Colle de mathématiques n° 7
MP*1 & MP*2
Semaine du 12 au 16 novembre 2024

Exercices sur les séries numériques

Topologie des espaces vectoriels normés

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes et espaces vectoriels normés	
Norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Structure d'espace vectoriel normé.	Vecteurs unitaires.
Distance associée à une norme.	Inégalité triangulaire.
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.	On introduit à cette occasion la notion de partie convexe d'un espace vectoriel réel.
Parties, suites, fonctions bornées.	
Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	
Normes $\\| \\|_1$, $\\| \\|_2$, $\\| \\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$.	
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$.	Notation $\\| \\|_\infty$. Pour les applications pratiques, on peut utiliser sans justification l'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$.
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.	Notations $\\| \\|_1$ et $\\| \\|_2$.
Produit fini d'espaces vectoriels normés.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.	
Suites extraites, valeurs d'adhérence.	Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes. Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite.	Utilisation de suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.
d) Topologie d'un espace normé	
Ouvert d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des ouverts par réunion quelconque, par intersection finie.	Une boule ouverte est un ouvert. Un produit (fini) d'ouverts est un ouvert.
Voisinage d'un point.	
Fermé d'un espace normé. Stabilité de l'ensemble des fermés par intersection quelconque, par réunion finie.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées. Un produit (fini) de fermés est fermé.
Point intérieur, point adhérent.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	
Si A est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de A. Voisinage relatif.	Par définition, une partie U de A est un ouvert relatif si U est voisinage relatif de chacun de ses points. Caractérisation comme intersection avec A d'un ouvert de E. Les fermés relatifs sont par définition les complémentaires dans A des ouverts relatifs. Caractérisation séquentielle. Caractérisation comme intersection avec A d'un fermé de E.

e) Étude locale d'une application, continuité

Limite en un point adhérent à une partie A. Caractérisation séquentielle.	Extensions : limite de $f(x)$ lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$, limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ lorsque A est une partie de $\mathbb{R}$, limite infinie en a adhérent à A pour une fonction réelle.
Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés. Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée. Continuité en un point. Caractérisation séquentielle.	
Opérations algébriques sur les applications continues. Composition de deux applications continues.	Deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	
Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.	Caractère 1-lipschitzien de l'application $x \mapsto d(x, A)$ où A est une partie non vide de E.

f) Applications linéaires et multilinéaires continues

Critère de continuité d'une application linéaire entre deux espaces normés : $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est continue si et seulement s'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $$\forall x \in E,\ \|u(x)\| \leqslant C\|x\|.$$	Notation $\mathscr{L}_c(E,F)$.
Norme subordonnée (ou norme d'opérateur) d'une application linéaire continue.	Notations $\lVert\!\lvert u \rvert\!\rVert$, $\|u\|_{\text{op}}$. La norme d'opérateur est une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$. Sous-multiplicativité de la norme d'opérateur. Adaptation aux matrices.
Critère de continuité des applications multilinéaires.	La démonstration n'est pas exigible.

La compacité, la connexité par arcs ainsi que les théorèmes concernant la dimension finie seront au programme de la prochaine colle. Néanmoins, et même si ces résultats n'ont pas encore été démontrés, les élèves savent, qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes et que toute application (multi)linéaire est continue.