



# Colle de mathématiques n° 9

## MP\*1 & MP\*2

Semaine du 27 novembre au 02 décembre 2023

### Exercices sur les espaces vectoriels normés

#### Fonctions numériques d'une variable réelle

Révision de première année.

#### Fonctions vectorielles

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

#### a) Dérivabilité en un point

Dérivabilité en un point.

Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité à l'ordre 1.  
Interprétation cinématique.  
Traduction en termes de coordonnées dans une base.

Dérivabilité à droite et à gauche.

---

#### b) Opérations sur les fonctions dérivables

Combinaison linéaire de fonctions dérivables.

Dérivabilité et dérivée de  $L(f)$ , où  $L$  est linéaire.

Dérivabilité et dérivée de  $B(f, g)$ , où  $B$  est bilinéaire, de  $M(f_1, \dots, f_p)$ , où  $M$  est multilinéaire.

Cas du produit scalaire, du déterminant.

Dérivabilité et dérivée de  $f \circ \varphi$  où  $\varphi$  est une fonction réelle de variable réelle et  $f$  une fonction vectorielle.

Applications de classe  $\mathcal{C}^k$ . Opérations sur les applications de classe  $\mathcal{C}^k$ .

---

#### c) Intégration sur un segment

Intégrale d'une fonction vectorielle continue par morceaux sur un segment de  $\mathbb{R}$ .

Notations  $\int_{[a,b]} f$ ,  $\int_a^b f$ ,  $\int_a^b f(t) dt$ .

Linéarité de l'intégrale. Relation de Chasles.

Pour  $L$  linéaire, intégrale de  $L(f)$ .

Inégalité triangulaire  $\left\| \int_a^b f \right\| \leq \int_a^b \|f\|$ .

Sommes de Riemann associées à une subdivision régulière.

---

#### d) Intégrale fonction de sa borne supérieure

Dérivation de  $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$  pour  $f$  continue.

Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ .

---

#### e) Formules de Taylor

Formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .  
Formule de Taylor-Young à l'ordre  $n$  pour une fonction de classe  $\mathcal{C}^n$ .

---