Colle de mathématiques n° 11
MP*1 & MP*2
Semaine du 11 au 16 décembre 2023

Exercices sur les suites et séries de fonctions et l'approximation uniforme

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES

f) Convergence dominée

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de convergence dominée : soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de I dans $\mathbb{K}$ convergeant simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux et telle qu'il existe une fonction φ positive intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n. Alors :

$$\int_I f_n \longrightarrow \int_I f.$$

La démonstration est hors programme.

Extension au cas d'une famille à paramètre réel $(f_\lambda)_{\lambda \in J}$ où J est un intervalle de $\mathbb{R}$.

g) Intégration terme à terme

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de positivité ou de sommabilité, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I, alors, dans $[0, +\infty]$,

$$\int_I \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \Big) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme.

En particulier, l'intégrabilité de $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ sur I équivaut à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t < +\infty.$$

Si (f_n) est une suite de fonctions continues par morceaux et intégrables sur I, à valeurs dans $\mathbb{K}$, telle que la série $\sum f_n$ converge simplement et que sa somme soit continue par morceaux sur I et telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t < +\infty,$$

alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La démonstration est hors programme. On met en évidence le parallélisme de cet énoncé et du précédent avec ceux issus de la théorie des familles sommables.
On présente des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.

Les théorèmes de continuité et dérivabilité d'une intégrale à paramètre, seront au programme de la prochaine semaine.