



Colle de mathématiques n° 16
MP*1 & MP*2
Semaine du 27 janvier au 01 février 2025

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec \mathbb{N} .
Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement s'il est en bijection avec une partie de \mathbb{N} .
Un produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.
L'ensemble \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Les parties infinies de \mathbb{N} sont dénombrables.
Un tel ensemble est dit au plus dénombrable.
Les démonstrations ne sont pas exigibles.
Les ensembles \mathbb{N}^p ($p \in \mathbb{N}^*$), \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont dénombrables.
Le support d'une famille sommable de nombres complexes est dénombrable.
La démonstration n'est pas exigible.

b) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω . Espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .
Événements.
Probabilité sur un espace probabilisable, σ -additivité.
Espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .
Continuité croissante, continuité décroissante.

La manipulation de tribus n'est pas un objectif du programme.
Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Application : pour une suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right).$$

Propriété de sous-additivité de P pour une réunion dénombrable d'événements.
Événements négligeables, événements presque sûrs.
Une réunion (resp. intersection) finie ou dénombrable d'événements négligeables (resp. presque sûrs) est un événement négligeable (resp. presque sûr).

Systèmes quasi-complets d'événements.
Tout développement supplémentaire sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes.
Par définition, les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
Famille d'événements indépendants.

Notations $P_B(A), P(A|B)$.

Lorsque $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.
L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Si A et B sont indépendants, A et \overline{B} le sont aussi.

d) Espaces probabilisés discrets

Si Ω est un ensemble, une distribution de probabilités discrètes sur Ω est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par Ω et de somme 1.

Probabilité définie sur $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ associée à une distribution de probabilités discrètes sur Ω .

Support d'une distribution de probabilités discrète; le support est au plus dénombrable.

Si Ω est au plus dénombrable, on obtient ainsi toutes les probabilités sur $\mathcal{P}(\Omega)$.

e) Variables aléatoires discrètes

Une variable aléatoire discrète X définie sur l'espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) et à valeurs dans E est une application définie sur Ω , à valeurs dans l'ensemble E , telle que $X(\Omega)$ soit au plus dénombrable et que, pour tout $x \in X(\Omega)$, l'ensemble $X^{-1}(\{x\})$ appartienne à \mathcal{A} .

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète X .

Dans ce qui suit, toutes les variables aléatoires sont supposées discrètes.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Notation $X \sim Y$.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe.

Notations $(X = x)$, $(X \in A)$, $\{X = x\}$, $\{X \in A\}$.

Lorsque $E = \mathbb{R}$, la variable aléatoire X est dite réelle.

Notations $(X \leq x)$, $(X \geq x)$, $(X < x)$, $(X > x)$ (et analogues avec accolades) pour une variable aléatoire réelle X .

La loi de X peut au besoin être définie sur un ensemble contenant $X(\Omega)$.

La notation $X \sim Y$ ne suppose pas que X et Y sont définies sur le même espace probabilisé.

Un couple est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.

Notation $P(X = x, Y = y)$.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

f) Variables aléatoires indépendantes

Couple de variables aléatoires indépendantes, famille finie de variables aléatoires indépendantes.

Famille quelconque de variables aléatoires indépendantes.

Fonctions de variables aléatoires indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

Lemme des coalitions :

si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Existence d'espaces probabilisés portant une suite de variables indépendantes de lois discrètes données.

Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si la distribution de probabilités de (X, Y) est le produit des distributions de probabilités de X et Y . Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Extension au cas de plus de deux variables.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

La démonstration est hors programme.

Suites i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

g) Lois usuelles

Pour p dans $]0, 1[$, loi géométrique de paramètre p .

Variable géométrique de paramètre p .

Pour λ dans \mathbb{R}_+^* , loi de Poisson de paramètre λ .

Variable de Poisson de paramètre λ .

Notations $\mathcal{G}(p)$, $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Interprétation comme rang du premier succès dans le jeu de pile ou face infini.

Notations $\mathcal{P}(\lambda)$, $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Interprétation en termes d'événements rares.

h) Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$, l'espérance de X est la somme, dans $[0, +\infty]$, de la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

Pour une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, égalité $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

Une variable aléatoire complexe X est dite d'espérance finie si la famille $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

Espérance d'une variable géométrique, d'une variable de Poisson.

Formule de transfert : soit X une variable aléatoire discrète, f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs complexes; alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable; si tel est le cas : $E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)$.

Linéarité, positivité, croissance, inégalité triangulaire.

Si $|X| \leq Y$ et si $Y \in L^1$, alors $X \in L^1$.

Si X et Y sont dans L^1 et indépendantes, alors XY est dans L^1 et :

$$E(XY) = E(X) E(Y).$$

Notation $E(X)$.

Notation $E(X)$. Variables centrées.

La notation $X \in L^1$ signifie que X est d'espérance finie. On ne soulèvera aucune difficulté quant à la définition précise de L^1 .

Caractérisation des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^+ d'espérance nulle.

Extension au cas de n variables aléatoires.

L'espérance est définie pour des variables aléatoires discrètes à valeurs complexes ou à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

La variance et ses applications, ainsi que les fonctions génératrices seront au programme de la semaine suivante.