



Colle de mathématiques n° 15
MP*1 & MP*2
Semaine du 29 janvier au 03 février 2018

Exercices de révision sur toute l'analyse à une variable

Séries numériques, intégration, suites et séries de fonctions, séries entières.

Probabilités : révision de première année

A - Probabilités sur un univers fini

B - Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

Variables aléatoires discrètes

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Espaces probabilisés

Tribu sur un ensemble Ω .

Événements.

Si \mathcal{A} est une tribu sur Ω , une probabilité sur (Ω, \mathcal{A}) est une application P définie sur \mathcal{A} , à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $P(\Omega) = 1$ et, pour toute suite $(A_n)_{n \geq 0}$ d'événements deux à deux disjoints, on ait :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Si Ω est fini ou dénombrable et si $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une probabilité P sur (Ω, \mathcal{A}) s'identifie, via la formule

$$P(\{\omega\}) = p_\omega,$$

à une famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ de réels positifs sommable de somme 1.

On se borne à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

Espace probabilisable (Ω, \mathcal{A}) .

Espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) .

b) Propriétés élémentaires des probabilités

Continuité croissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements croissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Continuité décroissante : si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements décroissante pour l'inclusion, alors :

$$P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements, alors :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Événements négligeables, événements presque sûrs. Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Propriétés presque sûres. Tout développement sur ces notions est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles et indépendance

Extension des résultats vus en première année dans le cadre des univers finis : probabilité conditionnelle, formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formules de Bayes.

Couple d'événements indépendants. Famille quelconque d'événements mutuellement indépendants.

Notations $P_B(A), P(A|B)$.

d) Variables aléatoires discrètes

Étant donné un ensemble E et un espace probabilisé (Ω, \mathcal{A}, P) , une variable aléatoire discrète définie sur Ω est une application X de Ω dans E telle que $X(\Omega)$ soit fini ou dénombrable et que, pour tout x de $X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$. Loi P_X de la variable aléatoire X .

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle.

Notations $X \sim Y, X \sim \mathcal{L}$.

Notations $(X \geq x), (X \leq x), (X < x), (X > x)$ pour une variable aléatoire réelle X .