



Colle de mathématiques n° 4  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 16 au 21 octobre 2017

### Série numériques

Les colles doivent démarrer sur un exercice technique étudiant la convergence d'une série numérique explicite.

### Topologie des espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

#### a) Normes et espaces vectoriels normés

---

Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Structure d'espace vectoriel normé.  
Distance associée à une norme.  
Boules fermées, boules ouvertes, sphères. Convexité des boules.  
Parties, suites, fonctions bornées.  
Norme associée à un produit scalaire sur un espace pré-hilbertien réel.  
Normes  $\| \cdot \|_1$ ,  $\| \cdot \|_2$ ,  $\| \cdot \|_\infty$  sur  $\mathbb{K}^n$ .  
Norme de la convergence uniforme sur l'espace des fonctions bornées à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .  
Normes de la convergence en moyenne et de la convergence en moyenne quadratique sur l'espace des fonctions continues sur un segment à valeurs réelles ou complexes.  
Produit fini d'espaces vectoriels normés.

Vecteurs unitaires.  
Inégalité triangulaire.

---

#### b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé

---

Suite convergente, divergente. Unicité de la limite. Caractère borné d'une suite convergente. Opérations algébriques sur les suites convergentes. Convergence d'une suite à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés.  
Suites extraites, valeurs d'adhérence.

Une suite ayant au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

---

#### c) Comparaison des normes

---

Normes équivalentes.

Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation des suites pour établir que deux normes ne sont pas équivalentes.  
La comparaison de normes définies sur des espaces fonctionnels fait partie des capacités attendues des étudiants.

---

**d) Topologie d'un espace normé**

---

Ouvert d'un espace normé. Stabilité par réunion quelconque, par intersection d'une famille finie. Voisinage d'un point.	Une boule ouverte est un ouvert.
Fermé d'un espace normé. Stabilité par intersection quelconque, par réunion finie. Point intérieur, point adhérent. Intérieur, adhérence, frontière d'une partie. Caractérisation séquentielle des points adhérents, des fermés. Partie dense. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	Une boule fermée, une sphère, sont fermées.
Si $A$ est une partie d'un espace normé, ouvert et fermé relatifs de $A$ . Voisinage relatif.	Caractérisation séquentielle des fermés de $A$ .

---