Intersections atypiques

Le thème de ce problème est l'étude des intersections atypiques : étant donnés deux ensembles A et B, une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ et un sous-ensemble « exceptionnel » C de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$, le graphe de f ne peut pas rencontrer C en beaucoup de points, sauf si la fonction f est elle-même « exceptionnelle ». La première partie, de nature plus algébrique, étudie le cas où la fonction f est donnée par une fraction rationnelle, l'ensemble « exceptionnel » étant soit $\left\{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,\middle|\, |x| = |y| = 1\right\}$, soit l'ensemble des points du plan dont les coordonnées sont des racines de l'unité. La deuxième partie, plus analytique et totalement indépendante de la première, étudie le cas d'une fonction « transcendante » f (par exemple $f(x) = e^x$), l'ensemble exceptionnel C étant un réseau du plan.

Question préliminaire

1. Soit $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle et $n \geq 2$ un entier. Montrer que si $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ vérifie $|\mathrm{Z}(g)| \geq n$, alors $|\mathrm{Z}(g^{(i)})| \geq n - i$ pour tout $1 \leq i \leq n-1$.

   On fixe I *comme dans l'énoncé, mais on va faire varier n.*[1]
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, *notons* $\mathrm{P}(n)$ *l'assertion « pour tout* $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$, *si* $|\mathrm{Z}(g)| \geq n$, *alors* $\forall i \in \mathbb{N}, |\mathrm{Z}(g^{(i)})| \geq n - i$. *»*
   Montrons $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{P}(n)$ *par récurrence, ce qui conclura.*

   Initialisation. *L'assertion* $\mathrm{P}(1)$ *est vraie de façon triviale : si* $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *s'annule au moins une fois, alors g s'annule au moins une fois et ses dérivées successives s'annulent au moins zéro fois.*

   Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{P}(n)$. *Soit* $g \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ *tel que* $|\mathrm{Z}(g)| \geq n+1$. *On peut donc trouver* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ *appartenant à* I *tels que* $g(x_0) = g(x_1) = \cdots = g(x_n) = 0$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, *la fonction g est lisse donc* a fortiori *continue en tout point de* $[x_{i-1}, x_i]$ *et dérivable sur* $]x_{i-1}, x_i[$, *et* $g(x_{i-1}) = g(x_i) = 0$. *D'après le théorème de Rolle, on peut donc trouver* $y_i \in]x_{i-1}, x_i[$ *tel que* $g'(y_i) = 0$. *La localisation de ces zéros montre que* $y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ *appartiennent à* I.
   La fonction g', *qui reste lisse, s'annule donc au moins n fois, ce qui entraîne* $\forall i \in \mathbb{N}, |\mathrm{Z}(g^{(i+1)})| \geq n - i = (n+1) - (i+1)$ *d'après* $\mathrm{P}(n)$.
   Par un changement d'indices et en réintégrant le cas (évident) $j = 0$, *on a donc* $\forall j \in \mathbb{N}, |\mathrm{Z}(g^{(j)})| \geq n + 1 - j$.
   On a donc montré $\mathrm{P}(n+1)$, *ce qui clôt la récurrence.*

1. L'énoncé a manifestement voulu éviter que les candidats se posent trop de questions zérologiques dès la première question. Je rétablis dans la récurrence l'énoncé sous la forme qui me paraît la plus simple : on notera notamment que l'énoncé reste vrai, pour des raisons stupides mais différentes, si $i = 0$ et si $i \geq n$.

I Intersections atypiques et fractions rationnelles

Pour $G(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux et $Q \neq 0$, on note $\mathscr{P}(G) = \{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) = 0\}$ l'ensemble des pôles de G et on note abusivement $G : \mathbb{C} \setminus \mathscr{P}(G) \to \mathbb{C}$ la fonction envoyant x sur $P(x)/Q(x)$.

Fractions rationnelles et rationalité

Soit K un sous-corps de $\mathbb{C}$ et soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathscr{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. On se propose de montrer que $F \in K(X)$. On écrit $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P \in \mathbb{C}[X]_p$ et $Q \in \mathbb{C}[X]_q \setminus \{0\}$ pour certains entiers $p, q \geq 0$. On note $d = p + q + 1$.

2. (a) Soient $x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d \in K$. Montrer que l'application linéaire

$$\varphi : K[X]_p \times K[X]_q \to K^d, \qquad \varphi(U, V) := (U(x_i) - y_i V(x_i))_{1 \leq i \leq d}$$

n'est pas injective.

La linéarité de l'application est claire. On a

$$\dim\big(K[X]_p \times K[X]_q\big) = \dim K[X]_p + \dim K[X]_q = p + q + 2 > d = \dim K^d,$$

donc l'application φ ne saurait être injective.

(b) Soient $x_1, \dots, x_d \in K \setminus \mathscr{P}(F)$ deux à deux distincts tels que

$$F(x_1), \dots, F(x_d) \in K.$$

Montrer qu'il existe $U \in K[X]_p$ et $V \in K[X]_q$ tels que $(U, V) \neq (0, 0)$ et $P(x_i)V(x_i) = Q(x_i)U(x_i)$ pour $1 \leq i \leq d$. En déduire que $F \in K(X)$.

L'énoncé n'étant pas explicite sur ce point, on suppose que P/Q est une forme irréductible de F.
On considère l'application φ de la question précédente associée aux x_i de l'énoncé et à la famille-image $(y_i)_{i=1}^d = \big(F(x_i)\big)_{i=1}^d = \left(\dfrac{P(x_i)}{Q(x_i)}\right)_{i=1}^d$, bien définie car les x_i sont supposés ne pas être des pôles de F et que P/Q est une forme irréductible de F.
La non-injectivité de φ entraîne que l'on peut trouver un couple non nul $(U, V) \in \ker \varphi$. Pour tout indice $i \in [\![1, d]\!]$, on a $U(x_i) - \dfrac{P(x_i)}{Q(x_i)} V(x_i) = 0$, c'est-à-dire $U(x_i)Q(x_i) = P(x_i)V(x_i)$.
Vu les degrés de leurs facteurs, les deux polynômes UQ et PV appartiennent à $\mathbb{C}[X]_{p+q}$. Comme les x_i sont distincts, ces deux polynômes coïncident en $d > p + q$ points, donc sont égaux par rigidité polynomiale. On en déduit $UQ = PV$.
Comme Q est non nul, on peut réécrire cette égalité $U = \dfrac{P}{Q} V$. On constate alors que $V \neq 0$ (si V était nul, on aurait $U = 0$, mais cela contredit $(U, V) \neq (0, 0)$), donc $F = \dfrac{P}{Q} = \dfrac{U}{V}$.
Comme $U, V \in K[X]$, on a bien $F \in K(X)$.

(c) Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(K \setminus \mathscr{P}(F)) \cap K$ soit un ensemble infini. Montrer que $F \in K(X)$.

On peut trouver $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ tels que $Q \neq 0$ et $F = \dfrac{P}{Q}$. Puisque la fraction nulle appartient bien à $K(X)$, on peut supposer $F \neq 0$ et donc $P \neq 0$. Posons alors $d = \deg P + \deg Q + 1$.
L'ensemble $F(K \setminus \mathscr{P}(F)) \cap K$ étant infini, on peut trouver $y_1, \dots, y_d$ distincts lui appartenant puis, par définition, $x_1, \dots, x_d \in K \setminus \mathscr{P}(F)$ tels que $\forall i \in [\![1, d]\!], F(x_i) = y_i$. Notons que cela force les x_i à être également distincts.
On peut alors appliquer la question précédente : $F \in K(X)$.

Intersections avec le cercle unité

Soit $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$. On dit qu'une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ est *spéciale* si l'ensemble

$$\{z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F) \,|\, F(z) \in \mathbb{U}\}$$

est infini. On se propose de décrire les fractions rationnelles spéciales.

Si $z \in \mathbb{C}$ on note $\overline{z}$ son conjugué. Si $P(X) = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i \in \mathbb{C}[X]$ on note

$$\overline{P}(X) = \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i} X^i.$$

Dans les questions 3 à 5 on fixe $F(X) = P(X)/Q(X) \in \mathbb{C}(X)$, avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ et $Q \neq 0$.
On pose $\overline{F}(X) = \overline{P}(X)/\overline{Q}(X)$ et $G(X) = \overline{F}(1/X)$.

3. (a) Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$. Montrer que $F(z) \in \mathbb{U}$ si et seulement si $F(z)G(z) = 1$.

Remarquons d'abord que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{P(z)} = \overline{\sum_{i=0}^{d} a_i z^i} = \sum_{i=0}^{d} \overline{a_i}\,\overline{z}^i = \overline{P}(\overline{z})$.

La même chose est évidemment vraie pour Q. En particulier, si l'on suppose que $F = \frac{P}{Q}$ est l'écriture irréductible de F, on obtient pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z \in \mathcal{P}(\overline{F}) \Leftrightarrow \overline{Q}(z) = 0 \Leftrightarrow Q(\overline{z}) = 0 \Leftrightarrow \overline{z} \in \mathcal{P}(F)$: les pôles de F et ceux de $\overline{F}$ sont conjugués.

Enfin, on voit que le conjugué de $F(z)$ est $\frac{\overline{P(z)}}{\overline{Q(z)}} = \frac{\overline{P}(\overline{z})}{\overline{Q}(\overline{z})} = \overline{F}(\overline{z})$.

Dans notre cas, comme $z \in \mathbb{U}$ n'est pas un pôle de F, $\overline{z} = \frac{1}{z}$ n'est pas un pôle de $\overline{F}$ et on a

$$F(z) \in \mathbb{U} \Leftrightarrow F(z)\overline{F(z)} = 1 \Leftrightarrow F(z)\overline{F}(\overline{z}) = 1 \Leftrightarrow F(z)\overline{F}\left(\frac{1}{z}\right) = 1 \Leftrightarrow F(z)G(z) = 1.$$

(b) En déduire que F est spéciale si et seulement si $G(X) \cdot F(X) = 1$.

- *Supposons F spéciale. Soit $E \subseteq \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$ un ensemble infini tel que $\forall z \in E, F(z) \in \mathbb{U}$.*
  Soit $A, B \in \mathbb{C}[X]$ tels que $B \neq 0$ et $G = \frac{A}{B}$. Pour tout z appartenant à l'ensemble infini E (qui est disjoint des pôles de F), la question précédente donne $G(z)F(z) = 1$, donc $A(z)P(z) = B(z)Q(z)$. Par rigidité polynomiale, on en déduit $AP = BQ$, donc $GF = \frac{A}{B}\frac{P}{Q} = 1$.
- *Réciproquement, supposons $GF = 1$. Pour tout z appartenant à l'ensemble $\mathbb{U} \setminus (\mathcal{P}(F) \cup \mathcal{P}(G))$, on a donc $G(z)F(z) = 1$, c'est-à-dire $F(z) \in \mathbb{U}$. Comme cet ensemble est infini, F est spéciale.*

Remarque. A posteriori, *cette question montre que si F est spéciale, alors $F(z) \in \mathbb{U}$ pour tout élément $z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$: en effet, pour $z \in \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$, on a $\frac{1}{z} = \overline{z} \notin \mathcal{P}(\overline{F})$ et on obtient $F(z)G(z) = 1$ en évaluant la relation, ce qui donne $F(z) \in \mathbb{U}$.*

4. Montrer que si $\alpha \in \mathbb{C}$ alors $B_\alpha(X) = \frac{X - \alpha}{1 - \overline{\alpha}X}$ est spéciale. Que vaut $B_\alpha(X)$ pour $\alpha = 0$ et pour $\alpha \in \mathbb{U}$?

- *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On a, en utilisant la définition de la conjugaison des fractions rationnelles,*

$$B_\alpha(X)\overline{B}_\alpha\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{X - \alpha}{1 - \overline{\alpha}X}\frac{1/X - \overline{\alpha}}{1 - \overline{\overline{\alpha}}\frac{1}{X}} = \frac{X - \alpha}{1 - \overline{\alpha}X}\frac{1 - \overline{\alpha}X}{X - \alpha} = 1,$$

  donc B_α est spéciale d'après la question précédente.
- *On a directement $B_0(X) = X$.*
- *Si $\alpha \in \mathbb{U}$, on a $B_\alpha(X) = \frac{X - \alpha}{1 - \overline{\alpha}X} = \alpha\frac{X - \alpha}{\alpha - \alpha\overline{\alpha}X} = \alpha\frac{X - \alpha}{\alpha - X} = -\alpha$.*

5. On suppose que F est spéciale.

(a) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^* \setminus \mathcal{P}(F)$. Montrer que $F(\alpha) = 0$ si et seulement si $1/\overline{\alpha} \in \mathcal{P}(F)$.

- *Supposons* $F(\alpha) = 0$. *Si (par l'absurde)* $1/\overline{\alpha}$ *n'était pas un pôle de* F, *alors* $1/\alpha$ *ne serait pas un pôle de* $\overline{F}$ *et on obtiendrait* $0 \times \overline{F}(1/\alpha) = 1$ *en évaluant la relation précédente, ce qui constitue une contradiction. Ainsi, on a bien démontré* $1/\overline{\alpha} \in \mathcal{P}(F)$.
- *Comme* F *est spéciale, on a* $F(X)\,\overline{F}\left(\frac{1}{X}\right) = 1$. *Cela entraîne que* F *est non nulle et que* $\overline{F}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{F(X)}$.
  En revenant à une forme irréductible, on voit par ailleurs que les pôles de $\frac{1}{F}$ *sont les zéros de* F, *et réciproquement.*
  Supposons donc $1/\overline{\alpha} \in \mathcal{P}(F)$, *si bien que* $1/\overline{\alpha} \in Z(1/F)$. *On en déduit*

$$0 = \overline{F}\left(\frac{1}{1/\overline{\alpha}}\right) = \overline{F}(\overline{\alpha}) = \overline{F(\alpha)} \qquad \textit{donc} \qquad F(\alpha) = 0.$$

(b) Montrer que si $F \in \mathbb{C}[X]$ alors il existe $c \in \mathbb{U}$ et $d \in \mathbb{N}$ tels que $F(X) = cX^d$.

Puisque F *est un polynôme,* $\mathcal{P}(F) = \emptyset$. *D'après la question précédente, cela entraîne que* $Z(F) \subseteq \{0\}$. *D'après la factorisation des polynômes sur* $\mathbb{C}$ *(souvenons-nous que* F *est spécial, donc non nul), on obtient* $F = cX^d$, *où* $c \in \mathbb{C}^*$ *est le coefficient dominant de* F *et* $d \in \mathbb{N}$ *est la multiplicité de* 0.
On obtient donc $\forall z \in \mathbb{U}, |F(z)| = |c|$ *: le caractère spécial de* F *force donc* $|c| = 1$, *c'est-à-dire* $c \in \mathbb{U}$.

(c) Montrer qu'il existe des entiers d, n avec $n \geq 0$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que

$$F(X) = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(X).$$

On pourra écrire $F(X) = P(X)/Q(X)$ et raisonner par récurrence sur le nombre de racines de P.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, *notons* $A(N)$ *l'assertion « pour tous polynômes* $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux, avec* P *unitaire de degré* $\leq N$ *et* $Q \neq 0$, *si* $\frac{P}{Q}$ *est spéciale, alors il existe* $d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ *et* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\frac{P(X)}{Q(X)} = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}(X)$. *» Montrons* $\forall N \in \mathbb{N}, A(N)$ *par récurrence.*
Cela montrera la propriété de l'énoncé pour toutes les fractions rationnelles non nulles, ce qui suffit car la fraction rationnelle nulle n'est pas spéciale.

Initialisation. *Montrons* $A(0)$. *Soit* $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux, avec* P *unitaire de degré négatif (c'est-à-dire* $P = 1$*) et* $Q \neq 0$ *tels que* $F = \frac{1}{Q}$ *soit spéciale.*
Il existe donc un ensemble infini $E \subseteq \mathbb{U} \setminus \mathcal{P}(F)$ *tel que* $\forall z \in E, F(z) \in \mathbb{U}$. *On en déduit* $\forall z \in E, Q(z) \in \mathbb{U}$ *: le polynôme* Q *est spécial. D'après la question précédente, on peut trouver* $c \in \mathbb{U}$ *et* $\delta \in \mathbb{N}$ *tel que* $Q = cX^\delta$.
Ainsi, $F = \bar{c}X^{-\delta}$, *ce qui conclut, en posant* $d = -\delta$, $n = 1$ *et* $\alpha_1 = -\bar{c}$.

Hérédité. *Soit* $N \in \mathbb{N}$ *tel que* $A(N)$.
Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ *premiers entre eux, avec* P *unitaire de degré* $\leq N+1$ *et* $Q \neq 0$ *tels que* $F = \frac{P}{Q}$ *soit spéciale.*
L'initialisation ayant traité le cas P *constant, on peut supposer* P *non constant. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, on peut trouver une racine* $\beta \in \mathbb{C}$ *et factoriser* $P = (X - \beta)P_0$, *avec* P_0 *unitaire de degré* $\leq N$.

- *Si* $\beta = 0$, *on constate que* P_0 *et* Q *restent premiers entre eux (car* P_0 *divise* P*), que* $\deg P_0 \leq N$ *et que* $\frac{P_0}{Q}$ *reste spéciale. On utilise alors* $A(N)$ *pour trouver* $d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ *tels que* $\frac{P_0}{Q} = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$, *et on en déduit* $F = X^{d+1} \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$.

- *En revanche, si $\beta \neq 0$, on a $F(\beta) = 0$ car l'écriture P/Q est irréductible, et la question (a) garantit alors que $1/\overline{\beta}$ est un pôle de F, c'est-à-dire un zéro de Q. On peut donc factoriser Q par $X - \dfrac{1}{\overline{\beta}}$, ou plutôt par son multiple $1 - \overline{\beta}X$: on peut trouver $Q_0 \in \mathbb{C}[X]$ tel que $Q = (1-\overline{\beta}X)Q_0$. On a donc $F = \dfrac{X-\beta}{1-\overline{\beta}X}\dfrac{P_0}{Q_0} = B_\beta \dfrac{P_0}{Q_0}$. Notons que P_0 et Q_0 sont toujours premiers entre eux et que $\deg P_0 \leq N$.*
  Comme F est une fraction spéciale, on peut trouver un ensemble infini $E \subseteq \mathbb{U} \setminus \mathscr{P}(F)$ tel que $\forall z \in E, F(z) \in \mathbb{U}$.
  Pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \mathscr{P}(B_\beta) \supseteq \mathbb{U} \setminus \{1/\overline{\beta}\}$, le caractère spécial de B_β montre que $B_\beta(z) \in \mathbb{U}$, donc $B_\beta(z)^{-1} \in \mathbb{U}$. Ainsi, pour tout $z \in E \setminus \{1/\overline{\beta}\}$, on a $\dfrac{P_0(z)}{Q_0(z)} = B_\beta(z)^{-1}F(z) \in \mathbb{U}$. Cela montre que $F_0 = \dfrac{P_0}{Q_0}$ est spéciale.
  D'après A(N), on peut trouver $d \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tels que $F_0 = X^d \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$, et on en déduit $F = X^d B_\beta \prod_{i=1}^{n} B_{\alpha_i} = X^d \prod_{i=1}^{n+1} B_{\alpha_i}$, en posant $\alpha_{n+1} = \beta$.

On a donc montré A(N + 1), ce qui clôt la récurrence.

Racines de l'unité

Soit Λ l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe un entier $n \geq 1$ vérifiant $z^n = 1$, i.e. Λ est l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbb{C}$. On se propose de décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \setminus \mathscr{P}(F)) \subseteq \Lambda$.

Pour $n \geq 1$ on pose $\zeta_n = \exp(2i\pi/n) \in \Lambda$ et on note

$$\mathbb{Q}(\zeta_n) = \left\{ F(\zeta_n) \,\middle|\, F \in \mathbb{Q}(X) \text{ et } \zeta_n \notin \mathscr{P}(F) \right\}.$$

Ainsi $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

On note φ l'indicatrice d'Euler et on rappelle que $\varphi(1) = 1$ et que si $n = p_1^{k_1} \dots p_r^{k_r}$ est la factorisation de $n \geq 2$, alors $\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k_i - 1}(p_i - 1)$. On admet le résultat suivant :

Théorème 1 (admis). *Pour tout $n \geq 1$ le corps $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $\varphi(n)$.*

On fixe dans les questions 6 à 12 une fraction rationnelle $F \in \mathbb{C}(X)$ telle que $F(1) = 1$. On suppose qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_j)_{j \geq 1}$ tels que pour tout $j \geq 1$ on a $n_j \geq 1$, $\zeta_{n_j} \notin \mathscr{P}(F)$ et $F(\zeta_{n_j}) \in \Lambda$.

6. Montrer que pour tout $j \geq 1$ il existe un unique $q_j \in \mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tel que $F(\zeta_{n_j}) = \exp(2i\pi q_j)$.

   Il suffit de montrer $\forall z \in \Lambda, \exists! q \in \mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] : z = \exp(i\,2\pi\, q)$.
   Soit $z \in \Lambda$.
   Existence. *Notons $\theta \in]-\pi, \pi]$ son argument principal et $q = \dfrac{\theta}{2\pi} \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.*
   - *On a bien $z = \exp(i\,2\pi\, q)$.*
   - *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $z^n = 1$. Par les propriétés multiplicatives de l'argument, on a $n\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, donc $q = \dfrac{\theta}{2\pi} \equiv 0 \pmod{1/n}$, donc $q \in \mathbb{Q}$.*

   Unicité. *Soit $q, r \in \mathbb{Q} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ tels que $z = \exp(i\,2\pi\, q) = \exp(i\,2\pi\, r)$. Par « unicité » de l'argument, on a $2\pi\, q \equiv 2\pi\, r \pmod{2\pi}$, donc $q \equiv r \pmod{1}$, c'est-à-dire $r - q \in \mathbb{Z}$.*
   Par ailleurs, les inégalités $-\frac{1}{2} < q, r \leq \frac{1}{2}$ donnent $-1 < r - q < 1$. On en déduit $q = r$, ce qui conclut.

7. Montrer que $\lim\limits_{j\to+\infty} q_j = 0$.

La démonstration la plus conforme au programme de sup serait par l'absurde : supposer par l'absurde que la suite ne converge pas vers 0, donc trouver $\varepsilon > 0$ et une sous-suite qui est toujours à distance $> \varepsilon$ de 0. Le théorème de Bolzano-Weierstrass permettrait alors de réextraire : on va trouver une sous-sous-suite de $(q_j)_{j\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers un nombre différent de 0. Plutôt que de le rédiger comme ça, on va transformer en lemme cette idée. Le résultat ainsi dégagé est de toute façon au programme en spé.

> ***Lemme de la valeur d'adhérence unique.*** *Toute suite réelle bornée possédant une unique valeur d'adhérence ℓ converge vers ℓ.*

(Remarquons que le résultat est vrai pour les suites complexes, avec la même démonstration. Par ailleurs, le théorème de Bolzano-Weierstrass entraîne l'existence d'une valeur d'adhérence : l'hypothèse du lemme est donc simplement l'unicité.)

Démonstration du lemme. *Soit $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ bornée et possédant une unique valeur d'adhérence ℓ. On va raisonner par contraposée : supposons que x ne converge pas vers ℓ et construisons une autre valeur d'adhérence. La non-convergence nous permet de trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \,:\, |x_n - \ell| > \varepsilon$.*
On construit alors par récurrence[2] une extractrice φ telle que $\forall k \in \mathbb{N}, |x_{\varphi(k)} - \ell| \geq \varepsilon$: si les éléments $\varphi(j)$ ont été construits pour tous les indices strictement inférieurs à un entier k, on peut trouver[3] un entier N strictement plus grand que tous ces $\varphi(j)$. D'après l'assertion quantifiée écrite plus haut, on peut donc trouver $n \geq N$ tel que $|x_n - \ell| \geq \varepsilon$: il suffit alors de poser $\varphi(k) = n$.
La suite $(x_{\varphi(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ hérite du caractère borné de x. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut donc trouver une extractrice ψ et un nombre $\hat{\ell} \in \mathbb{R}$ tel que $x_{\varphi(\psi(k))} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \hat{\ell}$. Comme $\forall k \in \mathbb{N}^*, |x_{\varphi(\psi(k))} - \ell| \geq \varepsilon$, on obtient $|\hat{\ell} - \ell| \geq \varepsilon$ par passage à la limite dans les inégalités larges, ce qui démontre $\hat{\ell} \neq \ell$. □

Pour utiliser ce lemme, la suite q étant bornée, il suffit de montrer que la seule valeur d'adhérence de cette suite est 0. Soit ℓ une valeur d'adhérence de q : on peut trouver une extractrice φ telle que $q_{\varphi(k)} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell$. Comme q est à valeurs dans $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on a l'encadrement $-\frac{1}{2} \leq \ell \leq \frac{1}{2}$ par passage à la limite dans les inégalités larges. Par continuité de $t \mapsto e^{i\,2\pi t}$, on a également $F(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) = \exp(i\,2\pi\, q_{\varphi(j)}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} e^{i\,2\pi\,\ell}$.
Notons $F = \frac{P}{Q}$ avec P et $Q \in \mathbb{C}[X]$ premiers entre eux. L'égalité $F(1) = 1$ force $Q(1) \neq 0$. Les théorèmes d'opérations[4] entraînent $P(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} P(1)$ et $Q(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} Q(1)$ donc $F(\zeta_{n_{\varphi(j)}}) \xrightarrow[j\to+\infty]{} F(1) = 1$.
Par unicité de la limite, $e^{i\,2\pi\,\ell} = 1$, donc $\ell \equiv 0 \pmod 1$. L'encadrement précédent montre donc $\ell = 0$ et conclut cette question.

8. (a) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme tel que $P(1) = 0$. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nP(\zeta_n)$.

Par le lemme de factorisation, on peut trouver $\tilde{P} \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X-1)\tilde{P}$. Rappelons que dans ce cas, on a $\tilde{P}(1) = P'(1)$ par un calcul direct important.
La limite $n(\zeta_n - 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\,2\pi$ entraîne $nP(\zeta_n) = n(\zeta_n - 1)\,\tilde{P}(\zeta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\,2\pi\,\tilde{P}(1) = i\,2\pi\,P'(1)$: il ne reste qu'à la justifier. La dérivabilité en 0 de la fonction $t \mapsto e^{i\,2\pi t}$ assure que $\frac{e^{i\,2\pi t} - 1}{t} \xrightarrow[t\to0]{} i\,2\pi$.
On en déduit $n(\zeta_n - 1) = n\left(e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1\right) = \frac{e^{i\frac{2\pi}{n}} - 1}{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\,2\pi$.

2. Il est probablement possible d'affirmer sans démonstration que si un ensemble $E \subseteq \mathbb{N}$ n'est pas majoré, on peut construire une extractrice à valeurs dans E. J'ai cependant préféré être prudent.

3. Je n'écris pas $N = \max(\varphi(0), \dots, \varphi(k-1))$ parce que je veux que ma rédaction fonctionne dès le cas $k = 0$. C'est une astuce pour ne pas avoir à rédiger d'initialisation.

4. Mieux (mais un peu moins conforme au programme de sup) : par des arguments de continuité pour des fonctions $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$...

(b) Calculer $\lim_{j\to+\infty} n_j(\mathrm{F}(\zeta_{n_j})-1)$ et en déduire que la suite $(n_jq_j)_{j\geq 1}$ converge.

Écrivons $\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *sous forme irréductible (donc* $\mathrm{P}(1),\mathrm{Q}(1)\neq 0$*). On a donc*

$$n_j\left(\mathrm{F}(\zeta_{n_j})-1\right)=n_j\frac{\mathrm{P}(\zeta_{n_j})-\mathrm{Q}(\zeta_{n_j})}{\mathrm{Q}(\zeta_{n_j})}\xrightarrow[j\to+\infty]{}\frac{i\,2\pi\,(\mathrm{P}-\mathrm{Q})'(1)}{\mathrm{Q}(1)}$$

en appliquant la question précédente au polynôme $\mathrm{P}-\mathrm{Q}$.
On a donc montré $n_j\left(\exp\left(i\,2\pi\,q_j\right)-1\right)\xrightarrow[j\to+\infty]{}\dfrac{i\,2\pi\,(\mathrm{P}-\mathrm{Q})'(1)}{\mathrm{Q}(1)}$.
Un calcul précédent montrait que $e^{i\,2\pi\,t}=1+i\,2\pi\,t+o(t)$*, c'est-à-dire* $e^{i\,2\pi\,t}-1\underset{t\to 0}{\sim}i\,2\pi\,t$.
Comme $q_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}0$*, on en déduit* $n_j\left(\exp\left(i\,2\pi\,q_j\right)-1\right)\underset{j\to+\infty}{\sim}i\,2\pi\,n_jq_j$.
En confrontant ces deux résultats, on obtient $n_jq_j\xrightarrow[j\to+\infty]{}\dfrac{\mathrm{P}'(1)-\mathrm{Q}'(1)}{\mathrm{Q}(1)}$.

Remarque. *En utilisant* $\mathrm{P}(1)=\mathrm{Q}(1)$*, cette limite pouvait se réécrire* $\mathrm{F}'(1)$*, sans que cela soit utile.*

9. On suppose qu'il existe un entier $c\geq 1$ tel que $cn_jq_j\in\mathbb{Z}$ pour tout $j\geq 1$. Montrer qu'il existe $d\in\mathbb{Z}$ tel que $\mathrm{F}(\mathrm{X})=\mathrm{X}^d$.

L'hypothèse et la question précédente font de $(cn_jq_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *une suite d'entiers convergente, donc stationnaire*[5].
Quitte à réextraire, on va supposer dans la suite l'existence de $\mathrm{N}\in\mathbb{Z}$ *tel que* $\forall j\in\mathbb{N}^*, cn_jq_j=\mathrm{N}$.
Pour tout $j\in\mathbb{N}^*$*, on a donc* $\mathrm{F}(\zeta_{n_j})^c=\exp\left(i\,2\pi\,cq_j\right)=\exp\left(i\,2\pi\,\mathrm{N}/n_j\right)=\zeta_{n_j}^{\mathrm{N}}$.
Écrivons $\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *sous forme irréductible. On a donc* $\forall j\in\mathbb{N}^*,\mathrm{P}(\zeta_{n_j})^c=\zeta_{n_j}^{\mathrm{N}}\,\mathrm{Q}(\zeta_{n_j})^c$.

- *Si* $\mathrm{N}\geq 0$*, les polynômes* P^c *et* $\mathrm{X}^{\mathrm{N}}\,\mathrm{Q}^c$ *coïncident sur un ensemble infini, donc ils sont égaux. En considérant la multiplicité de la racine* 0*, on voit que* N *doit être un multiple de c, si bien que l'on peut trouver* $d\in\mathbb{N}$ *tel que* $\mathrm{N}=cd$.
  On a alors $0=\mathrm{P}^c-(\mathrm{X}^d\,\mathrm{Q})^c=\prod_{\omega\in\mathbb{U}_c}(\mathrm{P}-\omega\,\mathrm{X}^d\,\mathrm{Q})$*. Par intégrité de* $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ *on peut donc trouver* $\omega\in\mathbb{U}_c$ *tel que* $\mathrm{P}=\omega\,\mathrm{X}^d\,\mathrm{Q}$*, donc* $\mathrm{F}=\omega\,\mathrm{X}^d$*. Comme* $\mathrm{F}(1)=1$*, on a* $\omega=1$.
- *Si* $\mathrm{N}<0$*, le même argument avec les polynômes* $\mathrm{X}^{|\mathrm{N}|}\,\mathrm{P}^c$ *et* Q^c *montre que* $d=\dfrac{\mathrm{N}}{c}$ *est un entier négatif tel que* $\mathrm{F}=\mathrm{X}^d$.

Dans les deux cas, on a donc trouvé $d\in\mathbb{Z}$ *tel que* $\mathrm{F}=\mathrm{X}^d$.

10. En utilisant le résultat établi dans la question 2b, montrer qu'il existe un entier $p\geq 1$ tel que $\mathrm{F}\in\mathbb{Q}(\zeta_p)(\mathrm{X})$.

On reprend les notations de la partie « fractions rationnelles et rationalité » : notons $\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ *sous forme irréductible et notons* $d=\deg\mathrm{P}+\deg\mathrm{Q}+1$ *(la fraction n'étant pas nulle, d est un entier).*
Pour tout $j\in[\![1,d]\!]$*,* $\mathrm{F}(\zeta_{n_j})\in\Lambda$ *donc on peut trouver* m_j *tel que* $\mathrm{F}(\zeta_{n_j})\in\mathbb{U}_{m_j}$*. Soit p un multiple commun de* $n_1,\dots,n_d,m_1,\dots,m_d$ *(par exemple leur PPCM).*

- *Pour tout j, la racine de l'unité* $\zeta_{m_j}=\zeta_p^{p/m_j}$ *appartient à* $\mathbb{Q}(\zeta_p)$*. Par stabilité par produit, on a donc* $\mathbb{U}_{m_j}\subseteq\mathbb{Q}(\zeta_p)$ *et donc* $\mathrm{F}(\zeta_{n_j})\in\mathbb{Q}(\zeta_p)$.
- *De même, pour tout j,* $\zeta_{n_j}=\zeta_p^{p/n_j}\in\mathbb{Q}(\zeta_p)$.

Le corps $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ *contient donc d éléments distincts et leurs images par la fraction rationnelle* F*. D'après la question 2(b), on a donc* $\mathrm{F}\in\mathbb{Q}(\zeta_p)(\mathrm{X})$.

5. Rappel d'une démonstration : si une suite d'entiers $x\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ converge, la suite $\Delta x:=\left(x_{n+1}-x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 donc elle prend ses valeurs dans $[-1/2,1/2]$ à partir d'un certain rang. Comme il s'agit d'une suite d'entiers, Δx est nulle à partir d'un certain rang, ce qui dit exactement que x stationne.

11. Soit $N \geq 1$ un entier, $q \in \mathbb{Q}$ et notons $\zeta = \exp(2i\pi q)$. On suppose que $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$. On écrit $q = u/v$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux et $v \neq 0$. Soit l le PPCM de v et N.

(a) Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\zeta_l = \zeta^a \cdot \zeta_N^b$.

Quitte à remplacer u et v par leurs opposés, on suppose $v \in \mathbb{N}^*$.

- *Comme u et v sont premiers entre eux, u est inversible modulo v, c'est-à-dire que l'on peut trouver $k \in \mathbb{Z}$ tel que $ku \equiv 1 \pmod{v}$ (en effet, le théorème de Bézout permet de trouver $k, k' \in \mathbb{Z}$ tel que $ku + k'v = 1$, ce qui donne la congruence promise).*
  En multipliant par $\frac{2\pi}{v}$, on en déduit la congruence des arguments $2\pi k\frac{u}{v} \equiv \frac{2\pi}{v} \pmod{2\pi}$, si bien que $\zeta^k = \exp\left(i\,2\pi k\frac{u}{v}\right) = \exp\left(i\frac{2\pi}{v}\right) = \zeta_v$. Pour répondre à la question, il suffit donc de trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\zeta_l = \zeta_v^\alpha \zeta_N^\beta$: les entiers $a = k\alpha$ et $b = \beta$ conviendront alors.
- *En utilisant seulement[6] $l = v \vee N$, montrons donc l'existence de $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\zeta_l = \zeta_v^\alpha \zeta_N^\beta$.*
  Commençons par remarquer que les entiers l/v et l/N sont premiers entre eux. En effet, s'ils étaient tous deux multiples d'un même entier $m \geq 2$, l'entier l/m resterait multiple de v et de N, ce qui contredit la définition du PPCM. D'après le théorème de Bézout, on peut donc trouver $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que $\alpha\frac{l}{v} + \beta\frac{l}{N} = 1$.
  On en déduit (en faisant attention à n'écrire que des exposants entiers) :

$$\zeta_\ell = \zeta_l^{\alpha l/v + \beta l/N} = \left(\zeta_l^{l/v}\right)^\alpha \left(\zeta_l^{l/N}\right)^\beta = \zeta_v^\alpha \zeta_N^\beta,$$

ce qui conclut la démonstration.

(b) En utilisant le théorème admis, montrer que $\varphi(l) \leq \varphi(N)$, puis que $l \mid 2N$ et que $2Nq \in \mathbb{Z}$.

- *Puisque ζ et ζ_N appartiennent à $\mathbb{Q}(\zeta_N)$, la question précédente montre que $\zeta_l \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$. Déduisons-en[7] $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)$.*
  Soit $z \in \mathbb{Q}(\zeta_l)$: on peut trouver $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $Q(\zeta_l) \neq 0$ et $z = \frac{P(\zeta_l)}{Q(\zeta_l)}$.
  On a $P(\zeta_l) = \sum_{k=0}^{\deg P} \underbrace{\operatorname{coeff}_k(P)}_{\in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)} \zeta_l^k$: comme $\zeta_l \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$, on en déduit $P(\zeta_l) \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$. De la même façon, $Q(\zeta_\ell) \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$, si bien que $z \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$.
  En particulier, le corps $\mathbb{Q}(\zeta_l)$ est un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de $\mathbb{Q}(\zeta_N)$.
  On en déduit $\varphi(l) = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_l) \leq \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(\zeta_N) = \varphi(N)$.
- *Notons $p_1, \dots, p_r$ les nombres premiers impairs apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de N, avec les exposants $\gamma_1, \dots, \gamma_r \geq 1$. Comme l est un multiple de N, on sait qu'ils apparaissent également dans la décomposition de l, avec des exposants supérieurs (au sens large) $\delta_1, \dots, \delta_r$. On note également $q_1, \dots, q_s$ les « nouveaux » nombres premiers impairs apparaissant dans la décomposition en facteurs premiers de l, avec les exposants $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s \geq 1$. Enfin, on note α (resp. β) la valuation 2-adique de N (resp. l), si bien que $0 \leq \alpha \leq \beta$.*
  La relation $\varphi(l) \leq \varphi(N)$ donne alors $\varphi\left(2^\beta \prod_{i=1}^r p_i^{\delta_i} \prod_{j=1}^s q_j^{\varepsilon_j}\right) \leq \varphi\left(2^\alpha \prod_{i=1}^r p_i^{\gamma_i}\right)$, c'est-à-dire

$$2^{\max(\beta-1,0)} \prod_{i=1}^r \left((p_i - 1)p_i^{\delta_i - 1}\right) \prod_{j=1}^s \left((q_j - 1)q_j^{\varepsilon_j - 1}\right) \leq 2^{\max(\alpha-1,0)} \prod_{i=1}^r \left((p_i - 1)p_i^{\gamma_i - 1}\right).$$

Cette inégalité est surprenante car, au contraire :
  - *$\alpha \leq \beta$, donc $2^{\max(\alpha-1,0)} \leq 2^{\max(\beta-1,0)}$;*

6. On n'utilise donc pas dans cette question l'hypothèse $\zeta \in \mathbb{Q}(\zeta_N)$: c'est une petite difficulté psychologique.
7. Avec la définition classique de $\mathbb{Q}(\alpha)$, c'est-à-dire que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{C}$ contenant un certain élément $\alpha \in \mathbb{C}$, il n'y aurait rien à démontrer : mais le sujet en donne une autre, donc il faut s'adapter.

- *pour tout* $i \in [\![1,r]\!]$, $(p_i-1)p_i^{\gamma_i-1} \leq (p_i-1)p_i^{\delta_i-1}$;
- *pour tout* $j \in [\![1,s]\!]$, $1 \leq (q_j-1)q_j^{\varepsilon_j-1}$,

si bien que l'inégalité contraire est également vraie. Nous sommes donc dans le cas d'égalité (entre nombres strictement positifs), si bien que toutes les inégalités que nous venons d'écrire sont des égalités.

- *En 2, on a l'égalité* $2^{\max(\beta-1,0)} = 2^{\max(\alpha-1,0)}$, *donc* $\max(\beta-1,0) = \max(\alpha-1,0)$. *Comme* $\alpha \leq \beta$, *on en déduit en fait* $\alpha = \beta$, *sauf dans le cas exceptionnel* $(\alpha,\beta) = (0,1)$.
- *Pour tout* $i \in [\![1,r]\!]$, *on a* $(p_i-1)p_i^{\gamma_i-1} = (p_i-1)p_i^{\delta_i-1}$, *donc* $\gamma_i = \delta_i$.
- *Pour tout* $j \in [\![1,s]\!]$, *on a* $1 = (q_j-1)q_j^{\varepsilon_j-1}$. *Aucune de ces égalités n'est possible, c'est donc qu'il n'y en n'a pas : on a* $s = 0$.

In fine, *on a soit* $\ell = N$, *soit* N *est impair et* $\ell = 2N$. A fortiori, $\ell \mid 2N$.

▸ *Comme* v *divise* l, *le produit* ql *est un entier. Puisque* l *divise* $2N$, *on a donc* $2Nq \in \mathbb{Z}$.

12. Montrer qu'il existe un entier $c \geq 1$ tel que $cn_jq_j \in \mathbb{Z}$ pour tout $j \geq 1$ et qu'il existe $d \in \mathbb{Z}$ tel que $F(X) = X^d$.

▸ *La question précédente a montré que pour tout entier* N, *toute racine de l'unité appartenant à* $\mathbb{Q}(\zeta_N)$ *est une racine* $2N$*-ième de l'unité.*
Fixons $j \in \mathbb{N}^*$. *La fraction rationnelle* F *appartenant à* $\mathbb{Q}(\zeta_p)(X)$, *elle appartient* a fortiori *à* $\mathbb{Q}(\zeta_{pn_j})(X)$. *Comme dans la question précédente (pour l'inclusion* $\mathbb{Q}(\zeta_l) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_N)$*), on en déduit que* $F(\zeta_{n_j}) \in \mathbb{Q}(\zeta_{pn_j})$. *Puisqu'il s'agit par ailleurs d'une racine de l'unité, on en déduit que* $F(\zeta_{n_j}) \in \mathbb{U}_{2pn_j}$, *ce qui donne* $2pn_jq_j \in \mathbb{Z}$ *en passant à l'argument.*
L'entier $c = 2p$ *convient donc.*

▸ *On peut alors appliquer la question 9 pour obtenir un exposant* $d \in \mathbb{Z}$ *tel que* $F = X^d$.

13. Décrire les fractions rationnelles $F \in \mathbb{C}(X)$ telles que $F(\Lambda \setminus \mathscr{P}(F)) \subseteq \Lambda$.

Soit F *une telle fraction rationnelle. Comme l'ensemble des pôles est fini, on peut fixer* $\omega \in \Lambda \setminus \mathscr{P}(F)$ *puis poser* $\tilde{F} = \underbrace{F(\omega)^{-1}}_{\in\Lambda} F(\omega X)$. *La stabilité par produit montre que* $\tilde{F}$ *continue à vérifier* $\tilde{F}(\Lambda \setminus \mathscr{P}(\tilde{F})) \subseteq \Lambda$ *et elle vérifie désormais* $\tilde{F}(1) = 1$.
D'après ce qui précède, on peut trouver $d \in \mathbb{Z}$ *tel que* $\tilde{F} = X^d$, *ce qui donne après calcul* $F = \alpha X^d$, *où* $\alpha = \omega^{-d}F(\omega)$ *est un élément de* Λ.
Réciproquement, ces fractions conviennent évidemment : la réponse à la question de cette partie est donc l'ensemble $\{\alpha X^d \mid \alpha \in \Lambda, d \in \mathbb{Z}\}$.

II Intersections atypiques : le cas transcendant

Courbes et fonctions transcendantes

Un intervalle I de $\mathbb{R}$ sera appelé non trivial si I est non vide et non réduit à un point. Si I est un intervalle non trivial et si $f \in C^\infty(I,\mathbb{R})$, on dit :

- que f est *plate* en un point $x \in I$ si $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire si toutes les dérivées successives de f s'annulent en x;
- que f est *transcendante*[8] si pour tout $d \geq 1$ et tous polynômes $P_0, \dots, P_d \in \mathbb{R}[X]$, non tous nuls, la fonction $x \mapsto \sum_{i=0}^{d} P_i(x)f(x)^i$ n'est plate en aucun point de I.

8. La définition de « fonction transcendante » n'est pas au programme de MP donc on s'en fiche un peu, mais le sujet a ici donné une définition non standard, plus forte que celle communément acceptée.

14. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge pour tout réel x. On note $f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ pour $x \in \mathbb{R}$, obtenant ainsi une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et que si f est plate en 0 alors $a_n = 0$ pour tout $n \geq 0$.

La question était neutralisée, et est essentiellement une question de cours portant sur le chapitre à venir « Séries entières. » Une rédaction aurait pu être la suivante :

> *L'hypothèse de convergence pour tout réel montre que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n a_n x^n$ est infini. La fonction f est alors lisse sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, ce qui conclut immédiatement.*

15. Soit $n \geq 1$ un entier, $\alpha_1 < \cdots < \alpha_n$ des réels et $\mathrm{P}_1, \dots, \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ des polynômes non nuls. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}_i(x) e^{\alpha_i x}$.

(a) En calculant $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{\mathrm{N}} e^{ax}}$ pour $\mathrm{N} \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{R}$ convenables, montrer que f n'est pas identiquement nulle.

Notons $\mathrm{N} = \deg \mathrm{P}_n$ (comme $\mathrm{P}_n \neq 0$, on a $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$) et $\lambda = \mathrm{coeff}_{\mathrm{N}}(\mathrm{P}_n)$ (qui est donc un réel non nul).

- *Pour tout $\alpha < \alpha_n$ et tout $\mathrm{M} \in \mathbb{Z}$, on a $x^{\mathrm{M}-\mathrm{N}} e^{(\alpha-\alpha_n)x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, c'est-à-dire $x^{\mathrm{M}} e^{\alpha x} = \underset{x\to+\infty}{o}\left(x^{\mathrm{N}} e^{\alpha_n x}\right)$. Par combinaisons linéaires, on en déduit que pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, $\mathrm{P}(x)\, e^{\alpha x} = o\left(x^{\mathrm{N}} e^{\alpha_n x}\right)$ puis que $\sum_{i<n} \mathrm{P}_i(x)\, e^{\alpha_i x} = o(x^{\mathrm{N}} e^{\alpha_n x})$.*
- *En revanche, $\mathrm{P}_n(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \lambda\, x^{\mathrm{N}}$, donc $\mathrm{P}_n(x)\, e^{\alpha_n x} \underset{x\to\infty}{\sim} \lambda x^{\mathrm{N}} e^{\alpha_n x}$.*

Ainsi, $f(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \lambda x^{\mathrm{N}} e^{\alpha_n x}$, donc $\dfrac{f(x)}{x^{\mathrm{N}}\, e^{\alpha_n x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda \neq 0$.
Naturellement, si f était identiquement nulle (ou simplement nulle sur un voisinage de $+\infty$), cette limite serait nulle, ce qui est ici exclu.

(b) En déduire que f n'est plate en aucun $x \in \mathbb{R}$. On pourra commencer par traiter le cas $x = 0$.

- *Commençons par le cas $x = 0$.*
  *Notons $\mathscr{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, **la convergence étant absolue**.*[9] *La question 14 a notamment affirmé que $\mathscr{E} \subseteq \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.*
  Par opérations, il est clair que $\mathscr{E}$ est (non vide et) stable par combinaison linéaire, donc qu'il s'agit d'un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
  Montrons même que $\mathscr{E}$ est stable par produit : soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, les séries $\sum_n a_n x^n$ et $\sum_n b_n x^n$ soient absolument convergentes, de sommes respectives $f(x)$ et $g(x)$. On veut montrer que $fg \in \mathscr{E}$.
  Posons $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On constate que $(c_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le produit de Cauchy de $(a_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} (a_k x^k)(b_{n-k} x^{n-k}) = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} x^n = c_n x^n.$$

9. On aurait pu considérer l'ensemble $\mathscr{E}_{\text{naïf}}$ obtenu en considérant toutes les séries convergentes, sans exiger que la convergence soit absolue. Mais, le produit de Cauchy de deux séries semi-convergentes pouvant très bien diverger, il n'est alors pas trivial que $\mathscr{E}_{\text{naïf}}$ est stable par produit. Ça n'est pas si gênant : $\mathscr{E}_{\text{naïf}}$ est clairement stable par multiplication par une puissance x^{N} ; comme il contient les exponentielles, il contiendra les fonctions de l'énoncé et cela suffit à faire marcher la démonstration. En fait, un théorème du cours sur les séries entières montrera que $\mathscr{E} = \mathscr{E}_{\text{naïf}}$, mais cela reste une bonne idée de se méfier des séries semi-convergentes...

On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\sum_n c_n x^n$ converge absolument, de somme $f(x)\,g(x)$, donc $fg \in \mathscr{E}$.
Pour tous $\alpha, x \in \mathbb{R}$, on sait que la série $\sum_n \frac{\alpha^n}{n!} x^n$ converge absolument, de somme $e^{\alpha x}$. Cela montre que les fonctions $x \mapsto e^{\alpha x}$ appartiennent toutes à $\mathscr{E}$. Il est également évident que $\mathscr{E}$ contient les fonctions polynomiales.
Grâce aux propriétés de stabilité mises en lumière plus haut, on apprend donc que la fonction f appartient à $\mathscr{E}$. Soit $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ une suite sommable telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m$. La question (a) entraîne que f n'est pas identiquement nulle, donc la suite $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ n'est pas nulle. La contraposée de la question 14 entraîne alors que f n'est pas plate en 0.

- *Fixons maintenant $c \in \mathbb{R}$ et considérons $g : x \mapsto f(x+c) = \sum_{i=1}^{n} e^{\alpha_i c} \mathrm{P}_i(x+c)\, e^{\alpha_i x}$.*

Puisque $e^{\alpha_i c} \mathrm{P}_i(\mathrm{X}+c)$ reste un polynôme non nul, la fonction g vérifie les hypothèses de la question, et elle est évidemment non nulle (elle prend les mêmes valeurs que f).
D'après la première moitié de la question, g n'est pas plate en 0, c'est-à-dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $g^{(k)}(0) \neq 0$. Mais une récurrence immédiate (utilisant le fait que la dérivée de $x \mapsto x + c$ vaut exactement 1) montre que $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(c)$, donc f n'est pas plate en c.

16. Montrer que si $\mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ sont non nuls, alors pour tout intervalle non trivial $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$ la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{P}(x)\exp(\alpha x)$ est transcendante.

Je garde les notations de l'énoncé, mais il est un peu pénible d'avoir à la fois un polynôme P et des P_i.
Soit $\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_d \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ non tous nuls : l'ensemble $\mathrm{J} = \{i \in [\![0, d]\!] \mid \mathrm{P}_i \neq 0\}$ n'est pas vide. La fonction $\sum_{i=0}^{d} \mathrm{P}_i\, f^i$ s'écrit $\mathrm{F} : x \mapsto \sum_{i\in\mathrm{J}} (\mathrm{P}_i \mathrm{P}^i)(x)\exp(i\alpha x)$.
Comme α est supposé non nul, les $i\alpha$ (où $i \in \mathrm{J}$) sont distincts. Comme P et les P_i ($i \in \mathrm{J}$) ne sont pas nuls, on a $\mathrm{P}_i\mathrm{P}^i \neq 0$ par intégrité de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
On est donc dans le cas d'application de la question 15 (au détail près que les exposants sont potentiellement rangés par ordre décroissant) : la fonction F n'est plate en aucun point de I, ce qui conclut la démonstration de la transcendance de f.

On fixe pour la suite de cette partie un entier $d \geq 1$ et un segment non trivial $\mathrm{I} \subseteq \mathbb{R}$. On note $\ell(\mathrm{I}) = \max \mathrm{I} - \min \mathrm{I}$ la longueur de I. On a donc $\ell(\mathrm{I}) > 0$. Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^2$ est appelé d-courbe s'il existe des nombres réels $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$, non tous nuls et tels que

$$\mathrm{C} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0\right\}.$$

On se propose de démontrer le résultat suivant :

Théorème 2. *Soient I un segment non trivial et $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ une fonction transcendante, de graphe $\Gamma(f)$. Il existe $c_1 \geq 1$ tel que $|\Gamma(f) \cap \mathrm{C}| \leq c_1$ pour toute d-courbe C.*

On fixe f comme dans l'énoncé du théorème à démontrer et on note $\mathrm{V} \subseteq \mathrm{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les fonctions $x \mapsto x^{i-1} f(x)^{j-1}$ pour $1 \leq i, j \leq d$. On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une suite de d-courbes $(\mathrm{C}_r)_{r\geq 1}$ telles que $|\Gamma(f) \cap \mathrm{C}_r| \geq r^2$ pour tout $r \geq 1$.

17. Soit $g \in \mathrm{V}$ une fonction non identiquement nulle. Montrer que g n'est plate en aucun $x \in \mathrm{I}$.

Procédons par contraposée : soit $g \in \mathrm{V}$ plate en un certain point de I, et montrons $g = 0$.
Par définition de V, on peut trouver une famille $(\alpha_{i,j})_{1\leq i,j\leq d}$ de nombres réels tels que

$$g : x \mapsto \sum_{1\leq i,j\leq d} \alpha_{i,j} x^{i-1} f(x)^{j-1} = \sum_{k=0}^{d-1} \mathrm{P}_k(x)\, f(x)^k,$$

en posant pour tout $k < d$, $\mathrm{P}_k = \sum_{i=1}^{d} \alpha_{i,k+1} \mathrm{X}^{i-1} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.
Puisque g est supposée plate en au moins un point, la transcendance de f entraîne $\mathrm{P}_0 = \cdots = \mathrm{P}_{d-1} = 0$, puis, coefficient par coefficient, que tous les $\alpha_{i,j}$ sont nuls.
Ainsi, $g = 0$.

18. Soit $r \geq 1$ un entier. Montrer qu'il existe $g \in \mathrm{V}$ non identiquement nulle telle que $|\mathrm{Z}(g)| \geq r^2$. Montrer que pour toute telle fonction g il existe un segment $\mathrm{K} \subseteq \mathrm{I}$ de longueur inférieure ou égale à $\ell(\mathrm{I})/r$ tel que $|\mathrm{Z}(g) \cap \mathrm{K}| \geq r$.

   - *Soit $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq d}$ une famille réelle telle que $\sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0$ soit une équation de la courbe C_r.*
     Notons $g : x \mapsto \sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{i,j} x^{i-1} f^{j-1}$, qui est manifestement un élément de V. La transcendance de f entraîne que g n'est plate en aucun point, donc évidemment non identiquement nulle.
     Par hypothèse, $\Gamma(f) \cap \mathrm{C}_r$ possède au moins r^2 éléments. Comme ils sont sur un même graphe, leurs abscisses sont distinctes et on peut trouver $x_1 < \cdots < x_{r^2}$ dans I tels que $\forall k \in [\![1, r^2]\!] : \begin{pmatrix} x_k \\ f(x_k) \end{pmatrix} \in \mathrm{C}_r$.
     Pour tout $k \in [\![1, r^2]\!]$, on a donc $\sum_{1 \leq i,j \leq d} a_{i,j} x_k^{i-1} f(x_k)^{j-1} = 0$, c'est-à-dire $g(x_k) = 0$: on a bien $|\mathrm{Z}(g)| \geq r^2$.
   - *Soit g une fonction s'annulant en (au moins) r^2 points $x_1 < \cdots < x_{r^2}$ de I.*
     Les r différences $d_k = x_{kr} - x_{1+(k-1)r}$ ont une somme $\sum_{k=1}^{r} \left(x_{kr} - x_{1+(k-1)r}\right) \leq x_{r^2} - x_1 \leq \ell(\mathrm{I})$, donc une moyenne $\leq \ell(\mathrm{I})/r$. On peut donc trouver $k \in [\![1, r]\!]$ tel que $x_{kr} - x_{1+(k-1)r} \leq \ell(\mathrm{I})/r$.
     Le segment $\mathrm{K} = \left[x_{1+(k-1)r}, x_{kr}\right]$ convient alors.

Soient $n = \dim \mathrm{V}$, $g_1, \ldots, g_n$ une base de V et

$$\mathrm{S}_n = \left\{ (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} |a_i| = 1 \right\}.$$

Pour $\underline{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathrm{S}_n$ posons $\mathrm{G}_a = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$.

19. Montrer qu'il existe une suite $(\underline{a}_r)_{r \geq 1}$ d'éléments de S_n, ainsi qu'une suite $(\mathrm{K}_r)_{r \geq 1}$ de segments inclus dans I dont les longueurs tendent vers 0 quand $r \to +\infty$ et tels que $|\mathrm{Z}(\mathrm{G}_{a_r}) \cap \mathrm{K}_r| \geq r$ pour tout $r \geq 1$.

    Pour tout $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$, on note $\|\underline{a}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Je vais également étendre la notation de l'énoncé en gardant la définition de $\mathrm{G}_{\underline{a}}$ pour un n-uplet quelconque $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$. Notons que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathrm{G}_{\lambda \underline{a}} = \lambda \mathrm{G}_{\underline{a}}$.
    Soit $r \geq 1$. D'après les questions précédentes, on peut trouver $g_r \in \mathrm{V}$ non nulle et K_r de longueur $\leq \ell(\mathrm{I})/r$ telle que $|\mathrm{Z}(g_r) \cap \mathrm{K}_r| \geq r$.
    Par définition de V, on peut trouver $\underline{b}_r \in \mathbb{R}^n$ tel que $g_r = \mathrm{G}_{\underline{b}_r}$. Comme la fonction g_r n'est pas nulle, le n-uplet $\underline{b}_r$ n'est pas nul, ce qui permet de poser $\underline{a}_r = \dfrac{\underline{b}_r}{\|\underline{b}_r\|_1}$, qui vérifie $\|\underline{a}_r\|_1 = 1$, c'est-à-dire $\underline{a}_r \in \mathrm{S}_n$.
    Les fonctions $g_r = \mathrm{G}_{\underline{b}_r}$ et $\mathrm{G}_{\underline{a}_r}$ étant proportionnelles, elles ont exactement les mêmes zéros, si bien que $|\mathrm{Z}(\mathrm{G}_{\underline{a}_r}) \cap \mathrm{K}_r| \geq r$.
    Le théorème des gendarmes entraîne que $\ell(\mathrm{K}_r) \xrightarrow[r \to +\infty]{} 0$, ce qui conclut.

20. Montrer qu'il existe $a \in \mathrm{S}_n$, $x \in \mathrm{I}$ et une suite strictement croissante d'entiers $(r_s)_{s \geq 1}$ avec $r_1 \geq 1$ tels que $\lim_{s \to +\infty} a_{r_s} = a$ et $\lim_{s \to +\infty} \min \mathrm{K}_{r_s} = x$.

    Commençons par introduire pas mal de notations.

    - *Je vais devoir mentionner la i-ème coordonnée de n-uplets tels que $\underline{a}_r$, portant déjà un indice. Pour éviter les notations trop lourdes, j'utiliserai simplement $a_r(i)$, si bien que $\underline{a}_r = (a_r(1), \ldots, a_r(n))$.*
    - *Étant donné (à n fixé) une suite $(x_r)_{r \geq 1}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et $\underline{x}_\infty \in \mathbb{R}^n$, convenons de noter $\underline{x}_r \xrightarrow[r \to +\infty]{} \underline{x}_\infty$ si $\forall i \in [\![1, n]\!], x_r(i) \xrightarrow[r \to +\infty]{} x_\infty(i)$.*

- *Notons* $\mathrm{B}_n = \left\{(a_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n}|a_i| \leq 1\right\}$.

Passons à la démonstration proprement dite.

- *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, *on note* $\mathrm{C}(n)$ *l'assertion « pour toute suite* $(\underline{x}_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ *à valeurs dans* B_n, *il existe une extractrice* φ *et un* n*-uplet* $\underline{x}_\infty \in \mathbb{R}^n$ *tels que* $\underline{x}_{\varphi(r)} \xrightarrow[r\to+\infty]{} \underline{x}_\infty$. *» Montrons* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathrm{C}(n)$ *par récurrence.*

  Initialisation. *L'ensemble* B_1 *est le segment* $[-1,1]$. *L'assertion* $\mathrm{C}(1)$ *est donc une conséquence immédiate du théorème de Bolzano-Weierstrass.*

  Hérédité. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathrm{C}(n)$. *Soit* $(\underline{x}_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ *une suite à valeurs dans* B_{n+1}.

  La suite des dernières coordonnées $(x_r(n+1))_{r\in\mathbb{N}^*}$ *est alors à valeurs dans* $[-1,1]$. *Le théorème de Bolzano-Weierstrass permet d'obtenir une extractrice* φ *et* $t_\infty \in \mathbb{R}$ *tels que* $x_{\varphi(r)}(n+1) \xrightarrow[r\to+\infty]{} t_\infty$.

  Pour tout $s \in \mathbb{N}^*$, *notons* $\underline{y}_s = (x_{\varphi(s)}(1), \dots, x_{\varphi(s)}(n))$. *On constate*[10] *immédiatement que la suite* $(\underline{y}_s)_{s\in\mathbb{N}^*}$ *est à valeurs dans* B_n, *si bien que l'on peut trouver une extractrice* ψ *et un* n*-uplet* $\underline{y}_\infty = (y_\infty(1), \dots, y_\infty(n))$ *tels que* $\underline{y}_{\psi(s)} \xrightarrow[s\to+\infty]{} \underline{y}_\infty$, *d'après l'hypothèse de récurrence* $\mathrm{C}(n)$.

  On constate alors que $\underline{x}_{\varphi(\psi(r))} \xrightarrow[r\to+\infty]{} (y_\infty(1), \dots, y_\infty(n), t_\infty)$.

  Cela démontre $\mathrm{C}(n+1)$, *et clôt la récurrence.*

- *Cette première étape (que la notion de* compacité, *la plus belle du programme de spé, rendra beaucoup moins pénible) acquise, revenons aux notations de l'énoncé. Notons* $x_r = \min \mathrm{K}_r$ *pour tout* $r \geq 1$. *La suite* $(x_r)_{r\in\mathbb{N}^*}$ *est donc notamment à valeurs dans* I.

  En utilisant à nouveau l'idée de double extraction du point précédent et grâce au théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une extractrice $\varphi : s \mapsto r_s$, *un* n*-uplet* $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ *et un point* $x \in \mathbb{R}$ *tels que* $\underline{a}_{r_s} \xrightarrow[s\to+\infty]{} \underline{a}$ *et* $x_{r_s} \xrightarrow[s\to+\infty]{} x$.

  Par passage à la limite dans les inégalités larges, x *appartient encore au segment* I. *De même, on a par opérations* $1 = \sum_{i=1}^{n}|a_{r_s}(i)| \xrightarrow[s\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{n}|a(i)| = \|\underline{a}\|_1$, *donc* $\|\underline{a}\|_1 = 1$ *par unicité de la limite, ce qui entraîne* $\underline{a} \in \mathrm{S}_n$.

Remarque. À ce stade de l'année, sans être vraiment impossible, cette question est vache. Le cours de topologie fournira des outils pour rendre ce genre de démonstration beaucoup plus simple.

21. En utilisant la question 1, montrer que $\mathrm{G}_{\underline{a}}$ est plate en x et conclure la preuve du théorème 2.

- *Soit* $m \in \mathbb{N}$. *On va montrer que* $\mathrm{G}_{\underline{a}}^{(m)}(x) = 0$, *ce qui montrera que* $\mathrm{G}_{\underline{a}}$ *est plate en* x.

  Fixons $s > m$. *Toute extractrice étant « au-dessus de l'identité », on sait que* $r_s > m$.

  La fonction $\mathrm{G}_{\underline{a}_{r_s}}$ *s'annule donc strictement plus de* m *fois dans le segment* K_{r_s}. *D'après la question 1, sa dérivée* m*-ième s'annule au moins une fois dans le même segment, ce qui permet de trouver un point* $z_{m,s} \in \mathrm{K}_{r_s}$ *tel que* $\mathrm{G}_{\underline{a}_{r_s}}^{(m)}(z_{m,s}) = 0$.

  Pour tout $s > m$, *les points* z_{m_s} *et* $\min \mathrm{K}_{r_s}$ *sont à une distance au plus égale à* $\ell(\mathrm{K}_{r_s})$, *qui tend vers* 0. *Ainsi,* $z_{m,s} = \underbrace{\min \mathrm{K}_{r_s}}_{\xrightarrow[s\to+\infty]{} x} + \underset{s\to+\infty}{o}(1)$, *donc* $z_{m,s} \xrightarrow[s\to+\infty]{} x$.

  Soit $i \in [\![1,n]\!]$. *Comme tout élément de* V, *la fonction* g_i *est lisse. Notamment, sa dérivée* m*-ième est continue. On en déduit* $g_i^{(m)}(z_{m,s}) \xrightarrow[s\to+\infty]{} g_i^{(m)}(x)$. *Par ailleurs,* $a_{r_s}(i) \xrightarrow[s\to+\infty]{} a(i)$.

  Par opérations, on en déduit $0 = \mathrm{G}_{\underline{a}_{r_s}}^{(m)}(z_{m,s}) = \sum_{i=1}^{n} a_{r_s}(i)\, g_i^{(m)}(z_{m,s}) \xrightarrow[s\to+\infty]{} \sum_{i=1}^{n} a(i) g_i^{(m)}(x) = \mathrm{G}_{\underline{a}}^{(m)}(x)$.

  Par unicité de la limite, $\mathrm{G}_{\underline{a}}^{(m)}(x) = 0$, *ce qui conclut la démonstration de la platitude de* $\mathrm{G}_{\underline{a}}$ *en* x.

- *Par construction, la fonction* $\mathrm{G}_{\underline{a}} = \sum_{i=1}^{n} a(i)\, g_i$ *est un élément de* V. *D'après la question 17, sa platitude en* x *entraîne sa nullité.*

  Comme $(g_1, \dots, g_n)$ *est une base de* V, *on en déduit alors* $a(1) = \cdots = a(n) = 0$, *donc* $\underline{a} = 0$.

  Cela contredit $\underline{a} \in \mathrm{S}_n$, *et apporte la contradiction concluant le raisonnement par l'absurde commencé avant la question 17, ce qui démontre le théorème 2.*

10. Cette propriété, qui permet une démonstration par récurrence assez directe, est la raison d'introduire l'ensemble auxiliaire B_n.

Banque MP inter-ENS – Session 2021
Rapport sur l'épreuve écrite de mathématiques (Math C)

• **Écoles partageant cette épreuve :**
ENS Lyon, Paris-Saclay, Rennes et Ulm

• **Coefficients (en % du total concours) :**
— Lyon : MP & MPI 10,8 % ; Info M 11,3 %
— Paris-Saclay : MP 9,6 %, MPI 9,6 % ; Info 13,2 %
— Rennes : MP & MPI 9,6 % ; Info 11,4 %
— Ulm : MP 3,7 % ; Info 13,3 %

• **Membres du jury :**
Pascal Boyer, Thibaut Deheuvels, Alain Durmus, Pierre Lissy, Carl Tipler (correcteurs) et Laurent Berger (concepteur)

Présentation générale

L'énoncé de l'épreuve de Math C 2021 portait sur l'étude d'intersections atypiques entre le graphe d'une fonction et certains ensembles donnés. Plus précisément, le principal objet du sujet était de montrer que ce type d'intersections pouvait, sous certaines hypothèses, impliquer que la fonction appartenait nécessairement à certaines classes d'applications bien connues. Dans la première partie, les fonctions étudiées étaient les fonctions rationnelles et l'ensemble exceptionnel les points de $\mathbb{C}^2$ à coordonnées des racines de l'unité. Dans la seconde partie, les fonctions étaient les fonctions transcendantes rélles, et il s'agissait d'analyser leurs intersections avec les courbes algébriques planes puis avec un réseau de $\mathbb{R}^2$.

L'épreuve était composée de deux parties indépendantes qui nécessitaient toutes deux une bonne maîtrise des notions et techniques sur les polynômes, fonctions/fractions rationnelles ainsi que des résultats classiques sur les fonctions à valeurs réelles, les séries entières et les racines de l'unité. Quelques questions nécessitaient également de faire appel à des fondamentaux d'algèbre linéaire, de topologie ou d'arithmétique.

Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 9,46 et un écart-type de 3,93. Le jury souhaite rappeler qu'il attend des candidats clarté, précision et rigueur, et ceci même sur les questions les plus élémentaires. De manière générale, les correcteurs ont été très attentifs à la rédaction. La résolution de questions délicates a été fortement valorisée. À l'inverse, les candidats qui se sont contentés de traiter les questions les plus élémentaires ont été peu récompensés. Le jury n'a par ailleurs pas hésité à sanctionner fortement les réponses manquant de justifications convaincantes. Il convient également de préciser que la présentation tient une part non négligeable dans l'appréciation des copies. Les candidats veilleront en particulier à écrire lisiblement, et à mettre en évidence les résultats obtenus. De manière générale, toute aide à la lecture de la copie est la bienvenue. Pour plus de clarté et de concision, il est fortement recommandé aux candidats de s'aider d'un brouillon avant de rédiger au propre les réponses aux questions. Le jury rappelle par ailleurs que, sauf demande explicite du sujet, les résultats de cours ne sont pas à redémontrer.

De l'avis du jury, le problème proposé était relativement long mais abordable, avec quelques questions difficiles. Aucune copie n'est parvenue à résoudre entièrement le sujet, mais une poignée de candidats d'excellent niveau sont parvenus à traiter sa quasi totalité.

Le jury a constaté que nombre de candidats ne semblent pas à l'aise avec des raisonnements élémentaires sur les fonctions rationnelles ou sur les racines de l'unité. De plus, des techniques de base en analyse telles que la manipulation des développements limités ou les passages à la limite étaient souvent mal acquises et leurs utilisations non justifiées. Certains raisonnements classiques utilisant la compacité ainsi que la continuité n'était également pas maîtrisés par nombre de candidats. Le nombre moyen de questions abordées étant assez faible, le barème a été adapté en conséquence. Ainsi, il suffisait de répondre correctement à la première moitié des questions de la partie I pour obtenir la moyenne tandis que terminer entièrement cette partie assurait une excellente note. Réussir en outre à aborder correctement la partie II permettait alors d'avoir la note maximale. Le jury souhaite rappeler aux candidats qu'ils ne peuvent pas espérer obtenir une bonne note s'ils se cantonnent aux questions les plus simples. Ceux qui ont pris ce parti n'ont guère été récompensés.

Partie I

La première partie du sujet portait sur les intersections atypiques des fractions rationnelles. Elle proposait, après quelques résultats préliminaires, de caractériser les fractions rationnelles dont la restriction à l'ensemble des racines de l'unité prend ses valeurs dans ce même ensemble. Elle a été abordée par tous les candidats, mais de façon très inégale. Le jury a ici été très pointilleux sur l'argumentation et les raisonnements des postulants, en particulier sur les premières questions, et il a lourdement sanctionné les réponses imprécises ou incomplètes.

Question Préliminaire

La question préliminaire 1) reposait sur une itération du théorème de Rolle. De trop nombreux candidats n'ont pas su poser correctement l'hypothèse de récurrence, ou énoncer clairement les hypothèses et la conclusion du théorème utilisé. Le jury n'a pas hésité à sanctionner les raisonnements trop flous.

Fractions rationnelles et rationalité

De manière générale, la notion de fraction rationnelle n'était pas bien connue par un grand nombre de candidats. Beaucoup de confusions entre polynômes et fractions rationnelles ont été constatées, et pénalisées, par le jury.

Pour la question 2.a), un argument sur la dimension permettait de conclure. Le jury a malheureusement constaté que de nombreux candidats pense qu'une application linéaire en dimension finie est surjective si et seulement si elle est injective, ou encore que la dimension d'un produit d'espaces vectoriels est le produit des dimensions de ces espaces. Par ailleurs l'utilisation des polynômes interpolateurs dans cette question a très rarement été convaincante, les dimensions des espaces considérés n'étant pas adaptées.

Dans la question 2.b) il s'agissait d'appliquer la question précédente et d'utiliser la rigidité des polynômes. Le jury regrette que trop peu de candidats aient vérifié que V était non nul, condition nécessaire pour être le dénominateur d'une fraction rationnelle.

La question 2.c) était une application directe des questions 2.a) et 2.b).

Intersections avec le cercle unité

Le jury tient à rappeler ici que ni l'ensemble des racines de l'unité ni celui des nombres complexes de module 1 n'est un sous-corps de $\mathbb{C}$. Les candidats qui ont affirmé le contraire, sans pour autant utiliser ce fait, ont bien sûr été pénalisés.

Pour les questions 3.a) et 3.b), souvent bien traitées, il était plus sage de procéder par double implication afin de bien dégager les arguments. Pour la 3.a), il est utile de se souvenir que la conjugaison sur les complexes est un morphisme d'anneau.

La question 4) a été généralement bien traitée.

Dans la question 5.a), le jury a été particulièrement attentif à la manipulation des pôles. Là encore, travailler par double implication permettait une argumentation claire et rigoureuse.

La question 5.b) découlait de la 5.a), mais de nombreux candidats n'ont pas suivi l'indication et ont probablement perdu du temps en revenant à la définition de fonction spéciale.

La question 5.c), un peu plus difficile, a été souvent abordée, mais rarement avec un argument complet. Il était plus simple d'exclure l'origine dans le compte des racines de F pour procéder à la récurrence. Il était bien entendu nécessaire de vérifier les hypothèses pour appliquer une récurrence, et en particulier de vérifier le caractère spéciale de la fonction à chaque étape.

Racines de l'unité

Cette partie contenait quelques questions plus ardues, et nécessitait certains résultats classiques d'arithmétique. Les candidats qui ont fait l'effort de l'aborder jusqu'au bout en maintenant un argumentaire claire et précis ont souvent été récompensés d'une excellente note.

Le jury a été très attentif aux justifications de la question 6) qui semblait pourtant élémentaire. De nombreux candidats n'ont pas réussi à justifier proprement l'existence et l'unicité de q_j qui découlait de celle de l'argument dans $]-\pi, \pi]$ d'un nombre complexe.

La question 7) portait sur un passage à la limite qu'il fallait justifier par un argument de compacité.

Les questions 8.a) et 8.b) étaient résolues par un développement limité et un passage à la limite. Il était toutefois nécessaire de se ramener à une fonction polynomiale pour utiliser l'indication de la question 8.a) en 8.b).

La question 9) reposait sur le caractère stationnaire d'une suite convergente d'entiers. Elle a été abordée par un petit nombre de candidats.

La question 10) a été rarement traitée et reposait sur un choix judicieux de p. Par exemple, le PPCM des $q_1, \dots, q_d$ et $n_1, \dots, n_d$ où d est strictement supérieur à la somme des degrés du numérateur et du dénominateur de F convenait.

Les questions 11.a) et 11.b) ont été abordées par un petit nombre de candidats. Pour la 11.a), il n'était pas suffisant d'énoncer le théorème de Bézout : il fallait travailler un peu plus pour se convaincre que ce dernier permettait d'obtenir le résultat.

Les questions 12) et 13) ont été abordées par une poignée de candidats et faisaient office de synthèse pour cette première partie.

Partie II

La deuxième partie était indépendante de la première et avait pour objet d'étude les intersections entre les graphes des fonctions transcendantes réelles et les réseaux plans. De manière générale, elle a été abordée sérieusement par une petite partie seulement des candidats. Quelques-uns ont fait le choix de se concentrer uniquement sur cette deuxième partie, ce qui permettait également d'obtenir une très bonne note. En revanche, les postulants qui ont traité superficiellement les parties I et II, en se limitant aux questions les plus simples, n'ont pas pu obtenir la moyenne.

Courbes et fonctions transcendantes

L'objectif de cette partie était d'obtenir une borne sur le nombre d'intersections possibles entre le graphe d'une fonction transcendante et une courbe algébrique plane de degré maximal fixé. De nombreuses questions étaient très abordables, et le jury a été particulièrement soucieux de la clarté et de la précision de l'exposition pour les questions les plus simples.

La question 14) était une simple application du cours. Il n'était pas nécessaire de redémontrer que la somme d'une série entière est lisse sur son disque ouvert de convergence. De nombreuses tentatives de démonstration de ce fait n'était pas correctes et ont été sanctionnées.

Les questions 15.a), 15.b), 16) et 17) ont été souvent réussies, la première reposant sur un argument de croissance comparée, la seconde sur une translation de la fonction. Pour les 16) et 17), il suffisait d'utiliser la définition de transcendance (en se ramenant à la forme de la question 15) pour une combinaison du type $\sum_i f^i P_i$ dans la question 16)).

La première partie de la question 18) découlait également des hypothèses : la courbe C_r vérifie $|\Gamma(f) \cap C_r| \geq r^2$. Si C_r est définie par $\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} y^{j-1} = 0$, la fonction $\sum_{i,j=1}^{d} a_{i,j} x^{i-1} (f(x))^{j-1}$ est dans V, non nulle car f est transcendante, et satisfait la condition sur le nombre de zéros. La deuxième partie de la question reposait sur le principe des tiroirs.

La question 19) a été bien traitée, quand elle était abordée. Il s'agissait simplement de normaliser les coefficients $a_{i,j}$ qui définissaient les fonctions obtenues dans la question 18).

La question 20), souvent approchée de manière peu convaincante, nécessitait un peu de soin. La compacité de S_n est un résultat classique. On pouvait ensuite procéder par extractions successives.

La question 21) était la plus technique de cette partie, et n'a été traitée correctement que dans quelques copies. Il fallait tout d'abord fixer un ordre de dérivation k, puis utiliser la question préliminaire 1), avec la question 19), pour obtenir l'existence d'un zéro $x_s \in K_{r_s}$ de la dérivée k-eme de $G_{\underline{a}_{r_s}}$, pour $s \geq k+1$. Par ailleurs, des questions 19) et 20) on déduit que la longueur des K_{r_s} tend vers 0 et que le minimum des K_{r_s} tend vers x. Donc la suite $(x_s)_{s \geq k+1}$ converge vers x. Comme $(\underline{a}_{r_s})$ converge vers $\underline{a}$, on peut justifier le passage à la limite $\lim_{s \to +\infty} G^{(k)}_{\underline{a}_{r_s}}(x_s) = G^{(k)}_{\underline{a}}(x) = 0$, et conclure.

Une inégalité - Intersections atypiques, le cas transcendant

Les deux dernières parties proposaient de démontrer le Théorème 4, à savoir un contrôle sur le nombre de points d'intersection entre le graphe d'une fonction transcendante et un réseau plan dont le volume tend vers 0. Une inégalité était d'abord démontrée de manière indépendante via le Théorème 3. Les questions qui menaient à sa preuve faisaient appel à des techniques classiques et les quelques candidats qui ont pu les aborder avec calme les ont réussies. Le jury rappelle que même à ce point

avancé du sujet, une rédaction un peu trop négligée ne rapportera aucun point. La fin du sujet, et la preuve du Théorème 4, contenait des questions plus difficiles, en particulier les 28) et 29), et n'a presque jamais été étudiée.

$\star \quad \star$

$\star$