

Révisions sur les polynômes

Calculs plus ou moins directs

Exercice 1. Une relation binomiale.

X

Pour tout $n \geq 1$, on note $P_n = 1 + X + \dots + X^{n-1}$. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} P_k = 2^{n-1} P_n \left(\frac{X+1}{2} \right)$.

Exercice 2. Une identité q -binomiale.

X

Soit $q \in \mathbb{C}$ tel que $0 < |q| < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, on définit $F(z) = \prod_{k=1}^n (1 + q^{2k-1}z)^{-1} (1 + q^{2k-1}z^{-1})$.

1. Montrer qu'il existe un unique $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*, F(z) = \sum_{k=0}^n c_k (z^k + z^{-k})$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}^*$, exprimer $F(q^2z)$ en fonction de $F(z)$.
3. En déduire une relation de récurrence sur les c_k , puis une expression de c_k comme un produit.

Exercice 3. Nombre de coefficients positifs.

X

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré n , on note $N(P)$ le nombre de coefficients (de degré $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$) positifs ou nuls de P .

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 2$. Montrer que $N(P^2) \geq 3$.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $N(P^2) = 3$.

Exercice 4. Minoration du degré.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents de degré n . Montrer $\deg(P^3 - Q^3) \geq 2n$.

Le résultat reste-t-il vrai si $P, Q \in \mathbb{C}[X]$?

Exercice 5. Un jeu dans $\mathbb{N}[X]$.

Alice et Bob jouent ensemble : Bob pense à un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{N}$ et Alice doit le deviner. À chaque tour, Alice choisit un entier $k \in \mathbb{Z}$ et Bob lui donne la valeur de $P(k)$. En combien de tours Alice (qui sait dès le début que les coefficients de P sont dans $\mathbb{N}$, mais n'a pas plus d'information sur ce polynôme ou son degré) peut-elle deviner P ?

♠ **Exercice 6.** Polynômes de Tchebychev de première espèce.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$.
2. Montrer $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2X T_{n+1} - T_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer :
 - ▶ le degré et le coefficient dominant de T_n ;
 - ▶ les racines de T_n , d'abord dans $[-1, 1]$, puis dans $\mathbb{C}$.

Racines, factorisations, relations de Viète

◦ **Exercice 7.** *Une suite non polynomiale.*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2 + (-1)^n$.

Exercice 8. *Une jolie application algébrique du TVI.*

Mines

Soit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. On note $P = aX^4 + bX^3 + cX^2 + dX + e$ et $Q = aX^2 + (c - b)X + e - d$.

Montrer que si Q possède une racine réelle $r > 1$, alors P possède une racine réelle.

Exercice 9. *Multiplicité d'une composée.*

Soit $A, B \in K[X]$ non nuls, et $z \in K$ une racine de A . Montrer que $\mu_z(B \circ A) = \mu_z(A) \mu_0(B)$.

◦ **Exercice 10.** *Factorisations réelles.*

Factoriser les polynômes suivants sur $\mathbb{R}$.

(i) $X^4 + X^2 + 1$;

(ii) $X^4 + X^2 - 6$;

(iii) $X^8 + X^4 + 1$.

Exercice 11. *Somme alternée de polynômes de Hilbert.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $1 - X + \frac{X(X-1)}{2} + \dots + (-1)^n \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

Exercice 12. *Une factorisation.*

On considère le polynôme $P = (1 - X^2)^3 + 8X^3$.

1. Déterminer les solutions complexes de l'équation $\left(\frac{1-z^2}{2z}\right)^3 = -1$.
2. En déduire la factorisation du polynôme P sur $\mathbb{C}$, puis sur $\mathbb{R}$.

◦ **Exercice 13.** *Systèmes polynomiaux et relations de Viète.*

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{C}$.

(i)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ xy + yz + zx = -5 \\ xyz = -6 \end{cases}$$

(ii)
$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8 \end{cases}$$

Exercice 14. *Septième somme de Newton.*

Soit $P = X^3 - X + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que P admet trois racines complexes distincts a, b et c .
2. Calculer $a^2 + b^2 + c^2$ et $a^7 + b^7 + c^7$.

Exercice 15. *Somme des différences au carré.*

Étant donné $P \in \mathbb{C}[X]$ dont les racines (avec multiplicité) sont $z_1, \dots, z_n$, on définit $E(P) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} (z_i - z_j)^2$.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$.

1. Exprimer $E(P)$ en fonction des coefficients de P .
2. En déduire $E(P') = \frac{(n-1)(n-2)}{n^2} E(P)$.

Exercice 16. Fonctions symétriques modulo σ_1 .

Soit $x, y, z \in \mathbb{C}$ de somme nulle. Montrer $\frac{x^5 + y^5 + z^5}{5} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \frac{x^3 + y^3 + z^3}{3}$.

♠ **Exercice 17.** Identités de Newton, cas facile.

Soit $z_1, \dots, z_n \in K$ et $P = \prod_{\ell=1}^n (X - z_\ell)$ un polynôme unitaire scindé sur K .

Pour tout $r \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $\sigma_r = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n} z_{j_1} \cdots z_{j_r}$ la r -ième fonction symétrique élémentaire.

1. Montrer $\forall k \geq n, \forall \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \sigma_{n-j} z_\ell^{j+k-n} = 0$.
2. Pour tout $s \in \mathbb{N}$, on note $p_s = \sum_{\ell=1}^n z_\ell^s$ la s -ième somme de Newton. Dédurre de la question précédente les identités de Newton $\forall k \geq n, \sum_{r=0}^n (-1)^r \sigma_r p_{k-r} = 0$.

♠★ **Exercice 18.** Identités de Newton, cas difficile.

Soit $0 \leq k \leq n$ deux entiers et $x_1, \dots, x_n \in K$.

Pour tout $A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $x_A = \prod_{a \in A} x_a$ et on introduit, pour tout $r \in \mathbb{N}$,

- ▶ les sommes de Newton $p_r = \sum_{j=1}^n x_j^r$
- ▶ et les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_r = \sum_{\substack{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \\ |A|=r}} x_A$ (qui sont donc nulles si $r > n$).

1. En simplifiant de deux façons la somme $\sum_{\substack{A \subseteq \llbracket 1, n \rrbracket \\ j \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ |A| \leq k}} (-1)^{|A|} x_A x_j^{k-|A|}$, démontrer l'identité de Newton :

$$\sum_{r=0}^k (-1)^r \sigma_r p_{k-r} = (-1)^k (n-k) \sigma_k.$$

2. Montrer que l'identité de Newton reste vraie si $k > n$.

Exercice 19. Une formule à la König-Huygens.

Soit $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ et $P = \prod_{k=1}^n (X - x_k)$. Déterminer $\min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{k=1}^n (x - x_k)^2$ en fonction des coefficients de P .

Exercice 20. Somme de valeurs de $\tan^2$.

1. Montrer que, pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $\tan^2 \frac{k\pi}{2n}$ est racine de $\sum_{p=0}^{n-1} (-1)^p \binom{2n}{2p+1} X^p$.
2. En déduire $\sum_{k=1}^{n-1} \tan^2 \frac{k\pi}{2n} = \frac{(n-1)(2n-1)}{3}$.

Exercice 21. Une identité trigonométrique.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le polynôme $P = \sum_{k=0}^n X^k$.

1. Factoriser P sur $\mathbb{C}$.
2. En déduire la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

★ **Exercice 22.** *Produit trigonométrique.*

Calculer $\prod_{k=1}^n \left(5 - 4 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$.

Équations fonctionnelles et autres contraintes

Exercice 23. *Une première équation fonctionnelle polynomiale.*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 - X + 1)P(X)$.

Exercice 24. *Une deuxième équation fonctionnelle polynomiale.*

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X + 1)P(X) = XP(X + 2)$.

Exercice 25. *Une troisième équation fonctionnelle polynomiale.*

Trouver les $P \in K[X]$ tels que $(X + 3)P = XP(X + 1)$.

Δ **Exercice 26.** *Une quatrième fonctionnelle polynomiale.*

Mines

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = P(X)P(X - 1)$.

♠ **Exercice 27.** *Formule de Cauchy et polynômes réels sur le cercle unité.*

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Calculer $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it}) e^{-ikt} dt$.
2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $\forall \omega \in \mathbb{U}, P(\omega) \in \mathbb{R}$.

Δ★ **Exercice 28.** *Polynômes stabilisant le cercle unité.*

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) \in \mathbb{U}$.

Exercice 29. *Régularité à droite.*

Soit $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que $Q \circ P = R \circ P$.

1. Montrer que si P n'est pas constant, alors $Q = R$.
2. Montrer que l'on ne peut pas étendre la question précédente à tous les polynômes P .

★ **Exercice 30.** *Polynômes commutant avec $X^2 + 1$.*

Putnam

On note $Q = X^2 + 1$. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P \circ Q = Q \circ P$.

Exercice 31. *Polynômes stabilisant les puissances.*

Soit $\tau \in]1, +\infty[$ et $\mathcal{T} = \{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Déterminer l'ensemble des polynômes P stabilisant $\mathcal{T}$, c'est-à-dire tels que $\forall x \in \mathcal{T}, P(x) \in \mathcal{T}$.

★ **Exercice 32.** *Une propriété d'imparité.*

X (PC)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel qu'il existe une infinité de couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $P(x) + P(y) = 0$.

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $P(X) + P(c - X) = 0$.

Exercice 33. *Deux jets égaux.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $\forall k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket, P^{(k)}(0) = P^{(k)}(1)$?

Exercice 34. *Polynômes harmoniques.*

On note $\mathcal{H} = \left\{ P \in \mathbb{R}[X] \mid \forall x \in \mathbb{R}, P(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} P(t) dt \right\}$.

- (a) Déterminer $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_1[X]$.
(b) Montrer $X^2 \notin \mathcal{H}$ et en déduire $\mathcal{H} \cap \mathbb{R}_2[X]$.
- Montrer que $\mathcal{H}$ est stable par dérivation, c'est-à-dire $\forall P \in \mathcal{H}, P' \in \mathcal{H}$.
- Que vaut $\mathcal{H}$?

Aspects linéaires

Exercice 35. *Invariance sous $\mathbb{U}_n$.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On note $\zeta_n = \exp\left(i \frac{2\pi}{n}\right)$. Montrer l'équivalence

$$P(X) = P(\zeta_n X) \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X] : P = Q(X^n).$$

Exercice 36. *Une famille libre.**Mines (PSI)*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré n et $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des scalaires distincts.

Montrer que $(P(X + a_i))_{i=0}^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

★ **Exercice 37.** *Une famille libre, bis.**Ulm*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme de degré $n > 0$ et $0 \leq k \leq n$.

Montrer que la famille $(1, X, \dots, X^{n-k-1}, P(X), P(X+1), \dots, P(X+k))$ est libre.

◦ **Exercice 38.** *Interpolation sans condition sur le degré.*

Soit $a_1, \dots, a_n \in K$ tous distincts et $b_1, \dots, b_n \in K$.

Déterminer tous les polynômes $P \in K[X]$ tels que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(a_i) = b_i$.

Exercice 39. *Rigidité, version géométrique.*

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. On suppose qu'il existe deux droites $D, D' \subseteq \mathbb{C}$ telles que $\{z \in D \mid P(z) \in D'\}$ contienne au moins $n+1$ éléments. Montrer que $\forall z \in D, P(z) \in D'$.

◦ **Exercice 40.** *Interpolation de Lagrange explicite.*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(k) = \frac{k}{k+1}$.

- Déterminer le polynôme $Q = (X+1)P - X$.
- En déduire $P(n+1)$.

Exercice 41. *Interpolation de Lagrange explicite, bis.*

Soit $r \in \mathbb{R}$. Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = r^k$. Calculer $P(n+1)$.

Exercice 42. *Interpolation de Lagrange explicite, ter.*

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket, P(k) = \frac{1}{k}$. Calculer $P(0)$.

Exercice 43. Une formule combinatoire par l'interpolation.

Exprimer de deux manières l'unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(k) = k^{n-1}$, et en déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} (-1)^{n-k} k^n.$$

Fractions rationnelles

Exercice 44. Points entiers d'une courbe rationnelle.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^3}{x^2 + 2x + 3}$. Déterminer les points entiers de son graphe, c'est-à-dire $\mathbb{Z}^2 \cap \text{gr}(f)$.

Exercice 45. Fractions rationnelles périodiques.

Déterminer les $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(X+1) = F(X)$.

Exercice 46. Polynôme composé de deux fractions rationnelles.

Soit $R \in \mathbb{R}(X)$ non constante telle que $R\left(\frac{X^2}{1+X^2}\right) \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que 1 est un pôle de R .

Exercice 47. Coefficients de Taylor d'une fraction rationnelle.

Soit $F \in \mathbb{R}(X)$ une fraction rationnelle dont 0 n'est pas un pôle. Montrer que la suite $\left(\frac{F^{(n)}(0)}{n!}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une certaine relation de récurrence linéaire (non triviale) à coefficients constants.

Décompositions en éléments simples

Exercice 48. Décompositions en éléments simples.

Décomposer en éléments simples (sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$) les fractions rationnelles suivantes.

- | | | | |
|--------------------------------------|--|----------------------------------|---------------------------------|
| (i) $\frac{X+1}{X^2+X+1}$; | (iii) $\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2}$; | (v) $\frac{X^4+1}{X^4-1}$; | (vii) $\frac{X^3-1}{(X-2)^2}$; |
| (ii) $\frac{1}{(X+1)^2(3-X)}$; | (iv) $\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2}$; | (vi) $\frac{3X-1}{X^2(X+1)^2}$; | (viii) $\frac{4}{(X^2+1)^2}$; |
| (ix) $\frac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1}$; | (x) $\frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2}$. | | |

Exercice 49. DL et DÉS.

- Donner un $DL_7(0)$ de $x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$.
- En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X^3+1}{X^8(X^2+1)}$.

Exercice 50. Décompositions en éléments simples réelles, dépendant de n .

Soit $n \geq 2$. Déterminer les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{R}$ des fractions rationnelles suivantes :

- (i) $\frac{X^2 + X + 1}{X^n}$; (iii) $\frac{1}{X(X-1)\cdots(X-n)}$;
 (ii) $\frac{X^{2n}}{(X^2 + 1)^n}$; (iv) $\frac{1}{X^n(1-X)^n}$.

Exercice 51. Décompositions en éléments simples complexes, dépendant de n .

Soit $n \geq 2$. Déterminer les décompositions en éléments simples sur $\mathbb{C}$ des fractions rationnelles suivantes :

- (i) $\frac{X^{n-1}}{X^n - 1}$; (iii) $\frac{X^n - 1}{X^n + 1}$;
 (ii) $\left(\frac{nX^{n-1}}{X^n - 1}\right)'$; (iv) $\frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$.

Exercice 52. Utilisation de la dérivation.

Déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de $\left(\frac{1}{X^n - 1}\right)'$, puis celle de $\frac{1}{(X^n - 1)^2}$.

Exercice 53. Image de la dérivation et résidus.

Notons $\mathcal{D} = \{R' \mid R \in \mathbb{C}(X)\}$.

- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle *résidu de F en z*, et on note $\text{rés}_z(F)$, le coefficient devant $\frac{1}{X-z}$ dans la décomposition en éléments simples de F. Montrer que $\mathcal{D} = \{F \in \mathbb{C}(X) \mid \forall z \in \mathbb{C}, \text{rés}_z(F) = 0\}$.
- Montrer que $\{R' \mid R \in \mathbb{R}(X)\} = \mathbb{R}(X) \cap \mathcal{D}$.

Applications aux polynômes

Exercice 54. Somme pondérée de puissances.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, unitaire de degré n , dont les racines complexes $x_1, \dots, x_n$ sont simples.

Calculer, pour tout $p \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, la somme $\sum_{k=1}^n \frac{x_k^p}{P'(x_k)}$.

Δ **Exercice 55.** Un très grand classique.

- En décomposant en éléments simples de $\frac{P'}{P}$, déterminer tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.
- Que se passe-t-il sur $\mathbb{R}$?

Exercice 56. Minoration des valeurs d'un polynôme.

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré $n \geq 1$. On note $Q = X(X-1)\cdots(X-n)$.

- Montrer $\frac{P}{Q} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{n!} \binom{n}{k} P(k) \frac{1}{X-k}$.
- En déduire $\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = n!$.
- En déduire $\max\{|P(k)| \mid k \in \llbracket 0, n \rrbracket\} \geq \frac{n!}{2^n}$.

Exercice 57. *Polynômes scindés à racines simples, via les fractions rationnelles.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Esquisser le tableau de variation de $x \mapsto \frac{P(x)}{P'(x)}$ et en déduire que $P + P'$ est scindé à racines simples.

★ **Exercice 58.** *Inégalité de Bernstein (1926).*

X

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n$ les racines de $X^n + 1$.

1. Montrer $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], XP' = \frac{n}{2}P + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \frac{z_k P(z_k X)}{(z_k - 1)^2}$.
2. Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\| = \sup_{z \in \mathbb{U}} |Q(z)|$. Montrer $\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \|P'\| \leq n \|P\|$.

Polynômes complexes, localisation des racines

Exercice 59. *Polynômes complexes comme somme de deux carrés, de deux cubes.*

X

1. Montrer que tout polynôme complexe s'écrit sous la forme $A^2 + B^2$, avec $A, B \in \mathbb{C}[X]$.
2. Le résultat est-il encore vrai avec l'écriture $A^3 + B^3$?

Exercice 60. *Racine dans Δ .*

Mines

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. On suppose que P possède une racine dans $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$.

Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $|P| = |Q|$ sur $\mathbb{U}$ et $|P| < |Q|$ sur Δ .

Exercice 61. P versus $P \circ P$.

X (PC)

Trouver les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que P et $P \circ P$ aient exactement les mêmes racines.

Exercice 62. *L'ensemble ordonné $\mathbb{C}[X]$.*

Déterminer les $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |P(z)| \leq |Q(z)|$.

◦ **Exercice 63.** *Le polynôme de Taylor de l'exponentielle est séparable.*

Montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ n'a que des racines simples sur $\mathbb{C}$.

Exercice 64. *Localisation d'une racine.*

X (PSI)

Montrer que le polynôme $P = X^{11} + 14X^2 - 5X + 1$ possède au moins une racine complexe de module < 1 .

Exercice 65. *Un polynôme.*

Mines

Soit $P(X) = nX^n - X^{n-1} - \dots - X - 1$.

Montrer qu'à part 1, les racines de P sont de module < 1 puis que P est à racines simples.

♠ **Exercice 66.** *Borne de Cauchy (1829).*

Soit $f(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme unitaire. Montrer que le module maximal ρ des racines de f vérifie

$$\rho \leq \max\left(1, \sum_{i=1}^{n-1} |a_i|\right) \text{ et } \rho \leq 1 + \max_{0 \leq i < n} |a_i|.$$

Exercice 67. *Théorème d'Eneström-Kakeya (1912).*

X

Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall i \in \llbracket 0, n \rrbracket, a_i > 0$.

1. On suppose $a_0 \geq a_1 \geq \dots \geq a_n$. Montrer que toutes les racines de P sont de module ≥ 1 .
2. Montrer qu'en général, les racines de P sont toutes dans la couronne

$$C(r, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid r \leq |z| \leq R\},$$

où r (resp. R) est le minimum (resp. maximum) des $\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)_{k=0}^{n-1}$.

♠ **Exercice 68.** *Continuité des racines, énoncé élémentaire.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$, possédant une racine $z \in \mathbb{C}$. Soit $\epsilon > 0$. Montrer que si $Q \in \mathbb{C}_n[X]$ possède des coefficients suffisamment proches de ceux de P , alors il existe $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $Q(\zeta) = 0$ et $|z - \zeta| \leq \epsilon$.

♠ **Exercice 69.** *Théorème de Gauss-Lucas (1868).*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 2$, dont les racines sont notées $z_1, \dots, z_n$.

Montrer que toute racine de P' s'écrit sous la forme $\sum_{j=1}^n p_j z_j$ où $p_1, \dots, p_n \in \mathbb{R}_+$ vérifient $p_1 + \dots + p_n = 1$, et interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 70. *Théorème d'Alexander-Walsh (1915).*

ÉNS

Soit $0 < m < n$ deux entiers naturels.

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ possédant 0 comme racine de multiplicité m et dont toutes les autres racines sont supposées de module ≥ 1 . Montrer que les racines non nulles de P' sont de module $\geq \frac{m}{n}$.
2. Montrer qu'il peut y avoir égalité à la question précédente.

Exercice 71. *Les applications polynomiales sont ouvertes, version quantitative.*

ÉNS

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) = 1$. Montrer que $D_{1/n} \subseteq P[D_1]$, où l'on note D_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r .

Polynômes réels, questions autour des polynômes scindés

◦ **Exercice 72.** *Le logarithme n'est pas un polynôme.*

Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\exists A > 0 : \forall x \geq A, P(x) = \ln(x).$$

Exercice 73. *Ordre au voisinage de $+\infty$.*

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ deux polynômes différents. Montrer que

$$(\exists A \in \mathbb{R} : \forall t \geq A, P(t) < Q(t)) \quad \text{ou} \quad (\exists A \in \mathbb{R} : \forall t \geq A, P(t) > Q(t)).$$

Exercice 74. *Presque faisable de tête.*

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $X^6 + aX + b \in \mathbb{R}[X]$ est-il scindé ?

Exercice 75. *Polynômes possédant peu de racines réelles.*

Soit $n \geq 2$. Combien le polynôme $X^n - X + 1$ possède-t-il de racines réelles ?

Exercice 76. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindés à racines simples.

Mines (PC)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé. Montrer que P n'a pas deux coefficients consécutifs nuls.

Exercice 77. Polynômes de $\mathbb{R}[X]$ scindés à racines simples, bis.

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant, simplement scindé.

Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, les racines complexes de $P - a$ sont de multiplicité au plus 2.

Exercice 78. Polynômes scindés de $\mathbb{R}[X]$.

Ulm

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé. Montrer que toute racine multiple de P' est racine de P .

Exercice 79. Racines de $P^2 + 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n simplement scindé.

Montrer que les racines complexes du polynôme $P^2 + 1$ dans $\mathbb{C}$ sont toutes simples.

Exercice 80. Théorème de Hermite-Poulain (1867).

X

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ simplement scindé, et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $P' + aP$ est simplement scindé.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, simplement scindés. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k P^{(k)}$ est simplement scindé ou nul.

Exercice 81. Inégalités de Laguerre (1880).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n . Montrer les assertions suivantes.

1. Si P est scindé, alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x) P^{(k+1)}(x) \leq P^{(k)}(x)^2$.
2. P est simplement scindé si et seulement si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x \in \mathbb{R}, P^{(k-1)}(x) P^{(k+1)}(x) < P^{(k)}(x)^2$.

★ **Exercice 82.** Théorème de Szőkefalvi-Nagy (1918).

Étant donné un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé non constant, on appelle *envergure* de P la différence $\text{env}(P)$ entre la plus grande racine de P et la plus petite.

Soit un polynôme scindé P de degré $n \geq 2$. On souhaite montrer $\text{env}(P') \geq \sqrt{\frac{n-2}{n}} \text{env}(P)$.

1. On note $(x_k)_{k=1}^n$ les racines de P , répétées selon leur multiplicité et classées par ordre croissant. Justifier que l'on peut supposer $-1 = x_1 < x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_{n-1} < x_n = 1$.
2. On note $x_* = \frac{1}{n-2} \sum_{k=2}^{n-1} x_k$. Montrer que la plus petite racine ξ_1 de P' vérifie $n\xi_1^2 - 2x_*\xi_1 - (n-2) \geq 0$.
3. Conclure.

Exercice 83. Perturbation monomiale et caractère simplement scindé.

ÉNS (PC)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n et simplement scindé.

Montrer que pour tout $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $P + \epsilon X^{n+1}$ est simplement scindé.

Exercice 84. Polynômes à racines réelles négatives.

Mines (enrichi)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré $n \geq 2$ dont toutes les racines sont réelles négatives.

1. Montrer $P'(0)P(1) \geq \frac{n^{n+1}}{(n-1)^{n-1}} P(0)$.
2. On suppose en outre P à coefficients entiers. Montrer $P'(0)P(1) \geq n 2^n P(0)$.

Exercice 85. *Inégalités de Newton.*

- Montrer que $P \mapsto P^\# = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$ définit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ qui préserve l'ensemble des polynômes scindés.
Connaissez-vous un autre endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ possédant cette propriété?
- Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \geq 1$. Montrer que la suite des coefficients de P est *ultra-log-concave*, c'est-à-dire que $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, a_k^2 \geq \frac{n-k+1}{n-k} \frac{k+1}{k} a_{k-1} a_{k+1}$.
- Vérifier que ces inégalités équivalent à $\forall k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket, \frac{a_k^2}{\binom{n}{k}^2} \geq \frac{a_{k-1}}{\binom{n}{k-1}} \frac{a_{k+1}}{\binom{n}{k+1}}$.

★ **Exercice 86.** *Encadrement des racines d'un polynôme scindé.*

Ulm

Soit $n \geq 2$ et $P = X^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k a_k X^{n-k}$ un polynôme réel scindé. Montrer que toutes les racines de P appartiennent au segment $\left[\frac{a_1}{n} - \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1} a_2}, \frac{a_1}{n} + \frac{n-1}{n} \sqrt{a_1^2 - \frac{2n}{n-1} a_2} \right]$.

★ **Exercice 87.** *Sommes partielles scindées d'une série entière.*

- Construire une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de nombres réels non nuls tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ soit scindé sur $\mathbb{R}$.
- Montrer qu'il est impossible d'obtenir de faire en sorte que toutes les racines de tous les P_n appartiennent au segment $[0, 1]$.
- Est-il possible de faire en sorte que toutes les racines de tous les P_n appartiennent à un même segment?

★ **Exercice 88.** *Théorème de Laguerre (1884).*

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé de degré n et $Q \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme scindé dont toutes les racines sont négatives ou nulles. Montrer que $\sum_{k=0}^n a_k Q(k) X^k$ est scindé ou nul.

★ **Exercice 89.** *Théorème de Hermite-Kakeya-Obreškov.*

Ulm

Soit P et $Q \in \mathbb{R}[X]$ non constants. Montrer que les deux assertions sont équivalentes :

- pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non tous nuls, $\lambda P + \mu Q$ est scindé à racines simples ;
- P et Q sont scindés à racines simples, premiers entre eux, et entre deux racines de l'un se trouve toujours une racine de l'autre.

★ **Exercice 90.** *Théorème de Hermite-Biehler (1879).*

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non constants. On note $F = P + iQ$ et $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im z > 0\}$.

- On suppose que toutes les racines complexes de F appartiennent à $\mathbb{H}$.
 - Montrer $\forall z \in \mathbb{H}, |F(z)| < |F(\bar{z})|$ et en déduire que P et Q sont scindés et premiers entre eux.
 - Montrer que le polynôme $W_{P,Q} := PQ' - P'Q$ prend des valeurs > 0 sur $\mathbb{R}$ et en déduire que les racines de P et Q sont simples et qu'entre deux racines de l'un se trouve toujours une racine de l'autre. (On dit que les racines de P et Q sont *entrelacées*).
- On suppose réciproquement P et Q scindés à racines simples, premiers entre eux, et que leurs racines sont entrelacées. Montrer que les racines de F appartiennent toutes à $\mathbb{H}$, ou toutes à $-\mathbb{H}$.

Δ Exercice 91. *Polynôme positif.*

Ulm

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n , et $Q = P + P' + \dots + P^{(n)}$.

Montrer que si P est à valeurs positives (c'est-à-dire que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$), alors Q aussi.

Δ Exercice 92. *Positivstellensatz sur $\mathbb{R}$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'équivalence $P \in \mathcal{S} \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.

Exercice 93. *Positivstellensatz sur $\mathbb{R}_+$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $(\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists A, B \in \mathbb{R}[X] : P = A^2 + XB^2)$.

★ Exercice 94. *Positivstellensatz sur $[-1, 1]$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer $(\forall x \in [-1, 1], P(x) \geq 0) \Leftrightarrow (\exists A, B \in \mathbb{R}[X] : P = A^2 + (1 - X^2)B^2)$.

★ Exercice 95. *Polynômes strictement positifs sur $\mathbb{R}_+$.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, P(x) > 0$.

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q non nul à coefficients positifs tels que PQ soit à coefficients positifs.
2. Montrer qu'en fait, pour n assez grand, $(1 + X)^n P$ est à coefficients strictement positifs.

Polynômes à coefficients entiers ou à valeurs entières

Exercice 96. *Division euclidienne par un unitaire.*

Soit A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose B unitaire. Montrer l'existence et l'unicité d'un couple (Q, R) de polynômes à coefficients entiers tels que $A = BQ + R$ et $\deg R < \deg B$.

Exercice 97. *Autour de la formule de Cauchy discrète.*

X

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $< n$.

1. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, calculer $\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega) \omega^{-k}$.
2. On suppose maintenant $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P(0) = 1$ et $\forall \omega \in \mathbb{U}_n, P(\omega) \in \mathbb{R}_+$.
Montrer que les coefficients de P appartiennent tous à $\{0, -1, 1\}$.

Exercice 98. *Représentation négabinaire.*

X

Montrer que tout entier relatif s'écrit de façon unique sous la forme $P(-2)$, où P est un polynôme à coefficients dans $\{0, 1\}$.

Exercice 99. *Polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.*

X

Soit E l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$ et A l'ensemble des racines réelles non nulles des polynômes de E .

1. Montrer que A est stable sous les applications $x \mapsto -x$ et $x \mapsto 1/x$.
2. Montrer que $A \subseteq [-2, 2]$.
3. Montrer que A est dense dans $[-2, -1/2] \cup [1/2, 2]$.

Exercice 100. *Polynômes induisant une surjection $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que P induise une application surjective $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Montrer que $P = X$.

♠ **Exercice 101.** *Polynômes entiers et congruences.*

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$.

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\forall x, y \in \mathbb{Z}, x \equiv y \pmod{n} \Rightarrow P(x) \equiv P(y) \pmod{n}$.
2. On suppose que $P(0)$ et $P(1)$ sont impairs. Montrer que P ne possède pas de racine entière.

Exercice 102. *Un théorème de Goldbach.*

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, le nombre entier $P(n)$ soit premier. Montrer que P est constant.

Exercice 103. *Théorème de Hajdu, Tijdeman et Varga (2023).*

X

Soit $P = \sum_{k=0}^n c_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$, de degré n , scindé sur $\mathbb{R}$ et tel que $P(0) \neq 0$. On note $H = \max(|c_0|, \dots, |c_n|)$.

1. Montrer $|P(i)|^2 \leq \left(\frac{n^2}{2} + n + 1\right) H^2$.
2. Montrer $|P(i)|^2 \geq 2^n$.
3. En déduire que, si $n \geq 10$, alors $n \leq 5 \log_2(H)$.

♠ **Exercice 104.** *Polynômes à valeurs entières.*

On note $\mathcal{G} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{Q}[X]$, mais que $\mathcal{G} \not\subseteq \mathbb{Z}[X]$.
2. Montrer que $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$ définit une application $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\binom{n}{X} = \frac{X(X-1)\cdots(X-n+1)}{n!}$. C'est le n -ième *polynôme de Hilbert*.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\binom{n}{X} \in \mathcal{G}$ et calculer son image par Δ .
4. Montrer que $\mathcal{G}$ est l'ensemble des combinaisons $\mathbb{Z}$ -linéaires des polynômes de Hilbert.

★ **Exercice 105.** *Continuité p -adique des polynômes à valeurs entières.*

ÉNS

On dit qu'une suite d'entiers $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un *pseudopolynôme* si, pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$, la différence $n - m$ divise $a_n - a_m$.

1. Justifier la terminologie en montrant que si $P \in \mathbb{Z}[X]$, alors $(P(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un pseudopolynôme.
2. Montrer que $([n! e])_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un pseudopolynôme.

On note $\mathcal{G} = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid \forall n \in \mathbb{N}^*, P(n) \in \mathbb{Z}\}$.

3. Trouver $P \in \mathcal{G}$ tel que $(P(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ ne soit pas un pseudopolynôme.
4. Soit $P \in \mathcal{G}$, p premier et $r \in \mathbb{N}^*$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $p^k > \deg P$, alors

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, p^{k+r} \mid n - m \Rightarrow p^{r+1} \mid P(n) - P(m).$$

Exercice 106. *PGCD de l'image d'un polynôme.*

X

Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(P(0), \dots, P(n))$ divise $P(k)$.

Exercice 107. *Concentration vers les entiers.*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\exp(i 2\pi P(n)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.

♠ **Exercice 108.** *$\mathbb{Z}$ est intégralement clos.*

Soit $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres entiers et $x \in \mathbb{Q}$ tel que $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$.

Montrer que $x \in \mathbb{Z}$.

Indications

Exercice 4. On pourra se souvenir de la factorisation de $a^3 - b^3 \dots$

Exercice 5. De manière complètement surprenante, Alice peut déterminer le polynôme en seulement deux questions !

Exercice 8. Si $r > 1$ est une racine de Q , l'expression de P en fonction de Q permet de calculer facilement $P(\pm\sqrt{r})$.

Exercice 14. En notant $p_k = a^k + b^k + c^k$, on trouvera facilement une relation de récurrence exprimant p_{k+3} en fonction de p_k et p_{k+1} .

Exercice 18. L'une des deux façons consiste à observer qu'il y a une simplification presque totale : observer par exemple que la somme contient deux fois le monôme $x_1^2 x_2$, avec des signes opposés.

Exercice 21. Pour la deuxième question, on pourra partir du produit, utiliser la formule d'Euler puis, dans chaque facteur du produit, une factorisation permettant de faire apparaître la valeur $P(1) = n + 1$.

Exercice 22. On pourra commencer par factoriser le polynôme $T_{2n} - 1$, où l'on a noté T_{2n} le $(2n)$ -ième polynôme de Tchebychev. À partir de là, on pourra mettre la main sur un polynôme dont les $5 - 4 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ sont racines doubles, puis appliquer une relation coefficients-racines.

Exercice 26. On pourra commencer par montrer que les racines non nulles de P sont nécessairement des racines de l'unité, puis montrer qu'en fait toutes les racines de P appartiennent à $\{j, j^2\}$.

Exercice 28. En notant $P = \sum_{n=0}^d a_n X^n$ un polynôme vérifiant la condition, on pourra commencer par montrer la condition $\forall k \in \llbracket -d, d \rrbracket, \sum_{\substack{n,m \in \llbracket 0,d \rrbracket \\ m-n=k}} \bar{a}_n a_m = \delta_{n,m}$.

Exercice 30. On pourra commencer par montrer qu'un tel polynôme est forcément pair ou impair. L'un de ces cas est alors plus direct que l'autre.

Exercice 33. Le titre de l'exercice parle de « jets » pour ne pas trop spoiler. On aurait pu dire « développement de Taylor ».

Exercice 41. On pourra utiliser la formule explicite du polynôme interpolateur.

Exercice 42. La condition nous invite à considérer le polynôme $Q = XP - 1$. Qu'en dire ?

Exercice 46. On pourra s'intéresser aux propriétés asymptotiques de $R\left(\frac{X^2}{1+X^2}\right)$.

Exercice 48.

- (i) $\frac{X+1}{X^2+X+1} = \frac{1}{3} \frac{1-j}{X-j} + \frac{1}{3} \frac{1-\bar{j}}{X-\bar{j}}$ (sur $\mathbb{R}$, c'est déjà un élément simple);
- (ii) $\frac{1}{(X+1)^2(3-X)} = -\frac{1}{16} \frac{1}{X-3} + \frac{1}{16} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(X+1)^2}$;
- (iii) $\frac{1}{(X^2-1)(X+1)^2} = \frac{1}{(X-1)(X+1)^3} = \frac{1}{8} \frac{1}{X-1} - \frac{1}{8} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{4} \frac{1}{(X+1)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(X+1)^3}$;
- (iv) $\frac{7X^2+4X-4}{X^4-4X^2} = -\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \frac{2}{X-2} - \frac{1}{X+2}$;
- (v) $\frac{X^4+1}{X^4-1} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} + \frac{i}{2} \frac{1}{X-i} - \frac{i}{2} \frac{1}{X+i} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{X-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} - \frac{1}{X^2+1}$;

$$\begin{aligned}
\text{(vi)} \quad & \frac{3X-1}{X^2(X+1)^2} = \frac{5}{X} - \frac{1}{X^2} - \frac{5}{X+1} - \frac{4}{(X+1)^2}; \\
\text{(vii)} \quad & \frac{X^3-1}{(X-2)^2} = X+4 + \frac{12}{X-2} + \frac{7}{(X-2)^2}; \\
\text{(viii)} \quad & \frac{4}{(X^2+1)^2} = -\frac{1}{(X-i)^2} - \frac{i}{X-i} - \frac{1}{(X+i)^2} + \frac{i}{X+i} \text{ (sur } \mathbb{R}, \text{ c'est déjà un élément simple);} \\
\text{(ix)} \quad & \frac{X^2+X+1}{X^3+X^2+X+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4} \frac{1-i}{X-i} + \frac{1}{4} \frac{1+i}{X+i} = \frac{1}{2} \frac{1}{X+1} + \frac{1}{2} \frac{X+1}{X^2+1}; \\
\text{(x)} \quad & \frac{3X^4+X^3+4X^2-X-3}{(X+1)(X^2+1)^2} = \frac{1}{X+1} + \frac{1}{4} \frac{4+5i}{X-i} + \frac{1}{4} \frac{3-i}{(X-i)^2} + \frac{1}{4} \frac{4-5i}{X+i} + \frac{1}{4} \frac{3+i}{(X+i)^2} \\
& = \frac{1}{X+1} + \frac{2X-1}{X^2+1} + \frac{X-3}{(X^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Exercice 50.

- Pour la deuxième fraction, on peut remarquer que la détermination de la DÉS de $\frac{(X^2-1)^n}{X^{2n}}$ serait plutôt facile. Or, elle n'est pas très différente de celle qui est demandée.
- Pour la dernière fraction, on pourra par exemple utiliser des arguments de nature asymptotique et de symétrie.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \frac{X^2+X+1}{X^n} = \frac{1}{X^{n-2}} + \frac{1}{X^{n-1}} + \frac{1}{X^n}; \\
\text{(ii)} \quad & \frac{X^{2n}}{(X^2+1)^n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{(X^2+1)^k}; \\
\text{(iii)} \quad & \frac{1}{X(X-1)\dots(X-n)} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{(-1)^{n-k}}{X-k}; \\
\text{(iv)} \quad & \frac{1}{X^n(1-X)^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k}{k} \frac{1}{X^{n-k}}.
\end{aligned}$$

Exercice 51. Pour la dernière, on peut utiliser un argument asymptotique pour déterminer le coefficient devant $\frac{1}{X-1}$. Il s'agit alors de calculer $\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1-\omega}$, ce que l'on peut interpréter comme $\frac{P'(1)}{P(1)}$ pour un polynôme P bien choisi.

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad & \frac{X^{n-1}}{X^n-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{X-\omega}; \\
\text{(ii)} \quad & \left(\frac{nX^{n-1}}{X^n-1} \right)' = - \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{(X-\omega)^2}; \\
\text{(iii)} \quad & \frac{X^n-1}{X^n+1} = 1 + \frac{2}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_{2n} \setminus \mathbb{U}_n} \frac{\omega}{X-\omega}; \\
\text{(iv)} \quad & \frac{1}{(X-1)(X^n-1)} = \frac{1-n}{2n} \frac{1}{X-1} + \frac{1}{n} \frac{1}{(X-1)^2} + \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{c_\omega}{\omega-1}, \text{ où, pour tout } \omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}, \text{ on a } c_\omega = \\
& \frac{1}{1-\omega^{n-1}} = \frac{1}{1-\bar{\omega}} = \frac{\omega}{\omega-1}.
\end{aligned}$$

Exercice 53. La décomposition en éléments simples a aussi des conséquences théoriques !

Exercice 59. On pourra commencer par montrer que $\{A^2+B^2 \mid A, B \in \mathbb{C}[X]\}$ est stable par produit.

Exercice 60. La difficulté est de garder le même module sur le cercle unité. Pour la contourner, on pourra se souvenir que $\forall \omega \in \mathbb{U}, \bar{\omega} = \omega^{-1}$.

Exercice 64. On pourra se souvenir que $\forall z \in \mathbb{U}, z^{-1} = \bar{z}$.

Exercice 67. Pour la première question, on commencera par calculer le produit $(1 - X)P$.

Pour la deuxième question, on cherchera à définir des polynômes auxiliaires auxquels appliquer la première question. Notamment, on se demandera comment fabriquer un polynôme dont les racines sont les inverses des racines de P .

Exercice 68. On pourra commencer par se ramener au cas $z = 0$.

Exercice 69. On pourra écrire la décomposition en éléments simples de la dérivée logarithmique $\frac{P'}{P}$.

Exercice 70. On pourra écrire la décomposition en éléments simples de la dérivée logarithmique $\frac{P'}{P}$.

Exercice 71. En notant $x_1, \dots, x_n$ les racines de $P - y$, on pourra commencer par calculer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}$ quand cela a un sens.

Exercice 80. On n'oubliera pas que le théorème de Rolle s'applique également à des fonctions non polynomiales !

Exercice 82. Pour la deuxième question, on pourra utiliser la dérivée logarithmique de P et la convexité de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour la troisième, on pourra commencer par écrire l'inégalité vérifiée par la plus grande racine ξ_{n-1} de P' .

Exercice 85. Pour la deuxième question, en combinant les opérations mentionnées à la question précédente, on peut fabriquer un polynôme scindé de degré 2 mettant en jeu les coefficients a_{k-1} , a_k et a_{k+1} .

Exercice 87. Pour la deuxième question, notez qu'on peut exprimer $\frac{a_1}{a_0}$ en fonction des racines de P_n .

Exercice 88. On pourra commencer par traiter le cas $Q = X + \alpha$ ($\alpha > 0$) en exprimant le polynôme obtenu en fonction de XP' .

Exercice 89. Dans le sens direct, on pourra montrer que $t \mapsto \frac{P(t)}{Q(t)}$ est strictement monotone sur chacun des intervalles où elle est définie, en vérifiant que sa dérivée ne peut pas s'annuler.

Exercice 90. Pour la question 1(b) (comme souvent), il sera pertinent d'écrire la dérivée logarithmique $\frac{F'}{F}$ en fonction des racines de F .

Pour la deuxième question, on pourra commencer par supposer $\deg P \leq \deg Q$ et montrer que les éléments simples de la fraction rationnelle $R = \frac{P}{Q}$ ont des coefficients de même signe, ce qui permet de montrer que $z \mapsto \Im R(z)$ est de signe constant sur $\mathbb{H}$.

Exercice 91. On pourra entre autres calculer $Q - Q'$.

Exercice 92. Pour la deuxième question, on pourra se demander à quoi ressemble la décomposition en facteurs irréductibles d'un polynôme à valeurs positives.

Exercice 95.

1. Pour la première question, on pourra se ramener au cas de $P = (X - e^{i\theta})(X - e^{-i\theta})$.
2. La deuxième question est assez bêtement calculatoire : on peut vérifier que le signe des coefficients de $(1 + X)^n(X^2 + bX + c)$ est gouverné par un certain polynôme du second degré (dépendant de b , c et n) et déterminer le signe de son discriminant quand n est assez grand.

Exercice 97. On pourra notamment exploiter l'inégalité triangulaire.

Exercice 98. Si l'on s'intéresse à l'analogue de l'exercice pour des polynômes de degré $\leq d$, on est en train de montrer une bijection entre deux ensembles finis (à déterminer). Les théorèmes du cours peuvent permettre de ne faire que la moitié du travail.

Exercice 99. Pour la dernière question, on pourra prendre $x \in]1/2, 1[$ et construire une suite de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $P_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} \in \{P_n, P_n + X^{n+1}\}$ vérifiant que la suite $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ reste toujours négative mais qu'elle s'approche infiniment près de 0.

Il reste ensuite à passer de « x est presque une racine de P_n » à « x est très près d'une racine de P_n ».

Exercice 100. On pourra examiner ce qu'il se passe à droite du dernier point critique de la fonction polynomiale $t \mapsto P(t)$ (si elle en a un).

Exercice 105. Pour la deuxième question, on pourra utiliser (intelligemment) la première question, ou interpréter de façon combinatoire les nombres entiers $[n! e]$.

Pour la dernière question, on pourra montrer que si $d < p^k$, alors $\forall j \in \llbracket 1, d \rrbracket, p^{r+1} \mid \binom{p^{k+r}}{j}$, et constater que cela démontre la propriété voulue pour $P = \binom{X}{d}$.

Exercice 107. On pourra chercher à faire intervenir l'opérateur aux différences finies Δ .