# Colle de mathématiques n° 5
# MP*1 & MP*2
# Semaine du 16 au 22 octobre 2023

*Quelques précisions :*

- *les colles doivent démarrer sur un exercice technique étudiant l'intégrabilité d'une fonction explicite sur un intervalle ;*
- *l'étude des intégrales semi-convergentes n'étant pas un objectif du programme, on restera raisonnable dans ce domaine ;*
- *ce programme inclut le cours de première année concernant l'intégration sur un segment, et il est donc possible, après le premier exercice sus-cité, de donner un exercice d'intégration sur un segment ;*
- *les théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale et l'étude d'intégrales à paramètres ne sont pas au programme de cette colle.*

## Intégration sur un segment, calcul de primitives : révisions de première année

## Intégration sur un intervalle quelconque

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$** | |
| Pour $f$ continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. | Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.<br>Intégrale convergente en $+\infty$.<br>Dérivation de $x \mapsto \int_x^{+\infty} f$ si $f$ est continue. |
| Si $f$ est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et à valeurs positives, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.<br>Si $f$ et $g$ sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$ telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.<br>Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$.<br>Pour $a \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-at}\mathrm{d}t$. | Écriture $\int_a^{+\infty} f = +\infty$ en cas de divergence. |
| **b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$** | |
| Une fonction $f$ est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si elle est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ et si $\int_a^{+\infty} \lvert f \rvert$ converge. | On utilise indifféremment les expressions « $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».<br>Pour $f$ de signe constant, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$.<br>new Un calcul montrant que $\int_I \lvert f \rvert < +\infty$ vaut preuve d'intégrabilité. |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| Si $f$ est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge. | Fonction intégrable en $+\infty$. L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme. |
| Théorème de comparaison : pour $f$ et $g$ deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{K}$ :<br>– si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, alors l'intégrabilité de $g$ sur $[a,+\infty[$ implique celle de $f$ ;<br>– si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de $g$ sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de $f$. | Le résultat s'applique en particulier si<br>$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(g(x))$. |

## c) Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

| | |
|---|---|
| Intégrale généralisée d'une fonction continue par morceaux sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. | Notations $\int_a^b f, \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.<br>Intégrale convergente en $b$, en $a$.<br>Écriture $\int_a^b f = +\infty$ si $f$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et d'intégrale divergente.<br>new Pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, un calcul aboutissant à un résultat fini vaut preuve de convergence. |
| Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.<br>Intégration par parties sur un intervalle quelconque :<br>$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$ | L'existence des limites du produit $fg$ aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de $fg'$ et de $f'g$ sont de même nature.<br>Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité. |
| Changement de variable : étant données une fonction $f$ continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi : ]\alpha,\beta[ \to ]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence. | Adaptation au cas où $\varphi$ est strictement décroissante.<br>On applique ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable usuels. |

## d) Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

| | |
|---|---|
| Intégrale absolument convergente.<br>La convergence absolue implique la convergence.<br>Une fonction est dite intégrable sur l'intervalle $I$ si elle y est continue par morceaux et si son intégrale sur $I$ est absolument convergente. | On utilise indifféremment les expressions « $f$ est intégrable sur $[a,b[$ » et « l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument ».<br>Fonction intégrable en $b$, en $a$. |
| Espace $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables de $I$ dans $\mathbb{K}$. | Pour $f$ intégrable de $I$ dans $\mathbb{K}$, notation $\int_I f$. |
| Inégalité triangulaire.<br>Si $f$ est continue et intégrable sur $I$, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\int_I f = 0$, alors $f$ est identiquement nulle.<br>Adaptation du théorème de comparaison en une borne quelconque. | |
| Si $\alpha \in \mathbb{R}$, nature de l'intégrale de Riemann $\int_a^b \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}\mathrm{d}x$. | La fonction $f$ est intégrable en $a$ (resp. $b$) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0. |

## e) Intégration des relations de comparaison

| | |
|---|---|
| Intégration des relations de comparaison, pour les intégrales partielles ou les restes : domination, négligeabilité, équivalence. | La fonction de référence est réelle de signe constant. |