

Dénombrabilité

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit <i>dénombrable</i> s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.	Les parties infinies de $\mathbb{N}$ sont dénombrables.
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.	Un tel ensemble est dit <i>au plus dénombrable</i> .
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.	Les démonstrations ne sont pas exigibles. Les ensembles $\mathbb{N}^p$ ($p \in \mathbb{N}^*$), $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.	La démonstration n'est pas exigible.

Intégrales généralisées

Tous les chapitres de MPSI portant sur :
– l'intégration sur un segment
sont également au programme de cette colle.

a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Pour f continue par morceaux de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite <i>convergente</i> si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.	Notations $\int_a^{+\infty} f, \int_a^{+\infty} f(t) dt$. Intégrale convergente en $+\infty$. Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si f est continue.
Si f est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.	Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence.
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$ telles que $0 \leq f \leq g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.	
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.	
Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at} dt$.	

b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$

Une fonction f est dite <i>intégrable</i> sur $[a, +\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a, +\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} f $ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, +\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ». Pour f de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a, +\infty[$. Un calcul montrant que $\int_I f < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité.
Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.	Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$: – si $f(x) = O_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g sur $[a, +\infty[$ équivaut à celle de f.	Le résultat s'applique en particulier si $f(x) = o_{x \rightarrow +\infty}(g(x))$.

c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t) dt$. Intégrale convergente en b , en a . Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si f est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et d'intégrale divergente. Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence.
Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.	
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\int_a^b f(t)g'(t) dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et de $f'g$ sont de même nature. Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) du$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels.

d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

Intégrale absolument convergente.	
La convergence absolue implique la convergence.	
Une fonction est dite <i>intégrable</i> sur l'intervalle I si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur I est absolument convergente.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a, b]$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ». Fonction intégrable en b , en a . Pour f intégrable de I dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$.
Espace $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$.	
Inégalité triangulaire.	
Si f est continue et intégrable sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et si $\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	
Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque.	
Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{ x-a ^\alpha} dx$.	La fonction f est intégrable en a (resp. b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0 .

e) Intégration des relations de comparaison

Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence.	La fonction de référence est réelle de signe constant.
---	--