Colle de mathématiques n° 13
MP*1 & MP*2
Semaine du 08 au 13 janvier 2024

Espaces préhilbertiens réels (révisions de première année)

Contenus	Capacités & commentaires
a) Produit scalaire	
b) Norme associée à un produit scalaire	
c) Orthogonalité	
d) Bases orthonormales	
Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
e) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	

Endomorphismes d'un espace euclidien

Contenus	Capacités & commentaires
a) Adjoint d'un endomorphisme	
Représentation des formes linéaires sur un espace euclidien.	
Adjoint d'un endomorphisme d'un espace euclidien.	Notation u^*.
Linéarité de $u \mapsto u^*$, adjoint d'une composée, involutivité du passage à l'adjoint.	
Matrice de l'adjoint en base orthonormée.	
Si le sous-espace F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.	
b) Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition par $A^\top A = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Interprétation comme matrice de changement de base orthonormée. Matrices orthogonalement semblables.
Groupe orthogonal.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Matrice orthogonale positive ou directe, négative ou indirecte.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Pour E euclidien orienté et e et e' bases orthonormées directes de E, égalité des applications $\det_e$ et $\det_{e'}$.

Contenus	Capacités & Commentaires
c) Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle : définition par la conservation des normes.	Par définition, une isométrie vectorielle est linéaire. On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal » tout en lui préférant « isométrie vectorielle ».
Exemples : symétrie orthogonale, réflexion.	
Caractérisations des isométries de E parmi les endomorphismes de E : par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée, par la relation $u^* = u^{-1}$.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Déterminant d'une isométrie. Isométrie directe, indirecte.	
Groupe spécial orthogonal.	Notation $\mathrm{SO}(E)$.
d) Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales directes et indirectes de taille 2.	
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Morphisme $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$; surjectivité et noyau.	Isomorphisme de $\mathbb{U}$ sur $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
Classification des isométries d'un plan euclidien.	
e) Réduction des isométries	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Réduction d'une isométrie en base orthonormée.	Interprétation matricielle.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	La forme réduite justifie la terminologie « rotation ». La pratique du calcul des éléments géométriques d'un élément de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ n'est pas un attendu du programme.
f) Endomorphismes autoadjoints d'un espace euclidien	
Endomorphisme autoadjoint : définition par $u^* = u$.	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Caractérisation du caractère autoadjoint par la matrice en base orthonormée.	On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant « endomorphisme autoadjoint ». Notation $\mathcal{S}(E)$.
Les projecteurs orthogonaux sont les projecteurs autoadjoints.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme d'un espace euclidien E, alors u est autoadjoint si et seulement si E est somme orthogonale des sous-espaces propres de u ou, de manière équivalente, s'il existe une base orthonormée diagonalisant u.	Interprétation matricielle : une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ appartient à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si elle est orthogonalement diagonalisable.
g) Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs	
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}^+(E), \mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive.	Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.