



Colle de mathématiques n° 20
MP*1 & MP*2
Semaine du 19 au 24 mars 2018

Équations différentielles

Exercices sur les équations différentielles.

Calcul différentiel

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Dérivée selon un vecteur, dérivées partielles

Dérivée de l'application f au point a selon le vecteur v .

Notations $D_v f(a)$, $D_v f$.

Dérivées partielles dans une base.

Notations $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$, $\partial_i f(a)$.

Lorsqu'une base de E est fixée, l'identification entre $f(x)$ et $f(x_1, \dots, x_n)$ est autorisée.

b) Différentielle

Application différentiable au point a .

Notation $o(h)$. Développement limité à l'ordre 1.

Si f est différentiable en a , alors f est continue en a et dérivable en a selon tout vecteur.

Différentielle de f en a , encore appelée application linéaire tangente à f en a .

Notations $df(a)$, $df(a) \cdot v$.

Relation $df(a) \cdot v = D_v f(a)$.

Application différentiable sur un ouvert Ω . Différentielle sur Ω .

Notation df .

Cas particuliers : application constante, restriction à un ouvert d'une application linéaire.

Lien entre différentielle et dérivées partielles.

Matrice de $df(a)$ dans un couple de bases. Matrice jacobienne d'une application définie sur un ouvert de \mathbb{R}^n à valeurs dans \mathbb{R}^m .

Cas des fonctions d'une variable : si Ω est un intervalle ouvert de \mathbb{R} , la différentiabilité de f en a équivaut à la dérivabilité de f en a ; relation $f'(a) = df(a) \cdot 1$.

c) Opérations sur les applications différentiables

Différentielle d'une combinaison linéaire d'applications différentiables, de $B(f, g)$ où B est bilinéaire et f et g sont deux applications différentiables.

On utilise l'existence d'un réel positif C tel que, pour tout (u, v) , on ait $\|B(u, v)\| \leq C\|u\| \|v\|$. Tout développement sur les applications bilinéaires continues est hors programme.

Différentielle d'une composée d'applications différentiables.

Dérivée le long d'un arc : si γ est une application définie sur l'intervalle I de \mathbb{R} , dérivable en t , si f est différentiable en $\gamma(t)$, alors $(f \circ \gamma)'(t) = df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)$.

Interprétation géométrique en termes de tangentes.

Cas particulier fondamental : $\gamma(t) = x + th$.

Dérivation de $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_n(t))$.

Dérivées partielles d'une composée d'applications différentiables.

Règle de la chaîne : calcul des dérivées partielles de $(u_1, \dots, u_m) \mapsto f(x_1(u_1, \dots, u_m), \dots, x_n(u_1, \dots, u_m))$.

f) Applications de classe \mathcal{C}^1

Une application f est dite de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert Ω si elle est différentiable sur Ω et si df est continue sur Ω .
L'application f est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω si et seulement si les dérivées partielles relativement à une base de E existent en tout point de Ω et sont continues sur Ω .

Démonstration non exigible.

Opérations algébriques sur les applications de classe \mathcal{C}^1 .
Si f est une application de classe \mathcal{C}^1 de Ω dans F , si γ est une application de classe \mathcal{C}^1 de $[0, 1]$ dans Ω , si $\gamma(0) = a, \gamma(1) = b$, alors :

\Leftrightarrow PC : circulation d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel.

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Si Ω est connexe par arcs, caractérisation des fonctions constantes sur Ω .

Démonstration pour Ω convexe.

La recherche d'extrema et les fonctions de classe \mathcal{C}^k ne sont pas au programme de cette colle.