



# Colle de mathématiques n° 8

MP\*1 & MP\*2

Semaine du 27 novembre au 02 décembre 2017

On rappelle que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de  $\mathbb{C}$ .

Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.

Attention : la trigonalisation n'est pas au programme de cette colle, ni les polynômes d'endomorphismes ni, par conséquent, la caractérisation des endomorphismes diagonalisables à l'aide d'un polynôme annulateur.

En particulier, la diagonalisabilité d'un endomorphisme induit n'a pas encore été démontrée en cours. Ne pas donner d'exercice de type diagonalisation simultanée.

La notion de projecteur spectral d'un endomorphisme diagonalisable est hors programme.

## Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

### a) Généralités

Matrices semblables, interprétation géométrique.

Les étudiants doivent savoir utiliser l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice carrée.

Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.

En dimension finie, traduction de la stabilité d'un sous-espace  $F$  par un endomorphisme  $u$  à l'aide de la matrice de  $u$  dans une base adaptée à  $F$ .

### b) Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Droite stable par un endomorphisme.

$\Leftrightarrow$  SI : matrice d'inductance : inductance cyclique et inductance homopolaire.

Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.

La notion de valeur spectrale est hors programme.

La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe.

Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie  $n$  est fini, et de cardinal au plus  $n$ .

Si deux endomorphismes  $u$  et  $v$  commutent, tout sous-espace propre de  $u$  est stable par  $v$ .

Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.

Équation aux éléments propres  $MX = \lambda X$ .  
Deux matrices semblables ont même spectre.  
Si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{K}'$  et si  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , le spectre de  $M$  dans  $\mathbb{K}$  est contenu dans le spectre de  $M$  dans  $\mathbb{K}'$ .

### c) Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Le polynôme caractéristique est unitaire.

Notations  $\chi_u, \chi_A$ .

Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et  $n - 1$ .

Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre.

La dimension du sous-espace propre associé à  $\lambda$  est majorée par la multiplicité de  $\lambda$ .

Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire.

Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.

**d) Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables**

Un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de  $E$  dans laquelle sa matrice est diagonale.

Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à  $E$ .

Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^n$  canoniquement associé est diagonalisable.

Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.

Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension  $n$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes.

Pour qu'un endomorphisme  $u$  soit diagonalisable, il faut et il suffit que  $\chi_u$  soit scindé et que, pour toute valeur propre de  $u$ , la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.

Une telle base est constituée de vecteurs propres.

Cas des projecteurs, des symétries.

Dans la pratique des cas numériques, on se limite à  $n = 2$  ou  $n = 3$ .

Traduction matricielle.

Traduction matricielle.

**f) Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes**

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel  $E$  de dimension finie, matrice nilpotente.

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0.

L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de  $E$ .