



Colle de mathématiques n° 19
MP*1 & MP*2
Semaine du 06 au 11 mars 2017

Structures algébriques usuelles

Programme précédent plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Groupes et sous-groupes

Groupe. Produit fini de groupes.
Sous-groupe. Caractérisation.
Intersection de sous-groupes.
Sous-groupe engendré par une partie.
Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$.

Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.

b) Morphismes de groupes

Morphisme de groupes.
Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme.
Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.

Exemples : signature, déterminant.
Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.

c) Groupes monogènes et cycliques

Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Groupe monogène, groupe cyclique.
Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z}, +)$.
Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.

Groupe des racines n -ièmes de l'unité.

d) Ordre d'un élément dans un groupe

Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.

Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G , alors, pour n dans \mathbb{Z} , on a $x^n = e \iff d|n$.
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.

Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x .

La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
