



Colle de mathématiques n° 8
MP*1 & MP*2
Semaine du 20 au 25 novembre 2023

Topologie des espaces vectoriels normés

Même programme que la semaine précédente, plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

g) Parties compactes d'un espace normé

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.
Une partie compacte est fermée et bornée.
Un fermé relatif d'une partie compacte est compact.
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.
Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

h) Applications continues sur une partie compacte

Image continue d'une partie compacte.
Théorème de Heine.
Théorème des bornes atteintes pour une application numérique définie et continue sur un compact non vide.

On souligne l'importance de la compacité dans les problèmes d'optimisation, notamment en mettant en évidence des situations où l'on prouve l'existence d'un extremum à l'aide d'une restriction à un compact.

i) Connexité par arcs

Dans un espace vectoriel normé, chemin (ou arc) joignant deux points; partie connexe par arcs.
Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de \mathbb{R} sont les intervalles.
Image continue d'une partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie A de E .
Les classes sont les composantes connexes par arcs.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

j) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie. Topologie naturelle d'un espace normé de dimension finie.

La démonstration n'est pas exigible.
La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.
Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.
Un sous-espace de dimension finie d'un espace normé est fermé.

CONTENUS

Si E est de dimension finie, $\mathcal{L}(E, F) = \mathcal{L}_c(E, F)$.
Continuité des applications polynomiales définies sur un espace normé de dimension finie, des applications multilinéaires définies sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimensions finies.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Exemples : déterminant, produit matriciel, composition d'applications linéaires.
