

Semaine du 02/11 au 07/11.

Topologie des espaces vectoriels normés

Tout le chapitre est au programme, pour les deux classes : normes, suites, topologie d'un espace normé, continuité, applications linéaires continues, compacité, connexité par arcs et dimension finie.

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\ \cdot \ _1, \ \cdot \ _2, \ \cdot \ _\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\ \cdot \ _\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k \sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\ \cdot \ _1$ et $\ \cdot \ _2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Point intérieur, point adhérent.	
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie.	
Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A . Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E . Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E .
e) Étude locale d'une application, continuité	
Limite en un point adhérent à une partie A . Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\ x\ $ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.

Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E .

f) Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Notation $\mathcal{L}_c(E, F)$.

Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.

Notations $\|u\|$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathcal{L}_c(E, F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.

Critère de continuité des applications multilinéaires.

La démonstration n'est pas exigible.

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

Une partie compacte est fermée et bornée.

Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.

Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Produit d'une famille finie de compacts.

h) Applications continues sur une partie compacte

Image continue d'une partie compacte.

Théorème de Heine.

Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.

On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E . Les classes sont les composantes connexes par arcs.

Cas des parties convexes, des parties étoilées.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Image continue d'une partie connexe par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.

Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.

Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.