



Colle de mathématiques n° 12
MP*1 & MP*2
Semaine du 18 au 23 décembre 2023

Intégration sur un intervalle quelconque

Même programme que la semaine précédente, plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

h) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t .

Soit A une partie d'un espace normé de dimension finie, I un intervalle de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est continue;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est continue par morceaux;
- il existe une fonction φ intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $|f(x, \cdot)| \leq \varphi$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Alors $x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est définie et continue sur A .

Soit I et A deux intervalles de \mathbb{R} , f une fonction définie sur $A \times I$ à valeurs dans \mathbb{K} telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ positive intégrable sur I telle que, pour tout x de A , $\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) \right| \leq \varphi$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A , ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Alors $g : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A et vérifie :

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Extension à la classe \mathcal{C}^k d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ et d'intégrabilité des $\frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, \cdot)$ pour $0 \leq j \leq k-1$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique.