

Utilisation de la topologie pour les EDOs

A. Autour du point fixe de Picard

Q1. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite.

► Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Par conséquent, pour tous $p, q \geq N$ on a

$$\|x_p - x_q\| \leq \|x_p - \ell\| + \|\ell - x_q\| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

► Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Posons $\varepsilon = 12$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\| \leq 12$.

En particulier pour tout $n \geq N$,

$$\|x_n\| \leq \|x_n - x_N\| + \|x_N\| \leq 12 + \|x_N\|.$$

Avec $M = \max(\|x_0\|, \dots, \|x_{N-1}\|, \|x_N\| + 12)$ on a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$.

Et donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée.

1. Point fixe de Picard

Q2. Soit $k \in [0, 1[$ tel que Φ est k -lipschitzienne.

On a, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ (car par récurrence Φ^N est k^N -lipschitzienne pour tout $N \in \mathbb{N}$),

$$\begin{aligned} \|x_{n+m} - x_n\| &= \|\Phi^n(x_m) - \Phi^n(x_0)\| \\ &\leq k^n \|x_m - x_0\| \\ &\leq k^n \left(\sum_{i=0}^{m-1} \|x_{i+1} - x_i\| \right) \\ &= k^n \left(\sum_{i=0}^{m-1} \|\Phi^i(x_1) - \Phi^i(x_0)\| \right) \\ &\leq k^n \left(\sum_{i=0}^{m-1} k^i \|x_1 - x_0\| \right) \\ &\leq k^n \left(\sum_{i=0}^{+\infty} k^i \right) \|x_1 - x_0\| \\ &= k^n \left(\frac{1}{1-k} \right) \|x_1 - x_0\|. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $k \in [0, 1[$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq N$, $k^p \left(\frac{1}{1-k} \right) \|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon$.

Alors pour tous $p, q \geq N$ (quitte à intervertir $p \leq q$)

$$\|x_p - x_q\| = \|x_{p+(q-p)} - x_p\| \leq k^p \left(\frac{1}{1-k} \right) \|x_1 - x_0\| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Q3. Soit $k \in [0, 1[$ tel que Φ est k -lipschitzienne.

► **Unicité**

Soient ℓ_1, ℓ_2 des points fixes.

Alors on a

$$\|\ell_1 - \ell_2\| = \|\Phi(\ell_1) - \Phi(\ell_2)\| \leq k \|\ell_1 - \ell_2\|.$$

Et comme $k \in [0, 1[$, on a $\|\ell_1 - \ell_2\| = 0$, c'est-à-dire $\ell_1 = \ell_2$.

D'où l'unicité.

► **Existence**

Soit $x_0 \in E$ et considérons la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$x_{n+1} = \Phi(x_n).$$

Par la question Q2, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Comme $(E, \|\cdot\|)$ est complet, il existe donc $\ell \in E$ tel que

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell.$$

Comme Φ est **continue** (car lipschitzienne), par passage à la limite de la relation de récurrence on obtient

$$\ell = \Phi(\ell).$$

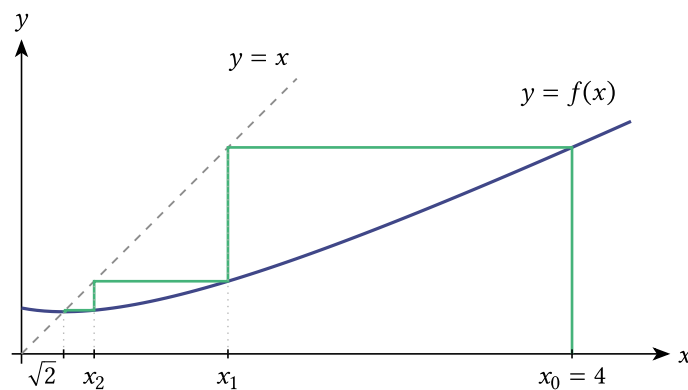
D'où l'existence d'un point fixe.

2. Exemples d'espaces non complets

Q4. Posons

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$



On a f dérivable sur $]0, +\infty[$ de dérivée

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)$$

d'où le tableau de variations

x	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$ $+\infty$
		$\sqrt{2}$	

On observe donc que pour tout $x > 0$, $f(x) \geq \sqrt{2}$ et donc $[\sqrt{2}, +\infty[$ est stable par f .

De plus comme $\mathbb{Q}$ est un sous-corps de $\mathbb{R}$ on a donc $[\sqrt{2}, +\infty[\cap \mathbb{Q}$ stable par f .

D'où, comme 4 appartient à cet ensemble, la bonne définition de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

On a ensuite $f(4) = \frac{9}{4} < 4$ et comme, d'après le tableau de variations, f est croissante sur $[\sqrt{2}, +\infty[$, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Comme elle est minorée par $\sqrt{2}$, elle est convergente dans $\mathbb{R}$ vers une limite $\ell \in [\sqrt{2}, +\infty[$.

Comme f est continue, par passage à la limite de la relation de récurrence on obtient

$$\ell = f(\ell) = \frac{1}{2} \left(\ell + \frac{2}{\ell} \right)$$

c'est-à-dire $\ell^2 = 2$. Comme $\ell \geq \sqrt{2} > 0$, on obtient $\ell = \sqrt{2}$.

Comme elle est convergente dans $\mathbb{R}$, par la question Q1 la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et donc aussi dans $\mathbb{Q}$.

Or $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ (et la convergence dans $\mathbb{Q}$ implique la convergence dans $\mathbb{R}$ vers la même limite) donc la suite

$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas convergente dans $\mathbb{Q}$.

Q5. ► C'est une suite de Cauchy

On pourrait, comme à la question Q4, montrer que la suite est convergente dans un espace vectoriel normé où la norme contrôle la norme $\|\cdot\|_1$ (c'est la méthode la plus rapide).

Ici comme la suite est explicite on va se contenter de calculer les écarts, plus précisément pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$f_n : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \\ nt - \frac{n}{2} + \frac{1}{2} & \text{si } t \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \right] \\ 1 & \text{si } t > \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \end{cases}.$$

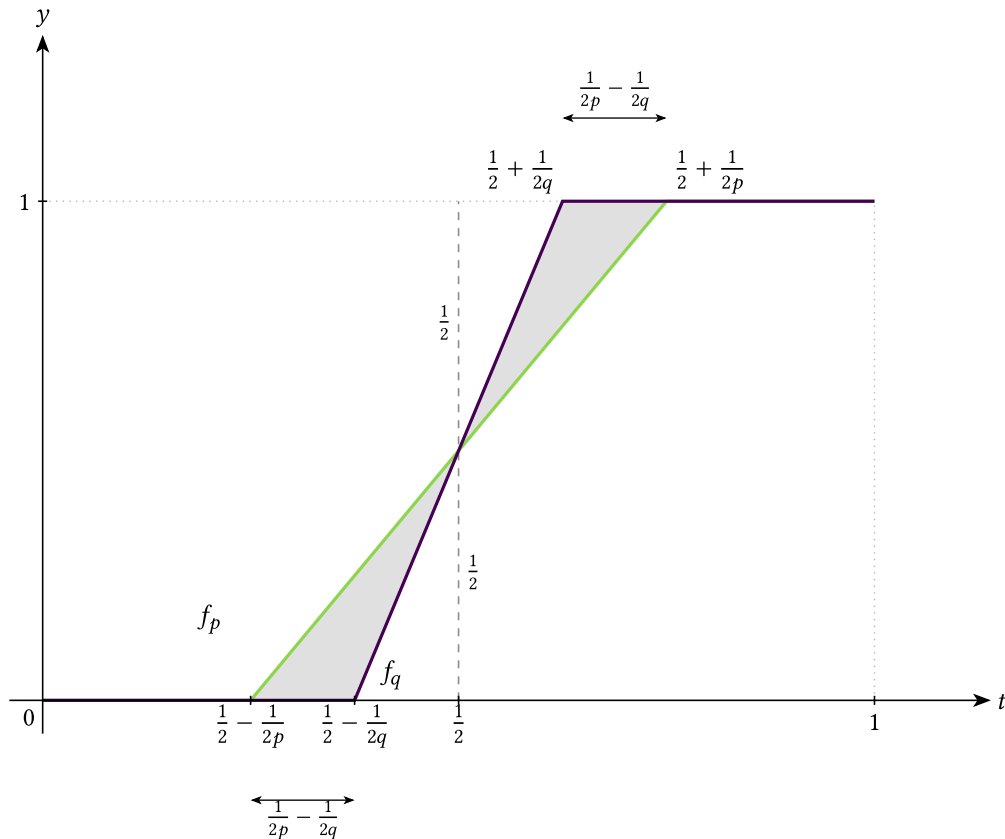
Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $p < q$.

On a

$$\begin{aligned} \|f_p - f_q\|_1 &= \int_0^1 |f_p(t) - f_q(t)| \, dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}} |f_p(t) - f_q(t)| \, dt + \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}} |f_p(t) - f_q(t)| \, dt + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2p}}^1 |f_p(t) - f_q(t)| \, dt \\ &= 0 + 2 \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}^{\frac{1}{2}} (f_p(t) - f_q(t)) \, dt + 0 \\ &= 2 \left(\int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}}^{\frac{1}{2}} f_p(t) \, dt - \int_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2q}}^{\frac{1}{2}} f_q(t) \, dt \right) \\ &= 2 \left(\frac{1}{8p} - \frac{1}{8q} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) \leq \frac{1}{4p}. \end{aligned}$$

En effet f_p et f_q coïncident en dehors de $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} \right]$, la fonction $f_p - f_q$ est impaire par rapport à $\frac{1}{2}$ (car $f_n(1-t) = 1 - f_n(t)$), positive sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \frac{1}{2} \right]$, et f_q est nulle sur $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2p}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2q} \right]$.

On aurait aussi pu voir ce calcul comme l'aire de deux triangles.



Et donc pour $\varepsilon > 0$, avec $N = \left\lceil \frac{1}{4\varepsilon} \right\rceil$, on a bien pour tous $p, q \geq N$, $\|f_p - f_q\|_1 \leq \frac{1}{4 \min(p, q)} \leq \frac{1}{4N} \leq \varepsilon$.

► **Ce n'est pas une suite convergente**

Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $g \in E$ telle que $\|f_n - g\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

g est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$. Soit $a \in [0, \frac{1}{2}]$. Pour $n > \frac{1}{1-2a}$ on a $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} > a$, donc f_n est nulle sur $[0, a]$, et ainsi

$$0 \leq \int_0^a |g(t)| \, dt = \int_0^a |g(t) - f_n(t)| \, dt \leq \|g - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Le membre de gauche ne dépendant pas de n , on a $\int_0^a |g| = 0$. Comme $|g|$ est continue et positive, elle est nulle sur $[0, a]$ (si $a > 0$; le cas $a = 0$ s'en déduit par continuité). Ceci valant pour tout $a \in [0, \frac{1}{2}]$, g est nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$.

g vaut 1 sur $]\frac{1}{2}, 1]$. De même, pour $b \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $n > \frac{1}{2b-1}$, f_n vaut 1 sur $[b, 1]$, d'où

$$0 \leq \int_b^1 |g(t) - 1| dt = \int_b^1 |g(t) - f_n(t)| dt \leq \|g - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et comme ci-dessus $g = 1$ sur $[b, 1]$, donc sur $]\frac{1}{2}, 1]$.

Contradiction. Par continuité de g en $\frac{1}{2}$,

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} g(t) = 0 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} g(t) = 1,$$

ce qui est absurde. Ainsi $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas convergente dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Remarque : la limite « naturelle » est l'indicatrice de $]\frac{1}{2}, 1]$ (cf. la figure des f_n en annexe) ; elle n'est pas continue, et vit dans un espace plus grand que E : le complété de E pour $\|\cdot\|_1$.

Q6. ► Bonne définition

Soit $y \in E$, on cherche à montrer que $\Phi(y)$ est continue.

Par théorème fondamental de l'analyse (et caractère local de la continuité), on a $\Phi(y)$ est dérivable, donc continue, en tout point de $]0, 1]$.

Reste à montrer la continuité en 0.

Constatons tout d'abord que pour tout $t \in]0, 1]$,

$$t \int_t^1 \frac{1}{s^2} ds = t \left[-\frac{1}{s} \right]_t^1 = 1 - t$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} |\Phi(y)(t) - (1 + (1-t)y(0))| &= \left| t \int_t^1 \frac{y(s)}{s^2} ds - (1-t)y(0) \right| \\ &= \left| t \int_t^1 \frac{y(s) - y(0)}{s^2} ds \right| \\ &\leq t \int_t^1 \frac{|y(s) - y(0)|}{s^2} ds. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $\delta \in]0, 1]$ tel que pour tout $s \in [0, \delta]$, $|y(s) - y(0)| \leq \varepsilon$ (continuité de y en 0).

Notons de plus $M = \max_{s \in [0, 1]} |y(s)|$ (y est continue sur le segment $[0, 1]$).

Par conséquent, pour tout $t \in]0, \delta]$, en découpant l'intégrale en δ ,

$$\begin{aligned} |\Phi(y)(t) - (1 + (1-t)y(0))| &\leq t \int_t^\delta \frac{\varepsilon}{s^2} ds + t \int_\delta^1 \frac{2M}{s^2} ds \\ &= \varepsilon \left(1 - \frac{t}{\delta} \right) + 2Mt \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) \\ &\leq \varepsilon + \frac{2M}{\delta} t. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \in]0, \delta]$ tel que $\frac{2M}{\delta} t \leq \varepsilon$, on a

$$|\Phi(y)(t) - (1 + (1-t)y(0))| \leq 2\varepsilon.$$

Et donc (définition de la limite)

$$|\Phi(y)(t) - (1 + (1-t)y(0))| \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$$

d'où

$$\Phi(y)(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 1 + y(0) = \Phi(y)(0)$$

et donc $\Phi(y)$ est continue en 0, et donc $\Phi(y) \in E$.

► Caractère contractant

Comme Φ est affine, en notant

$$\tilde{\Phi} : E \rightarrow E, \quad y \mapsto \Phi(y) - \Phi(0)$$

c'est-à-dire pour tout $y \in E$,

$$\tilde{\Phi}(y) : t \mapsto \begin{cases} t \int_t^1 \frac{y(s)}{s^2} ds & \text{si } t \neq 0, \\ y(0) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

il suffit de montrer qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $y \in E$, $\|\tilde{\Phi}(y)\|_1 \leq k\|y\|_1$.

Soit $y \in E$.

On a

$$\begin{aligned}
\|\tilde{\Phi}(y)\|_1 &= \int_0^1 |\tilde{\Phi}(y)(t)| dt \\
&= \int_0^1 \left| t \int_t^1 \frac{y(s)}{s^2} ds \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(t \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds \right) dt
\end{aligned}$$

et par **intégration par parties** comme

- $t \mapsto \frac{t^2}{2}$ et $t \mapsto \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, 1]$, de dérivées respectives $t \mapsto t$ et $t \mapsto -\frac{|y(t)|}{t^2}$,
 - leur produit $t \mapsto \frac{t^2}{2} \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds$ admet des limites finies aux bornes de $]0, 1]$: il vaut 0 en 1, et tend vers 0 en 0 (c'est $t \mapsto \frac{t}{2}$ multiplié par $\tilde{\Phi}(|y|)$, continue d'après ce qui précède appliqué à $|y| \in E$),
- les intégrales $\int_0^1 t \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds dt$ et $\int_0^1 \frac{t^2}{2} \frac{|y(t)|}{t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 |y(t)| dt$ sont de même nature (ici convergentes) et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(t \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds \right) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \int_t^1 \frac{|y(s)|}{s^2} ds \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^2}{2} \frac{|y(t)|}{t^2} dt \\
&= 0 - 0 + \frac{1}{2} \int_0^1 |y(t)| dt = \frac{1}{2} \|y\|_1.
\end{aligned}$$

D'où $k = \frac{1}{2}$ convient c'est-à-dire Φ est $\frac{1}{2}$ -contractante et donc par la question Q2, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Q7. Supposons par l'absurde que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans E et notons $y \in E$ sa limite.

Par passage à la limite de la relation de récurrence, comme Φ est continue (car $\frac{1}{2}$ -lipschitzienne), on a

$$y = \Phi(y)$$

Et donc en particulier, en évaluant en 0,

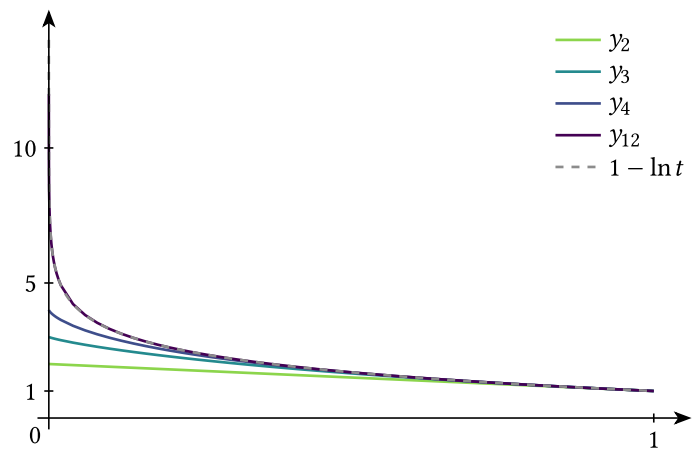
$$y(0) = 1 + y(0)$$

ce qui est absurde. Ainsi $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans E .

Remarque : ici on a bien $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge, mais pas vers une fonction continue. De manière générale, la notion de « valeur en un point » (ici valeur en 0) n'a pas vraiment de sens pour la norme $\|\cdot\|_1$ car l'application $y \mapsto y(0)$ n'est pas continue pour cette norme.

On pourrait voir que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge (dans le « vrai » espace L^1) vers

$$y : t \mapsto 1 - \ln(t)$$



ce qui est logique au regard de la définition de Φ , c'est en effet l'opérateur intégral associé à l'équation différentielle

$$\begin{cases} \forall t \in]0, 1], y'(t) = -\frac{1}{t} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

(dériver $y = \Phi(y)$ pour le constater, cf. la suite pour le lien entre équations différentielles et équations intégrales).

3. Exemples d'espaces complets

Q8. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy.

Par la question **Q1**, elle est bornée.

Soient $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{C}$ des valeurs d'adhérence de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et φ_1, φ_2 des extractrices correspondantes.

Soit $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $|x_p - x_q| \leq \varepsilon$. Or pour tout n assez grand $\varphi_1(n)$ et $\varphi_2(n)$ sont plus grands que N , et donc

$$\text{À PCR, } |x_{\varphi_1(n)} - x_{\varphi_2(n)}| \leq \varepsilon$$

par passage à la limite des inégalités larges on obtient

$$|\ell_1 - \ell_2| \leq \varepsilon$$

et donc comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, $\ell_1 = \ell_2$.

La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une suite bornée admettant une unique valeur d'adhérence, et donc elle est convergente.

Donc $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ est complet.

Q9. Soit $t \in [0, 1]$.

On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$|y_p(t) - y_q(t)| \leq \|y_p - y_q\|_{\infty}$$

et donc $(y_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente par la question **Q8**.

On note alors $y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t)$.

On a bien

$$\forall t \in [0, 1], y_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y(t).$$

Reste à voir que y est bornée. Par la question **Q1**, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$: il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|y_n\|_{\infty} \leq M$.

Pour tout $t \in [0, 1]$ on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y_n(t)| \leq M$, d'où par passage à la limite des inégalités larges $|y(t)| \leq M$.

Ainsi y est bornée et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers y .

Q10. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|y_p - y_q\|_{\infty} \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq N$.

Soit $t \in [0, 1]$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(t) - y_{n+k}(t)| \leq \|y_n - y_{n+k}\|_{\infty} \leq \varepsilon$$

et donc lorsque $k \rightarrow +\infty$, par passage à la limite des inégalités larges (tous les termes convergent bien), on a

$$|y_n(t) - y(t)| \leq \varepsilon.$$

Comme cela est vrai pour tout $t \in [0, 1]$, on a donc (passage au sup)

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y_n(t) - y(t)| \leq \varepsilon.$$

On a donc bien

$$\sup_{t \in [0, 1]} |y_n(t) - y(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Q11. Remarque : ce point fera partie du cours sur les suites et séries de fonctions « une limite uniforme de fonctions continues est continue ».

La remarque clé est que pour $t, s \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y_n(s)| + |y_n(s) - y(s)|.$$

Soit $t \in [0, 1]$.

Soit $\varepsilon > 0$.

Par la question **Q10**, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$

$$\sup_{u \in [0, 1]} |y_n(u) - y(u)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$$

En particulier pour $n = N$ on a pour tout $s \in [0, 1]$,

$$|y(t) - y(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + |y_N(t) - y_N(s)| + \frac{\varepsilon}{3}$$

Or y_N est continue en t et il existe donc $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in [0, 1]$ si $|t - s| \leq \delta$ alors $|y_N(t) - y_N(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On a donc pour tout $s \in [0, 1]$ si $|t - s| \leq \delta$,

$$|y(t) - y(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

On a donc bien montré que y est continue, c'est-à-dire $y \in E$.

Par la question **Q10**, on a alors $\|y_n - y\|_{\infty} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ dans $(E, \|\cdot\|_{\infty})$, et donc $(E, \|\cdot\|_{\infty})$ est complet.

Q12. ▶ E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$

On a $0 \in E_\lambda$ et $E_\lambda \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

Soient $y_1, y_2 \in E_\lambda$ et $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout $t \geq 0$,

$$|\mu_1 y_1(t) + \mu_2 y_2(t)| e^{\lambda t} \leq |\mu_1| |y_1(t)| e^{\lambda t} + |\mu_2| |y_2(t)| e^{\lambda t} \leq |\mu_1| \|y_1\|_{\infty, \lambda} + |\mu_2| \|y_2\|_{\infty, \lambda}$$

et donc par passage au sup

$$\|\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2\|_{\infty, \lambda} \leq |\mu_1| \|y_1\|_{\infty, \lambda} + |\mu_2| \|y_2\|_{\infty, \lambda} < +\infty,$$

c'est-à-dire $\mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 \in E_\lambda$.

D'où E_λ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$.

▶ $\|\cdot\|_{\infty, \lambda}$ est une norme sur E_λ

Elle est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ par définition de E_λ .

• Séparation : si $\|y\|_{\infty, \lambda} = 0$, alors pour tout $t \geq 0$, $|y(t)| e^{\lambda t} = 0$ et comme $e^{\lambda t} > 0$, $y(t) = 0$.

• Homogénéité : pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $y \in E_\lambda$, $\|\alpha y\|_{\infty, \lambda} = \sup_{t \geq 0} (|\alpha| |y(t)| e^{\lambda t}) = |\alpha| \|y\|_{\infty, \lambda}$.

• Inégalité triangulaire : pour $y_1, y_2 \in E_\lambda$, c'est le calcul déjà fait ci-dessus (stabilité par combinaison linéaire) avec

$$\mu_1 = \mu_2 = 1 : \|y_1 + y_2\|_{\infty, \lambda} \leq \|y_1\|_{\infty, \lambda} + \|y_2\|_{\infty, \lambda}.$$

D'où $\|\cdot\|_{\infty, \lambda}$ est une norme sur E_λ .

▶ **Complétude**

Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E_\lambda^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. On reprend les trois étapes des questions Q9 à Q11, en tenant compte du poids $e^{\lambda t}$.

• **Convergence simple.**

Soit $t \geq 0$. On a pour tous $p, q \in \mathbb{N}$,

$$|y_p(t) - y_q(t)| e^{\lambda t} = e^{-\lambda t} |y_p(t) - y_q(t)| e^{\lambda t} \leq e^{-\lambda t} \|y_p - y_q\|_{\infty, \lambda}$$

et donc $(y_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{C}$, donc convergente par la question Q8.

On note alors $y(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n(t)$, ce qui définit une fonction $y : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{C}$.

De plus, par la question Q1, la suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$: il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|y_n\|_{\infty, \lambda} \leq M.$$

Pour tout $t \geq 0$ on a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|y_n(t)| e^{\lambda t} \leq M$, d'où par passage à la limite des inégalités larges $|y(t)| e^{\lambda t} \leq M$.

Ainsi $t \mapsto y(t)e^{\lambda t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

• **Convergence uniforme pondérée.**

Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, $\|y_p - y_q\|_{\infty, \lambda} \leq \varepsilon$.

Soit $n \geq N$.

Soit $t \geq 0$.

On a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(t) - y_{n+k}(t)| e^{\lambda t} \leq \|y_n - y_{n+k}\|_{\infty, \lambda} \leq \varepsilon$$

et donc lorsque $k \rightarrow +\infty$, par passage à la limite des inégalités larges, on a

$$|y_n(t) - y(t)| e^{\lambda t} \leq \varepsilon.$$

Comme cela est vrai pour tout $t \geq 0$, on a donc (passage au sup)

$$\sup_{t \geq 0} (|y_n(t) - y(t)| e^{\lambda t}) \leq \varepsilon.$$

Ainsi

$$\sup_{t \geq 0} (|y_n(t) - y(t)| e^{\lambda t}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

• **Continuité de y .**

La différence avec la question Q11 est que le poids $e^{\lambda t}$ n'est pas minoré sur $\mathbb{R}_+$ (si $\lambda < 0$) : on se place donc sur un segment.

Soit $t \geq 0$. Posons $K = \max_{s \in [0, t+1]} e^{-\lambda s} = \max(1, e^{-\lambda(t+1)}) > 0$, de sorte que pour tout $s \in [0, t+1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|y_n(s) - y(s)| = e^{-\lambda s} |y_n(s) - y(s)| e^{\lambda s} \leq K \sup_{u \geq 0} (|y_n(u) - y(u)| e^{\lambda u}).$$

Soit $\varepsilon > 0$.

Par ce qui précède, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{u \geq 0} (|y_N(u) - y(u)| e^{\lambda u}) \leq \frac{\varepsilon}{3K}$$

et donc pour tout $s \in [0, t+1]$, $|y_N(s) - y(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

Or y_N est continue en t et il existe donc $\delta \in]0, 1]$ tel que pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ si $|t - s| \leq \delta$ alors $|y_N(t) - y_N(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On a donc pour tout $s \in \mathbb{R}_+$ si $|t - s| \leq \delta$ (et donc $s \in [0, t + 1]$),

$$|y(t) - y(s)| \leq |y(t) - y_N(t)| + |y_N(t) - y_N(s)| + |y_N(s) - y(s)| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Ainsi y est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• **Conclusion.**

La fonction y est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $t \mapsto y(t)e^{\lambda t}$ est bornée, donc $\|y\|_{\infty, \lambda} \leq M < +\infty$ et $y \in E_\lambda$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n - y \in E_\lambda$ et par la convergence uniforme pondérée, $\|y_n - y\|_{\infty, \lambda} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, c'est-à-dire $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$ dans $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$.

On a donc bien montré que $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$ est un espace vectoriel normé complet.

B. Applications aux équations différentielles

1. Cauchy–Lipschitz

Q13. Posons pour tout $t \geq 0$

$$Z(t) = z_0 + \int_0^t \alpha(s)z(s)ds.$$

Alors (théorème fondamental de l'analyse) $Z \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, et l'inéquation intégrale s'écrit $z \leq Z$.

Posons ensuite (méthode de variation de la constante), pour tout $t \geq 0$,

$$\gamma(t) = Z(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Alors la fonction γ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \gamma'(t) &= Z'(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} + Z(t)(-\alpha(t))e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} \\ &= \alpha(t)z(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} + Z(t) \times (-\alpha(t))e^{-\int_0^t \alpha(s)ds} \\ &= \alpha(t)e^{-\int_0^t \alpha(s)ds}(z(t) - Z(t)), \end{aligned}$$

et donc le caractère positif de α (et des exponentielles) ainsi que l'inéquation intégrale donnent

$$\forall t \geq 0, \gamma'(t) \leq 0.$$

Comme $\mathbb{R}_+$ est un intervalle on en déduit que γ est décroissante, et en particulier,

$$\forall t \geq 0, \gamma(t) \leq \gamma(0) = z_0,$$

c'est-à-dire (positivité des exponentielles)

$$\forall t \geq 0, Z(t) \leq z_0 e^{+\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

En réutilisant l'inéquation intégrale, on obtient donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, z(t) \leq z_0 e^{\int_0^t \alpha(s)ds}.$$

Q14. $\Rightarrow$ Supposons que $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et est solution de (P).

Alors y' est continue et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} \Phi(y)(t) &= y_0 + \int_0^t f(y(s))ds \\ &= y(0) + \int_0^t y'(s)ds \\ &= y(t) \end{aligned}$$

et donc on a bien

$$\boxed{\Phi(y) = y.}$$

Remarque : pour montrer que $y \in E_\lambda$ si on écrit l'estimée « naïve » on obtient l'inéquation intégrale $|y(t)| \leq |y(0)| + \int_0^t L |y(s)| ds$, à laquelle la question **Q13** ne s'applique pas directement. Au lieu d'écrire une version non homogène du lemme de Gronwall, il y a au moins deux options :

- prendre de la marge : utiliser le fait que $\lambda < -L$ et que par conséquent « il y a de la marge entre les deux »
- traduire : poser $z = |y| + \frac{|f(0)|}{L}$ (possible car $L > 0$) pour absorber le terme $t |f(0)|$ dans l'inéquation intégrale.

Voici les deux versions rédigées :

• **Version 1**

Soit $\delta > 0$, on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
|y(t)e^{-\delta t}| &= \left| y(0) + \int_0^t (y'(s) - \delta y(s))e^{-\delta s} ds \right| \\
&\leq |y(0)| + \int_0^t (|y'(s)| + \delta |y(s)|)e^{-\delta s} ds \\
&= |y(0)| + \int_0^t (|f(y(s))| + \delta |y(s)|)e^{-\delta s} ds \\
&\leq |y(0)| + \int_0^t (|f(0)| + L |y(s)| + \delta |y(s)|)e^{-\delta s} ds \\
&\leq \left(|y(0)| + \frac{|f(0)|}{\delta} \right) + \int_0^t (L + \delta) |y(s)| e^{-\delta s} ds.
\end{aligned}$$

et donc par la question **Q13**, pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
|y(t)| e^{-\delta t} &\leq \left(|y(0)| + \frac{|f(0)|}{\delta} \right) e^{\int_0^t (L+\delta) ds} \\
&= \left(|y(0)| + \frac{|f(0)|}{\delta} \right) e^{(L+\delta)t}.
\end{aligned}$$

c'est-à-dire, en posant $C_\delta = \left(|y(0)| + \frac{|f(0)|}{\delta} \right)$,

$$\forall t \geq 0, |y(t)| \leq C_\delta e^{(L+2\delta)t}.$$

Par conséquent on a

$$\forall t \geq 0, |y(t)| e^{\lambda t} \leq C_\delta e^{(L+2\delta+\lambda)t}$$

et en choisissant $\delta > 0$ tel que

$$\lambda < -L - 2\delta,$$

par exemple $\delta = -\frac{\lambda+L}{3} > 0$, on obtient

$$t \mapsto |y(t)| e^{\lambda t} \text{ est bornée sur } \mathbb{R}_+$$

et donc

$$\boxed{y \in E_\lambda.}$$

• **Version 2**

Posons pour tout $t \geq 0$,

$$z(t) = |y(t)| + \frac{|f(0)|}{L}.$$

Alors $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
z(t) &= |y(t)| + \frac{|f(0)|}{L} \\
&\leq |y(0)| + \int_0^t |f(y(s))| ds + \frac{|f(0)|}{L} \\
&\leq |y(0)| + \int_0^t (|f(0)| + L |y(s)|) ds + \frac{|f(0)|}{L} \\
&= \left(|y(0)| + \frac{|f(0)|}{L} \right) + \int_0^t L \left(|y(s)| + \frac{|f(0)|}{L} \right) ds \\
&= z(0) + \int_0^t L z(s) ds
\end{aligned}$$

et donc par la question **Q13**, pour tout $t \geq 0$,

$$z(t) \leq z(0) e^{\int_0^t L ds} = z(0) e^{Lt}$$

Et donc pour tout $t \geq 0$ (comme $L + \lambda < 0$)

$$|y(t)| e^{\lambda t} \leq z(t) e^{\lambda t} \leq z(0) e^{(L+\lambda)t} \leq z(0)$$

et on a donc bien

$$\boxed{y \in E_\lambda.}$$

► $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $y \in E_\lambda$ et $\Phi(y) = y$.
Comme $\Phi(y) = y$ on a pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))ds$$

et donc par le théorème fondamental de l'analyse, comme $f \circ y$ est continue, on en déduit que $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et que pour tout $t \geq 0$, $y'(t) = f(y(t))$.

De plus en évaluant en 0 on a $y(0) = y_0$, et donc $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ et est solution de (P).

Q15. On remarque que commencer par le caractère contractant permet de déduire la stabilité.

► **Caractère contractant**

Soient $y_1, y_2 \in E_\lambda$.

On a pour tout $t \geq 0$, (en remarquant que $\lambda < 0$)

$$\begin{aligned} |\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)| &= \left| \int_0^t (f(y_1(s)) - f(y_2(s)))ds \right| \\ &\leq \int_0^t L |y_1(s) - y_2(s)| ds \\ &\leq L \int_0^t \|y_1 - y_2\|_{\infty, \lambda} e^{-\lambda s} ds \\ &= L \|y_1 - y_2\|_{\infty, \lambda} \frac{e^{-\lambda t} - 1}{-\lambda} \\ &\leq \frac{L}{-\lambda} \|y_1 - y_2\|_{\infty, \lambda} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

et donc en posant

$$k = \frac{L}{-\lambda} \in [0, 1[$$

(car $\lambda < -L < 0$) on a

$$\forall t \geq 0, |\Phi(y_1)(t) - \Phi(y_2)(t)| e^{\lambda t} \leq k \|y_1 - y_2\|_{\infty, \lambda}.$$

c'est-à-dire, comme $\Phi(y_1)$ et $\Phi(y_2)$ sont continues (théorème fondamental de l'analyse),

$$\Phi(y_1) - \Phi(y_2) \in E_\lambda$$

et

$$\|\Phi(y_1) - \Phi(y_2)\|_{\infty, \lambda} \leq k \|y_1 - y_2\|_{\infty, \lambda}.$$

Remarque : on a montré que si $y_1, y_2 \in E_\lambda$ alors $\Phi(y_1) - \Phi(y_2) \in E_\lambda$, et le caractère contractant mais pas encore que pour $y \in E_\lambda$, $\Phi(y) \in E_\lambda$.

► **Stabilité**

On a $0 \in E_\lambda$ et

$$\Phi(0) : t \mapsto y_0 + t f(0)$$

et donc $\Phi(0)$ est continue et $t \mapsto t e^{\lambda t}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$, car continue et de limite nulle en $+\infty$) $\Phi(0) \in E_\lambda$.

Soit $y \in E_\lambda$.

Par le point précédent on a $\Phi(y) - \Phi(0) \in E_\lambda$ et donc $(E_\lambda$ est un sev),

$$\Phi(y) = \Phi(0) + (\Phi(y) - \Phi(0)) \in E_\lambda.$$

Donc E_λ est stable par Φ .

Q16. On a vu à la question **Q14** que résoudre le problème de Cauchy (P) revient à trouver un point fixe de Φ dans E_λ .

De plus par la question **Q15**, Φ (induite sur E_λ) est contractante sur $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$ qui est d'après la question **Q12** un espace complet.

Par la question **Q3**, il existe donc un et unique $y \in E_\lambda$ tel que $\Phi(y) = y$.

On a donc bien montré que $\boxed{\text{il existe une et une seule solution de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}_+ \text{ au problème de Cauchy (P).}}$

Q17. ► On traite d'abord le cas d'une solution à valeurs réelles, puis le cas général d'une solution à valeurs complexes.

• **Cas réel**

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ solution de (P) pour $f : x \mapsto x^2$ et $y_0 > 0$.

On a alors

$$\forall t \geq 0, y'(t) = y(t)^2 \geq 0$$

et donc y est croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$, et en particulier comme $y(0) = y_0 > 0$, la fonction y ne s'annule pas.

Ainsi on a (variables séparables)

$$\forall t \geq 0, \frac{y'(t)}{y(t)^2} = 1$$

et donc en intégrant,

$$\forall t \geq 0, \int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)^2} ds = \int_0^t 1 ds = t$$

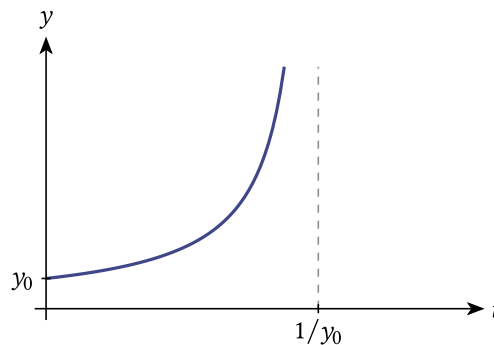
c'est-à-dire

$$\forall t \geq 0, -\frac{1}{y(t)} + \frac{1}{y_0} = t$$

ce qui revient finalement à

$$\forall t \geq 0, y(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}.$$

Ce qui est absurde car le terme de droite n'est pas défini en tout point de $\mathbb{R}_+$ (il y a « explosion » en temps fini $t = \frac{1}{y_0}$).



• Cas complexe

Supposons par l'absurde qu'il existe $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$ solution de (P) pour $f : x \mapsto x^2$ et $y_0 > 0$.

On ne peut plus parler de croissance, mais le cas réel donne le candidat : posons $T = \frac{1}{y_0}$ et

$$u : [0, T[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$t \mapsto \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$

qui est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $u(0) = y_0$ et pour tout $t \in [0, T[, u'(t) = u(t)^2$.

Posons $w = y - u$ sur $[0, T[$. Alors w est de classe $\mathcal{C}^1$, $w(0) = 0$ et pour tout $t \in [0, T[$,

$$w'(t) = y(t)^2 - u(t)^2 = (y(t) + u(t))w(t).$$

Ainsi w est solution sur l'intervalle $[0, T[$ de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 $w' = a(t)w$, avec $a = y + u$ continue : il existe donc $C \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall t \in [0, T[, w(t) = C e^{\int_0^t a(s) ds}$$

et comme $w(0) = 0$ on a $C = 0$, c'est-à-dire $y = u$ sur $[0, T[$.

Par conséquent

$$|y(t)| = u(t) \xrightarrow[t \rightarrow T^-]{} +\infty$$

ce qui est absurde car y est continue en T .

On a bien montré que il n'y a pas existence de solution au problème de Cauchy (P) pour $f : x \mapsto x^2$ et $y_0 > 0$.

- En faisant au brouillon le même calcul de variables séparables pour $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $y_0 = 0$, on obtient que

$$y : t \mapsto \frac{t^2}{4}$$

est solution de (P).

En effet on vérifie au propre que $y(0) = 0$ et pour tout $t \geq 0$,

$$y'(t) = \frac{t}{2} = \sqrt{\frac{t^2}{4}} = \sqrt{|y(t)|}.$$

Mais il y a aussi d'autres solutions.

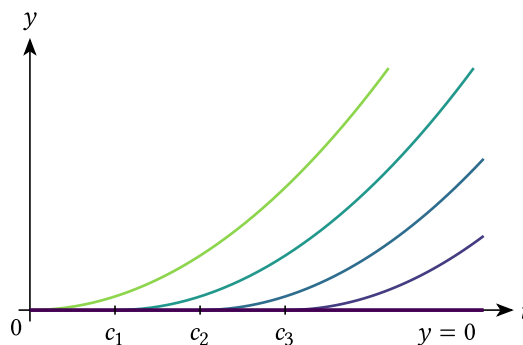
Par exemple la solution nulle $y : t \mapsto 0$ ou encore pour tout $c \geq 0$ en posant (c'est une translation temporelle pour une équation autonome)

$$y_c : t \mapsto \frac{(t - c)^2}{4} \mathbb{1}_{t \geq c}$$

on a bien

- $y_c \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{C})$: elle est nulle sur $[0, c]$ et polynomiale sur $[c, +\infty[$, avec des dérivées à gauche et à droite en c toutes deux nulles ; elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée $t \mapsto \frac{t-c}{2} \mathbb{1}_{t \geq c}$ qui est continue,
- $y_c(0) = 0$,

- pour tout $t \geq 0$, $y'_c(t) = \frac{t-c}{2} \mathbb{1}_{t \geq c} = \sqrt{\frac{(t-c)^2}{4}} \mathbb{1}_{t \geq c} = \sqrt{|y_c(t)|}$.



Comme ces solutions sont distinctes, on a bien montré que
il n'y a pas unicité des solutions au problème de Cauchy (P) pour $f : x \mapsto \sqrt{|x|}$ et $y_0 = 0$.

2. Module d'uniforme continuité

L'ordre des questions ici n'était pas optimal, désolé du désordre.

Q18. La définition de f uniformément continue est

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \text{ t.q. } |x_1 - x_2| \leq \delta, |f(x_1) - f(x_2)| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire (par définition du supremum)

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \omega(\delta) \leq \varepsilon.$$

De plus ω est croissante, en effet si $r_1 \leq r_2$ alors

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1 - x_2| \leq r_1\} \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1 - x_2| \leq r_2\}$$

et donc

$$\omega(r_1) = \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ |x_1 - x_2| \leq r_1}} (|f(x_1) - f(x_2)|) \leq \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ |x_1 - x_2| \leq r_2}} (|f(x_1) - f(x_2)|) = \omega(r_2).$$

Ainsi la condition précédente est équivalente à

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall r \in [0, \delta], \omega(r) \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire, comme ω est à valeurs positives,

$$\boxed{f \text{ est uniformément continue} \iff \omega(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0.}$$

Q19. ▶ **Croissance**

Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$ avec $r_1 \leq r_2$.

Alors

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1 - x_2| \leq r_1\} \subseteq \{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |x_1 - x_2| \leq r_2\}$$

et par conséquent

$$\sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ |x_1 - x_2| \leq r_1}} (|f(x_1) - f(x_2)|) \leq \sup_{\substack{(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \\ |x_1 - x_2| \leq r_2}} (|f(x_1) - f(x_2)|)$$

c'est-à-dire $\omega(r_1) \leq \omega(r_2)$.

Donc ω est croissante.

▶ **Sous-additivité**

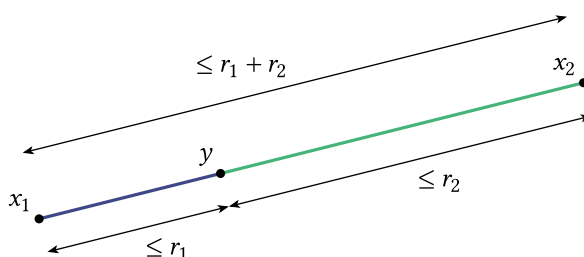
Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$.

Si $r_1 = r_2 = 0$, l'inégalité est immédiate car $\omega(0) = 0$. Supposons désormais que $r_1 + r_2 > 0$.

Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|x_1 - x_2| \leq r_1 + r_2$.

Posons

$$y = \frac{r_2}{r_1 + r_2} x_1 + \frac{r_1}{r_1 + r_2} x_2.$$



Alors

$$|x_1 - y| = \frac{r_1}{r_1 + r_2} |x_1 - x_2| \leq r_1$$

$$|x_2 - y| = \frac{r_2}{r_1 + r_2} |x_1 - x_2| \leq r_2$$

et par conséquent, par définition de $\omega(r_1)$ et de $\omega(r_2)$,

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &\leq |f(x_1) - f(y)| + |f(y) - f(x_2)| \\ &\leq \omega(r_1) + \omega(r_2). \end{aligned}$$

Comme c'est le cas pour tous $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$ tels que $|x_1 - x_2| \leq r_1 + r_2$, on en déduit

$$\boxed{\omega(r_1 + r_2) \leq \omega(r_1) + \omega(r_2).}$$

Q20. ► Valeurs finies

De la sous-additivité de la question **Q19** et par une récurrence on a pour tous $r_1, \dots, r_n \geq 0$,

$$\omega\left(\sum_{i=1}^n r_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \omega(r_i).$$

Par la question **Q18**, $\omega(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0^+$ et donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in [0, \delta]$, $\omega(r) \leq 1$. Soit $r \geq 0$ et posons $n = \left\lceil \frac{r}{\delta} \right\rceil \in \mathbb{N}$, on a alors par la croissance de la question **Q19** et les points précédents

$$\omega(r) \leq \omega(n\delta) \leq \sum_{i=1}^n \omega(\delta) \leq n\omega(\delta) \leq n < +\infty.$$

Donc ω est à valeurs finies (et même $\omega(r) = O_{r \rightarrow +\infty}(r)$).

► Uniforme continuité

Soient $r_1, r_2 \in \mathbb{R}_+$; quitte à les échanger, on suppose $r_1 \geq r_2$.

Alors par la sous-additivité de la question **Q19** et la croissance

$$\begin{aligned} |\omega(r_1) - \omega(r_2)| &= \omega(r_1) - \omega(r_2) \\ &\leq \omega(|r_1 - r_2| + r_2) - \omega(r_2) \\ &\leq \omega(|r_1 - r_2|) + \omega(r_2) - \omega(r_2) \\ &= \omega(|r_1 - r_2|). \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$, comme $\omega(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0^+$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in [0, \delta]$, $\omega(r) \leq \varepsilon$.

Et alors

$$\forall (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2, |r_1 - r_2| \leq \delta \implies |\omega(r_1) - \omega(r_2)| \leq \omega(|r_1 - r_2|) \leq \varepsilon.$$

Donc ω est uniformément continue.

Q21. On l'avait en fait démontré à la question **Q20.**

Soit $\delta > 0$ tel que pour tout $r \in [0, \delta]$, $\omega(r) \leq 1$.

Pour tout $r \geq 0$, on a alors avec $n = \left\lceil \frac{r}{\delta} \right\rceil \in \mathbb{N}$,

$$\omega(r) \leq \omega(n\delta) \leq \sum_{i=1}^n \omega(\delta) \leq n\omega(\delta) \leq n = \left\lceil \frac{r}{\delta} \right\rceil \leq \frac{r}{\delta} + 1$$

et donc

$$\boxed{\omega(r) = O_{r \rightarrow +\infty}(r).}$$

3. Un lemme de Gronwall–Osgood

Q22. On s'inspire de la preuve du lemme de Gronwall à la question **Q13.**

Posons pour tout $t \geq 0$,

$$Z(t) = z_0 + \int_0^t \alpha(s)\omega(z(s))ds.$$

Alors (théorème fondamental de l'analyse) Z est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \geq 0$,

$$Z'(t) = \alpha(t)\omega(z(t)).$$

Or l'inéquation intégrale est $z \leq Z$, ω est croissante et α est positive.

D'où pour tout $t \geq 0$

$$Z'(t) \leq \alpha(t)\omega(Z(t)).$$

Or $Z(0) = z_0 > 0$ et Z est croissante (car $Z' = \alpha\omega(z) \geq 0$).

En particulier $Z \geq z_0 > 0$ et comme ω est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $t \geq 0$, $\omega(Z(t)) > 0$ d'où

$$\frac{Z'(t)}{\omega(Z(t))} \leq \alpha(t).$$

Soit $t \geq 0$. En intégrant l'inégalité précédente on obtient

$$\int_0^t \frac{Z'(s)}{\omega(Z(s))} ds \leq \int_0^t \alpha(s) ds$$

ce qui revient (changement de variable $r = Z(s)$, Z étant de classe $\mathcal{C}^1$) à

$$\int_{Z(0)}^{Z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Enfin $Z(0) = z_0$, $0 < z(t) \leq Z(t)$ et $\frac{1}{\omega}$ est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où

$$\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_{Z(0)}^{Z(t)} \frac{dr}{\omega(r)}$$

et finalement,

$$\boxed{\int_{z_0}^{z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.}$$

Q23. On remarque tout d'abord que la même preuve qu'à la question **Q22** ne fonctionne pas car $Z(0) = z_0 = 0$ et donc Z peut s'annuler, ce qui empêche de diviser par $\omega \circ Z$.

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $z_\varepsilon : t \mapsto z(t) + \varepsilon$.

On a pour tout $t \geq 0$, par croissance de ω et positivité de α ,

$$z_\varepsilon(t) \leq \varepsilon + \int_0^t \alpha(s) \omega(z(s)) ds \leq \varepsilon + \int_0^t \alpha(s) \omega(z_\varepsilon(s)) ds$$

et comme z_ε vérifie les hypothèses de la question **Q22**, pour tout $t \geq 0$,

$$\int_\varepsilon^{z(t)+\varepsilon} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.$$

Fixons $t \geq 0$.

On vient de démontrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \int_\varepsilon^{z(t)+\varepsilon} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.$$

En faisant tendre ε vers 0^+ on obtient donc (au sens d'intégrales dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$)

$$\boxed{\int_0^{z(t)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^t \alpha(s) ds.}$$

Q24. Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 \geq 0$ tel que $z(t_0) > 0$.

Par la question **Q23**, on a

$$\int_0^{z(t_0)} \frac{dr}{\omega(r)} \leq \int_0^{t_0} \alpha(s) ds < +\infty.$$

Mais comme $\frac{1}{\omega}$ est continue et positive sur $]0, +\infty[$, on a

$$\int_0^{z(t_0)} \frac{dr}{\omega(r)} = \int_0^1 \frac{dr}{\omega(r)} + \underbrace{\int_1^{z(t_0)} \frac{dr}{\omega(r)}}_{\text{fini}} = +\infty.$$

Absurde.

Donc

$$\boxed{\forall t \geq 0, \quad z(t) = 0.}$$

4. Cauchy–Osgood

Q25. Soient y_1, y_2 des solutions de classe $\mathcal{C}^1$ du problème de Cauchy (P).

Posons $z = |y_1 - y_2|$ continue et positive. On a alors pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned}
z(t) &= |y_1(t) - y_2(t)| \\
&= \left| y_1(0) - y_2(0) + \int_0^t (f(y_1(s)) - f(y_2(s))) ds \right| \\
&\leq 0 + \int_0^t |f(y_1(s)) - f(y_2(s))| ds \\
&\leq \int_0^t \omega(|y_1(s) - y_2(s)|) ds \\
&= \int_0^t \omega(z(s)) ds.
\end{aligned}$$

Ainsi z vérifie les hypothèses de la question **Q24** avec $\alpha = 1$ et donc par le lemme d'Osgood, $z = 0_{\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+}$, c'est-à-dire

$y_1 = y_2$.

D'où l'unicité.

Q26. Posons pour $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{P}_n : \forall k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, |y_{n+k}(t) - y_n(t)| \leq M_n(t)$$

et procédons par récurrence sur n .

► **Initialisation**

Posons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{Q}_k : \forall t \geq 0, |y_k(t) - y_0(t)| \leq M_0(t)$$

et procédons par récurrence sur k .

• **Initialisation**

On a bien pour tout $t \geq 0$, $|y_0(t) - y_0(t)| = 0 \leq M_0(t)$ (car $B > 0$).

• **Hérédité**

Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{Q}_k$.

On a pour tout $t \geq 0$, par croissance de ω et $\mathcal{Q}_k$,

$$\begin{aligned}
|y_{k+1}(t) - y_0(t)| &= \left| \left(y_0 + \int_0^t f(y_k(s)) ds \right) - y_0 \right| \\
&\leq \int_0^t |f(y_k(s))| ds \\
&\leq \int_0^t (|f(y_0)| + |f(y_k(s)) - f(y_0)|) ds \\
&\leq \int_0^t (|f(y_0)| + \omega(|y_k(s) - y_0|)) ds \\
&\leq \int_0^t (|f(y_0)| + \omega(M_0(s))) ds \\
&\leq \int_0^t (|f(y_0)| + B(1 + M_0(s))) ds \\
&= \int_0^t (C + BM_0(s)) ds.
\end{aligned}$$

Or on a justement pris M_0 tel que pour tout $s \geq 0$, $M'_0(s) = Ce^{Bs} = C + BM_0(s)$ et $M_0(0) = 0$, d'où

$$|y_{k+1}(t) - y_0(t)| \leq \int_0^t M'_0(s) ds = M_0(t),$$

c'est-à-dire $\mathcal{Q}_{k+1}$.

On a donc montré $\mathcal{Q}_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathcal{P}_0$.

► **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}_n$.

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$. On a, par croissance de ω et $\mathcal{P}_n$,

$$\begin{aligned}
|y_{n+1+k}(t) - y_{n+1}(t)| &= \left| \int_0^t (f(y_{n+k}(s)) - f(y_n(s))) ds \right| \\
&\leq \int_0^t \omega(|y_{n+k}(s) - y_n(s)|) ds \\
&\leq \int_0^t \omega(M_n(s)) ds \\
&= M_{n+1}(t),
\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\mathcal{P}_{n+1}$.

► **Conclusion**

On a donc bien montré que

$$\forall n, k \in \mathbb{N}, \forall t \geq 0, |y_{n+k}(t) - y_n(t)| \leq M_n(t).$$

Q27. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons

$$\mathcal{R}_n : \forall t \geq 0, M_{n+1}(t) \leq M_n(t).$$

On remarque qu'encore une fois il s'agit d'une récurrence dont le point sensible est l'initialisation, garantie par le choix de M_0 .

► **Initialisation**

On a pour tout $t \geq 0$, comme $B \leq C$,

$$\begin{aligned}
M_1(t) &= \int_0^t \omega(M_0(s)) ds \\
&\leq \int_0^t B(1 + M_0(s)) ds \\
&\leq \int_0^t (C + BM_0(s)) ds \\
&= M_0(t)
\end{aligned}$$

car $M'_0 = C + BM_0$ et $M_0(0) = 0$.

D'où $\mathcal{R}_0$.

► **Hérédité**

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{R}_n$.

Soit $t \geq 0$. On a par croissance de ω et $\mathcal{R}_n$,

$$\begin{aligned}
M_{n+2}(t) &= \int_0^t \omega(M_{n+1}(s)) ds \\
&\leq \int_0^t \omega(M_n(s)) ds \\
&= M_{n+1}(t),
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{R}_{n+1}$.

► **Conclusion**

On a donc bien montré que

$$\forall (t, n) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{N}, M_{n+1}(t) \leq M_n(t),$$

c'est-à-dire que pour tout $t \geq 0$, la suite $(M_n(t))_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ est décroissante.

Q28. ► **Lipschitzianité**

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$.

On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, |g_n(t_1) - g_n(t_2)| \leq \kappa |t_1 - t_2|,$$

et donc par passage à la limite des inégalités larges on obtient

$$|g(t_1) - g(t_2)| \leq \kappa |t_1 - t_2|.$$

Et donc g est κ -lipschitzienne.

► **Convergence uniforme**

Soit $\varepsilon > 0$.

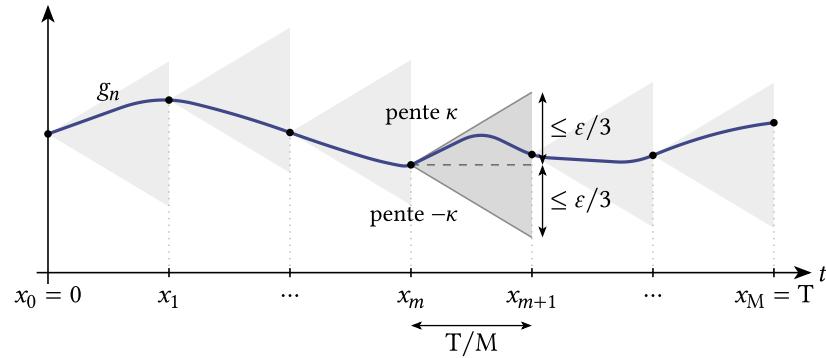
Posons

$$M = \left\lceil \frac{3\kappa T}{\varepsilon} \right\rceil + 1 \in \mathbb{N}^*,$$

et pour tout $m \in \llbracket 0, M \rrbracket$,

$$x_m = \frac{mT}{M} \in [0, T].$$

Remarque : M est choisi pour avoir des variations d'au plus $\frac{\varepsilon}{3}$ sur un intervalle de longueur $\frac{T}{M}$ pour une fonction κ -lipschitzienne (on a $\kappa \frac{T}{M} \leq \frac{\varepsilon}{3}$).



On a pour tout $m \in \llbracket 0, M \rrbracket$, $g_n(x_m) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} g(x_m)$ et donc il existe $N_m \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_m, |g_n(x_m) - g(x_m)| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Or il y a un nombre **fini** de points x_m et donc on peut poser

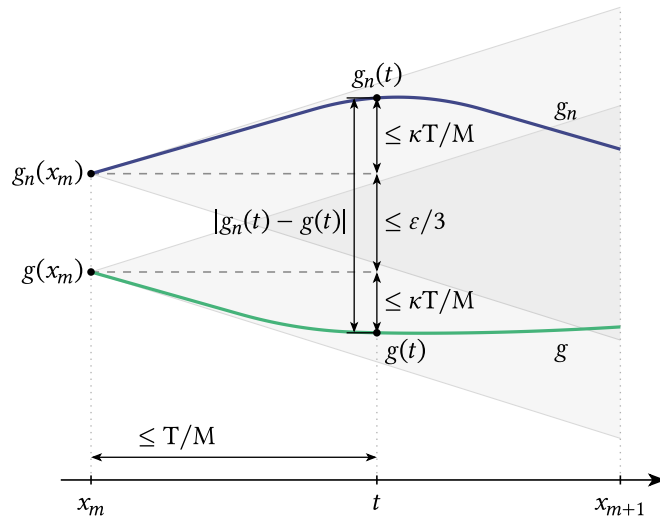
$$N = \max_{m \in \llbracket 0, M \rrbracket} (N_m) \in \mathbb{N}.$$

Soit $n \geq N$.

Soit $t \in [0, T]$. Il existe $m \in \llbracket 0, M-1 \rrbracket$ tel que $t \in [x_m, x_{m+1}]$.

Alors, comme $n \geq N \geq N_m$ et comme g_n et g sont κ -lipschitziennes (premier point),

$$\begin{aligned} |g_n(t) - g(t)| &\leq |g_n(t) - g_n(x_m)| + |g_n(x_m) - g(x_m)| + |g(x_m) - g(t)| \\ &\leq \kappa |t - x_m| + \frac{\varepsilon}{3} + \kappa |t - x_m| \\ &\leq \kappa \frac{T}{M} + \frac{\varepsilon}{3} + \kappa \frac{T}{M} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$



Comme $t \in [0, T]$ est arbitraire, par passage au supremum,

$$\sup_{t \in [0, T]} |g_n(t) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

On a donc montré que

$$\boxed{\sup_{t \in [0, T]} |g_n(t) - g(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

Q29. Soit $T > 0$.

► **Convergence simple**

Soit $t \geq 0$.

Par la question **Q27**, la suite $(M_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, et comme elle est minorée par 0, il existe $M_\infty(t) \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$M_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M_\infty(t).$$

► **Convergence uniforme**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1, t_2 \in [0, T]$, quitte à les intervertir supposons $t_1 \leq t_2$.

On a

$$\begin{aligned} |M_n(t_1) - M_n(t_2)| &= \left| \int_0^{t_1} \omega(M_{n-1}(s)) ds - \int_0^{t_2} \omega(M_{n-1}(s)) ds \right| \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \omega(M_{n-1}(s)) ds \\ &\leq (t_2 - t_1) \sup_{s \in [0, T]} \omega(M_{n-1}(s)). \end{aligned}$$

Or ω est croissante et pour tout $s \geq 0$, $M_{n-1}(s) \leq M_0(s)$ (par la décroissance de la question Q27), et donc

$$\sup_{s \in [0, T]} \omega(M_{n-1}(s)) \leq \sup_{s \in [0, T]} \omega(M_0(s)).$$

En posant

$$\kappa_T = \sup_{s \in [0, T]} \omega(M_0(s)) \in \mathbb{R}_+,$$

on a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, M_n \text{ est } \kappa_T\text{-lipschitzienne sur } [0, T].$$

Donc par la question Q28 appliquée à la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, la fonction M_∞ est κ_T -lipschitzienne (donc continue) sur $[0, T]$ et

$$\sup_{t \in [0, T]} |M_n(t) - M_\infty(t)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

► **Valeur de la limite**

Montrons que l'on peut « passer à la limite » dans l'équation de récurrence de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $t \in [0, T]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, par les propriétés de ω (question Q20 et croissance),

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t \omega(M_n(s)) ds - \int_0^t \omega(M_\infty(s)) ds \right| &\leq \int_0^t |\omega(M_n(s)) - \omega(M_\infty(s))| ds \\ &\leq \int_0^t \omega(|M_n(s) - M_\infty(s)|) ds \\ &\leq \int_0^t \omega \left(\sup_{u \in [0, T]} |M_n(u) - M_\infty(u)| \right) ds \\ &\leq T \omega \left(\sup_{u \in [0, T]} |M_n(u) - M_\infty(u)| \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car $\omega(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0^+$ (question Q18), et donc

$$\int_0^t \omega(M_n(s)) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^t \omega(M_\infty(s)) ds.$$

En passant à la limite dans l'équation de récurrence de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on obtient donc

$$\forall t \in [0, T], M_\infty(t) = \int_0^t \omega(M_\infty(s)) ds$$

et donc par la question Q24 avec $\alpha = 1$, on a $M_\infty = 0_{[0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+}$.

► **Conclusion**

Comme M_∞ est nulle sur $[0, T]$, la convergence uniforme précédente s'écrit

$$\boxed{\sup_{t \in [0, T]} (M_n(t)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

Q30. ► **Valeurs dans E_λ**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

La fonction y_n est continue sur $\mathbb{R}_+$ et par la question Q26 (appliquée aux indices 0 et n), on a pour tout $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} |y_n(t)| &\leq |y_0| + |y_n(t) - y_0(t)| \\ &\leq |y_0| + M_0(t) \\ &\leq |y_0| + \frac{C}{B} e^{Bt}. \end{aligned}$$

Comme $\lambda = -2B < 0$, on a donc pour tout $t \geq 0$,

$$|y_n(t)| e^{\lambda t} \leq |y_0| e^{-2Bt} + \frac{C}{B} e^{-Bt} \leq |y_0| + \frac{C}{B}.$$

Ainsi $\|y_n\|_{\infty, \lambda} \leq |y_0| + \frac{C}{B} < +\infty$, c'est-à-dire $y_n \in E_\lambda$.

► **Suite de Cauchy**

L'idée est de séparer les temps longs, où le poids $e^{\lambda t}$ écrase la majoration par M_0 , des temps courts, où M_n est petit par la question Q29.

Soit $\varepsilon > 0$.

Comme $\frac{C}{B} e^{-Bt} \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$, il existe $T > 0$ tel que

$$\forall t \geq T, \frac{C}{B} e^{-Bt} \leq \varepsilon.$$

Puis par la question Q29, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N, \sup_{t \in [0, T]} (M_n(t)) \leq \varepsilon.$$

Soient $n \geq N, k \in \mathbb{N}$ et $t \geq 0$. Par la question Q26,

$$|y_{n+k}(t) - y_n(t)| e^{\lambda t} \leq M_n(t) e^{-2Bt}.$$

- Si $t \leq T$, alors

$$M_n(t) e^{-2Bt} \leq M_n(t) \leq \varepsilon.$$

- Si $t \geq T$, alors par la décroissance de la question Q27,

$$M_n(t) e^{-2Bt} \leq M_0(t) e^{-2Bt} \leq \frac{C}{B} e^{-Bt} \leq \varepsilon.$$

Dans les deux cas $|y_{n+k}(t) - y_n(t)| e^{\lambda t} \leq \varepsilon$, et comme $t \geq 0$ est arbitraire, par passage au supremum,

$$\|y_{n+k} - y_n\|_{\infty, \lambda} \leq \varepsilon.$$

► **Conclusion**

On a donc bien montré (en prenant $n = \min(p, q)$ et $k = |p - q|$) que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|y_p - y_q\|_{\infty, \lambda} \leq \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$.

Q31. ► **Convergence dans E_λ**

Par la question Q12, l'espace $(E_\lambda, \|\cdot\|_{\infty, \lambda})$ est complet, et par la question Q30, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de cet espace.

Il existe donc $y \in E_\lambda$ tel que

$$\|y_n - y\|_{\infty, \lambda} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

► **Convergence uniforme sur tout segment**

Soit $T > 0$.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [0, T]$, comme $\lambda = -2B$,

$$|y_n(t) - y(t)| = |y_n(t) - y(t)| e^{\lambda t} e^{2Bt} \leq e^{2BT} \|y_n - y\|_{\infty, \lambda}$$

et donc

$$\sup_{t \in [0, T]} |y_n(t) - y(t)| \leq e^{2BT} \|y_n - y\|_{\infty, \lambda} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

► **Valeur de la limite**

Montrons que l'on peut « passer à la limite » dans l'équation de récurrence de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ (on ne sait plus que Φ est contractante, il faut donc le faire « à la main »).

Soient $T > 0$ et $t \in [0, T]$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition et croissance de ω ,

$$\begin{aligned} |\Phi(y_n)(t) - \Phi(y)(t)| &= \left| \int_0^t f(y_n(s)) ds - \int_0^t f(y(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t |f(y_n(s)) - f(y(s))| ds \\ &\leq \int_0^t \omega(|y_n(s) - y(s)|) ds \\ &\leq T \omega \left(\sup_{u \in [0, T]} |y_n(u) - y(u)| \right) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

car $\omega(r) \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow 0^+$ (question Q18, f étant uniformément continue), et donc

$$\Phi(y_n)(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \Phi(y)(t).$$

Comme de plus $y_{n+1}(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y(t)$, en passant à la limite dans l'équation de récurrence $y_{n+1}(t) = \Phi(y_n)(t)$, on obtient donc ($T > 0$ étant arbitraire)

$$\forall t \geq 0, y(t) = \Phi(y)(t) = y_0 + \int_0^t f(y(s))ds.$$

► **Conclusion**

Or y est continue (car $y \in E_\lambda$) et f est continue (car uniformément continue), donc $f \circ y$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi (théorème fondamental de l'analyse) y est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{cases} \forall t \geq 0, y'(t) = f(y(t)) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On a donc bien montré que le problème de Cauchy (P) admet une solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : avec la question **Q25**, on a donc montré que sous les hypothèses de cette sous-partie le problème de Cauchy (P) admet une unique solution de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$: c'est le théorème de Cauchy–Osgood.