



Colle de mathématiques n° 10
MP*1 & MP*2
Semaine du 05 au 10 décembre 2016

On rappelle que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de \mathbb{C} .

Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.

Le programme de cette semaine comprend toute la réduction. Il inclut donc le programme précédent et les éléments suivants.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

e) Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Interprétation géométrique.

La pratique de la trigonalisation n'est pas un objectif du programme. On se limite au cas $n = 2$ et à des cas particuliers simples pour $n = 3$.

Traduction matricielle.

Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

$\Leftrightarrow I$: recherche de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient des traces de deux itérées successives.

f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E .

g) Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathcal{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u . Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathcal{L}(E)$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.

Si d est le degré du polynôme minimal de u , alors la famille $(u^k)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

Si P annule u , toute valeur propre de u est racine de P .

Théorème de Cayley-Hamilton.

Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M , sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le polynôme minimal est unitaire.

Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda) x$.

Démonstration non exigible.

h) Lemme de décomposition des noyaux

Si P_1, \dots, P_r sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P , alors :

$$\text{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^r \text{Ker}(P_i(u)).$$

i) Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u , ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.

Traduction matricielle.

j) Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u , décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.

Traduction matricielle.

La décomposition de Dunford et la réduction de Jordan sont hors programme.
