Colle de mathématiques n° 6
MP*1 & MP*2
Semaine du 13 au 18 novembre 2017

Merci de donner en priorité un exercice sur la compacité.

Structures algébriques usuelles (révisions de première année)

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
b) Sous-espaces vectoriels	
c) Familles libres, génératrices, bases	
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.	

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Théorème de la base extraite. Théorème de la base incomplète.	
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
c) Sous-espaces et dimension	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
b) Endomorphismes	
c) Détermination d'une application linéaire	
Par l'image d'une base. Par ses restrictions à une décomposition.	
d) Théorème du rang	

Topologie des espaces vectoriels normés

Contenus	Capacités & commentaires
f) Parties compactes d'un espace normé	
Définition d'une partie compacte par la propriété de Bolzano-Weierstrass. Une partie compacte est fermée et bornée. Une partie fermée d'une partie compacte est compacte. Une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence. Produit d'une famille finie de compacts.	La propriété de Borel-Lebesgue est hors programme.
g) Applications continues sur une partie compacte	
Image d'une partie compacte par une application continue. Théorème de Heine.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des bornes atteintes.
h) Parties connexes par arcs d'un espace vectoriel normé	
Chemin continu joignant deux points.	Relation d'équivalence associée sur une partie A de E. Les classes d'équivalence sont les composantes connexes par arcs.
Parties connexes par arcs.	Dans des cas simples, une figure convaincante vaut preuve de connexité par arcs. Cas des parties convexes, des parties étoilées.
Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.	
Image continue d'une partie connexe par arcs.	Cas particulier des applications à valeurs réelles : théorème des valeurs intermédiaires.
i) Espaces vectoriels normés de dimension finie	
Équivalence des normes sur un espace de dimension finie.	Démonstration non exigible.
Invariance des différentes notions topologiques par rapport au choix d'une norme en dimension finie.	Les étudiants doivent savoir que la convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.

Contenus	Capacités & Commentaires
Une partie d'un espace normé de dimension finie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Une suite bornée d'un espace normé de dimension finie converge si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.	

A - Séries numériques et vectorielles

Contenus	Capacités & commentaires
a) Séries à valeurs dans un espace normé de dimension finie	
Sommes partielles. Convergence, divergence.	La série de terme général u_n est notée $\sum u_n$.
Somme et restes d'une série convergente.	En cas de convergence, notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ ont même nature.
Série absolument convergente.	Cas des séries matricielles.
Une série absolument convergente d'éléments d'un espace vectoriel normé de dimension finie est convergente.	Le critère de Cauchy est hors programme.