

1. Algèbre générale

Tous les chapitres de MPSI portant sur :
- l'arithmétique,
- les polynômes ,
- les structures algébriques

sont également au programme de cette colle.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Compléments sur les groupes	
Intersection de sous-groupes.	
Sous-groupe engendré par une partie. Partie génératrice d'un groupe.	
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Groupe monogène, groupe cyclique.	Groupe des racines n -ièmes de l'unité.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.	
Ordre d'un élément d'un groupe. Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x^n = e \iff d \mid n$.	L'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x .
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
b) Compléments sur les anneaux	
Produit fini d'anneaux.	
Idéal d'un anneau commutatif.	Noyau d'un morphisme d'anneaux commutatifs.
Idéal engendré par un élément.	Notation xA .
Divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation en termes d'idéaux.
c) Idéaux de $\mathbb{Z}$	
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	
Définition du PGCD de $n \geq 2$ entiers relatifs en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Lien avec le programme de première année.
d) Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Condition nécessaire et suffisante pour que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ soit un corps.	Notation $\mathbb{F}_p$ lorsque p est premier.
Théorème chinois : isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ si $m \wedge n = 1$; extension à plus de deux facteurs.	Application aux systèmes de congruences et à la résolution de systèmes d'équations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Indicatrice d'Euler φ . Calcul à l'aide de la décomposition en produits de facteurs premiers.	Relation $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ si m et n sont premiers entre eux ; expression de $\varphi(p^k)$ pour p premier.
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat.
e) Anneaux $\mathbb{K}[X]$	
<i>Dans ce paragraphe, $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.</i>	
Idéaux de $\mathbb{K}[X]$.	
Définition du PGCD de $n \geq 2$ polynômes en termes d'idéaux, relation de Bézout.	Par convention, le PGCD est unitaire.
Irréductibles de $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles unitaires.	
Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration du théorème de d'Alembert-Gauss est hors programme. L'étude des irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ pour un corps autre que $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ n'est pas un objectif du programme.
f) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{L}(E)$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{F}(X, \mathbb{K})$.
Sous-algèbre.	
Morphisme d'algèbres.	