Colle de mathématiques n° 16
MP*1 & MP*2
Semaine du 30 janvier au 04 février 2017

Exercices de révision sur toute l'analyse à une variable

Séries numériques, intégration, suites et séries de fonctions, séries entières.

Probabilités : révision de première année

A - Probabilités sur un univers fini

B - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Espaces probabilisés	
Tribu sur un ensemble Ω.	On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.
Si $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω, une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ est une application P définie sur $\mathscr{A}$, à valeurs dans $[0,1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.
Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, une probabilité P sur $(\Omega, \mathscr{A})$ s'identifie, via la formule $$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$ à une famille $(p_\omega)_{\omega\in\Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.	
b) Propriétés élémentaires des probabilités	
Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$	

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors : $$P(A_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Big(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\Big).$$	
Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements, alors : $$P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	
Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.	Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles et indépendance	
Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes. Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.	Notations $P_B(A), P(A\|B)$.
d) Variables aléatoires discrètes	
Étant donnés un ensemble E et un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathscr{A}$.	Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.
Loi P_X de la variable aléatoire X.	Notations $X \sim Y, X \sim \mathscr{L}$. Notations $(X \geqslant x), (X \leqslant x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X.