



Colle de mathématiques n° 6  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 07 au 12 novembre 2016

**Topologie des espaces vectoriels normés**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**f) Parties compactes d'un espace normé**

Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass.  
Une partie compacte est fermée et bornée.  
Une partie fermée d'une partie compacte est compacte.  
Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.  
Produit d'une famille finie de compacts.

La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.

---

**g) Applications continues sur une partie compacte**

Image d'une partie compacte par une application continue.  
Théorème de Heine.

Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.

---

**h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé**

Chemin continu joignant deux points.  
  
Parties connexes par arcs.  
  
Les parties connexes par arcs de  $\mathbb{R}$  sont les intervalles.  
Image continue d'une partie connexe par arcs.

Relation d'équivalence associée sur une partie  $A$  de  $E$ .  
Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.  
Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs.  
Cas des parties convexes, des parties étoilées.  
  
Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.

---

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**i) Espaces vectoriels normés de dimension finie**

Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.  
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.  
  
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée.

Démonstration non exigible.  
  
Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

---

**A - Séries numériques et vectorielles**

CONTENUS

Série absolument convergente.

Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Cas des séries matricielles.

Le critère de Cauchy est hors programme.

---