Colle de mathématiques n° 8
MP*1 & MP*2
Semaine du 18 au 23 novembre 2024

Topologie des espaces vectoriels normés

Même programme que la semaine précédente, plus :

Contenus	Capacités & commentaires
g) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Un fermé relatif d'une partie compacte est compact. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
h) Applications continues sur une partie compacte	
Image continue d'une partie compacte. Théorème de Heine.	
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.	On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.
i) Connexité par arcs	
Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points ; partie connexe par arcs.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes sont les composantes connexes par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées. Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
j) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration n'est pas exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.	La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence. Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé. Si E est de dimension finie, $\mathscr{L}(E,F) = \mathscr{L}_c(E,F)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.	Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.

Séries numériques et vectorielles

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série, séries télescopiques.	
Série absolument convergente.	
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.