Semaine du 16/11 au 21/11.

Révisions d'algèbre linéaire

Tous les chapitres de MPSI portant sur l'algèbre linéaire sont au programme de cette colle :
- *calcul matriciel et systèmes linéaires,*
- *espaces vectoriels et applications linéaires,*
- *matrices,*
- *groupe symétrique et déterminants.*

Compléments d'algèbre linéaire et outils de la réduction

Cette colle porte sur la partie de la section « Réduction des endomorphismes et des matrices carrées » qui **ne fait pas intervenir la réduction**.

Les **éléments propres**, le **polynôme caractéristique**, la **diagonalisation**, la **trigonalisation** et le théorème de **Cayley-Hamilton**, le **lemme des noyaux**, etc. ne sont **PAS** au programme cette semaine.

Sans soulever de difficulté, on signale que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas d'un corps de base quelconque. Pour éviter les difficultés liées aux polynômes en caractéristique non nulle, la section est traitée sous l'hypothèse que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments d'algèbre linéaire	
Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe.
Si $F_1, ..., F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.	Base adaptée à une décomposition en somme directe.
Si $E_1, ..., E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	
Matrices définies par blocs.	Interprétation géométrique des blocs.
Opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit, transposition).	La démonstration concernant le produit par blocs n'est pas exigible. Transvections par blocs. Invariance du déterminant.
Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs.	
b) Sous-espaces stables, endomorphismes induits	
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	En dimension finie, traduction matricielle.
Si deux endomorphismes u et v commutent, le noyau et l'image de u sont stables par v.	
f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes	
Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.	
L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	
g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.	Traduction matricielle.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire. Notations π_u, μ_u, π_M, μ_M.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	