0$, $\kappa \geq 0$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions κ -lipschitziennes de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$.

On suppose qu'il existe une fonction $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t \in [0, T], g_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(t).$$

Montrer que g est κ -lipschitzienne et que

$$\sup_{t \in [0, T]} |g_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q29. Montrer que pour tout $T > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T]} (M_n(t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q30. On pose $\lambda = -2B$. Montrer que la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs dans E_λ et est une suite de Cauchy de $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$.

Q31. (Théorème de Cauchy–Osgood existence)

Conclure que le problème de Cauchy (P) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Annexe : figures à découper

Si vous le souhaitez, vous pouvez couper, coller et annoter dans votre copie les figures suivantes.

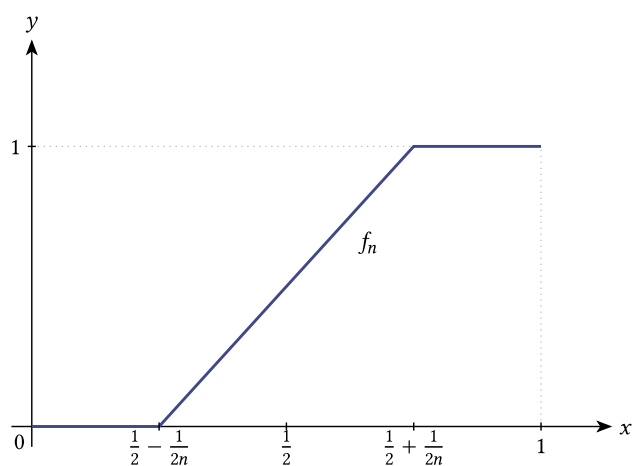


Fig. 1. – Question Q5

