



Colle de mathématiques n° 5  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 06 au 10 novembre 2017

### Topologie des espaces vectoriels normés

Même programme que la semaine précédente plus :

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

#### e) Étude locale d'une application, continuité

---

Limite en un point adhérent à une partie  $A$ .  
Caractérisation séquentielle.

Extensions : limite de  $f(x)$  lorsque  $\|x\|$  tend vers  $+\infty$ , limite de  $f(x)$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  lorsque  $A$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , limite infinie en  $a$  adhérent à  $A$  pour une fonction réelle.

Cas d'une application à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.

Opérations algébriques sur les limites. Limite d'une composée.

Continuité en un point.

Caractérisation séquentielle.

Opérations algébriques sur les applications continues.

Composition de deux applications continues.

Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.

Applications uniformément continues, applications lipschitziennes.

Pour qu'une application linéaire  $u$  de  $E$  dans  $F$  soit continue, il faut et il suffit qu'il existe  $C > 0$  tel que :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| \leq C\|x\|.$$

Les étudiants doivent savoir que deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

Exemple : l'application  $x \mapsto d(x, A)$  où  $A$  est une partie de  $E$ .

Notation  $\mathcal{L}_c(E, F)$ .

La notion de norme subordonnée est hors programme.

---

*Les notions de compacité et de connexité par arcs seront au programme de la prochaine colle.*

*La complétude est hors programme.*

*Les élèves savent qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes, même si le résultat n'a pas encore été démontré.*