Colle de mathématiques n° 12
MP*1 & MP*2
Semaine du 16 au 21 décembre 2024

Intégration sur un intervalle quelconque

Même programme que la semaine précédente, plus :

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre	
Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.	
Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est continue ; – pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est continue par morceaux ; – il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\lvert f(x,\cdot)\rvert \leqslant \varphi$. Alors $x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Soit I et A deux intervalles de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur $A\times I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ telle que : – pour tout $t\in I$, $f(\cdot,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ; – pour tout $x\in A$, $f(x,\cdot)$ est intégrable sur I ; – pour tout $x\in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)$ est continue par morceaux sur I ; – il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A, $\left\lvert\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot)\right\rvert \leqslant \varphi$. Alors $g : x\mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x\in A,\qquad g'(x)=\int_I \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$	En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.
Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,\cdot)$ pour $0\leqslant j\leqslant k-1$.	Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.