



Colle de mathématiques n° 10  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 11 au 16 décembre 2017

**Espaces préhilbertiens réels (révisions de première année)**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Produit scalaire**

---

**b) Norme associée à un produit scalaire**

---

**c) Orthogonalité**

---

Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.  
Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.

Notation  $X^\perp$ .

**d) Bases orthonormales**

---

**h) Matrices orthogonales**

---

Matrice orthogonale : définition  ${}^tAA = I_n$ , caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.

Groupe orthogonal.

Notations  $O_n(\mathbb{R})$ ,  $O(n)$ .

Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.

Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie. Matrice orthogonale positive, négative; isométrie positive, négative.

Groupe spécial orthogonal.

Notations  $SO(E)$ ,  $SO_n(\mathbb{R})$ ,  $SO(n)$ .

---

**i) Isométries vectorielles en dimension 2**

---

**Programme de deuxième année**

Représentation des formes linéaires dans un espace euclidien.

**Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie**

---

Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

$\Leftrightarrow$  PC : polariseur, loi de Malus.

Caractérisation métrique du projeté orthogonal.

Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.  
Inégalité de Bessel.

---

### b) Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel

---

Suite totale.

Exemples de suites de polynômes orthogonaux.

Si  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien  $E$ , et si, pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $p_n$  désigne le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $\text{Vect}(e_0, \dots, e_n)$ , alors, pour tout  $x$  de  $E$ ,  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $x$ .

$\Leftrightarrow$  I : calcul explicite des polynômes d'une telle suite ; application à l'approximation des fonctions.

---

### c) Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien

---

Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.

Lien avec les matrices symétriques réelles.

La notion d'adjoint d'un endomorphisme est hors programme.

Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Théorème spectral : si  $u$  est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien  $E$ , alors  $E$  est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de  $u$  ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant  $u$ .

Interprétation matricielle de ce résultat.

La notion d'endomorphisme symétrique positif (ou défini positif) est hors programme.

$\Leftrightarrow$  SI : matrice d'inductance, matrice d'inertie.

---

### d) Isométries vectorielles d'un espace euclidien

---

Isométrie vectorielle d'un espace euclidien.

Autre dénomination : automorphisme orthogonal.

Lien avec les matrices orthogonales.

Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.

Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.

Interprétation dans le registre matriciel.

Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.

La forme réduite justifie la terminologie « rotation ».

$\Leftrightarrow$  SI : liaisons entre solides.

---

*Les espaces préhilbertiens considérés dans ce chapitre sont réels.*

*Toute notion sur les espaces préhilbertiens complexes est hors programme.*

*Attention :*

- *il n'y a plus de forme quadratique ni d'adjoint ; les autoadjoints s'appellent maintenant symétriques ;*
- *la notion d'endomorphisme symétrique (défini) positif est hors programme et de même pour les matrices.*