



Colle de mathématiques n° 15  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 23 au 28 janvier 2017

**B - Séries entières**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

**a) Généralités**

Série entière.

Lemme d'Abel : si la suite  $(a_n z_0^n)$  est bornée alors, pour tout nombre complexe  $z$  tel que  $|z| < |z_0|$ , la série  $\sum a_n z^n$  est absolument convergente.

Rayon de convergence d'une série entière.

La convergence est normale sur tout disque fermé de centre 0 et de rayon strictement inférieur à  $R$ ; la série  $\sum a_n z^n$  diverge grossièrement pour tout  $z$  tel que  $|z| > R$ . Si  $a_n = O(b_n)$ ,  $R_a \geq R_b$ . Si  $a_n \sim b_n$ ,  $R_a = R_b$ .

Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum n a_n z^n$  ont même rayon de convergence.

Utilisation de la règle de d'Alembert.

Continuité de la somme d'une série entière sur le disque ouvert de convergence.

Somme et produit de Cauchy de deux séries entières.

Disque ouvert de convergence; intervalle ouvert de convergence.

L'étude des propriétés de la somme au bord du disque ouvert de convergence n'est pas un objectif du programme.

**b) Série entière d'une variable réelle**

Primitivation d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence.

La somme d'une série entière est de classe  $C^\infty$  sur l'intervalle ouvert de convergence et ses dérivées s'obtiennent par dérivation terme à terme.

Expression des coefficients d'une série entière de rayon de convergence strictement positif à l'aide des dérivées en 0 de sa somme.

Si les fonctions  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  et  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$  coïncident sur un voisinage de 0, alors pour tout  $n$ ,  $a_n = b_n$ .

**c) Fonctions développables en série entière, développements usuels**

Développement de  $\exp(z)$  sur  $\mathbb{C}$ .

Développement de  $\frac{1}{1-z}$  sur  $\{z \in \mathbb{C}, |z| < 1\}$ .

Fonction développable en série entière sur un intervalle  $]-r, r[$  de  $\mathbb{R}$ . Série de Taylor d'une fonction de classe  $C^\infty$  sur un intervalle  $]-r, r[$ .

Développements de fonctions de variable réelle.

Les étudiants doivent connaître les développements en série entière des fonctions exponentielle, hyperboliques, circulaires, Arctan,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .

Les étudiants doivent savoir développer une fonction en série entière à l'aide d'une équation différentielle linéaire.

---

**c) Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice**

---

Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe.

Continuité de l'exponentielle.

Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.

Dérivation, si  $a$  est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application  $t \mapsto \exp(ta)$ .

Notations  $\exp(a), e^a, \exp(A), e^A$ .

$\Leftrightarrow$  I : calcul de l'exponentielle d'une matrice.

Démonstration non exigible.

Dérivation de  $t \mapsto \exp(tA)$  si  $A$  est une matrice carrée réelle ou complexe.

---