Colle de mathématiques n° 2
MP*1 & MP*2
Semaine du 26 septembre au 01 octobre 2016

Quelques précisions :
- *les colles doivent démarrer sur un exercice technique étudiant l'intégrabilité d'une fonction explicite sur un intervalle ;*
- *l'étude des intégrales semi-convergentes n'étant pas un objectif du programme, on restera raisonnable dans ce domaine ;*
- *ce programme inclut le cours de première année concernant l'intégration sur un segment, et il est donc possible, après le premier exercice sus-cité, de donner un exercice d'intégration sur un segment ;*
- *l'intégration des relations de comparaison sera au programme de la prochaine colle ;*
- *les théorèmes de passage à la limite sous l'intégrale et l'étude d'intégrales à paramètres ne sont pas au programme de cette colle.*

Intégration sur un segment : révisions de première année

Intégration sur un intervalle quelconque

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Pour f continue par morceaux de $[a,+\infty[$ dans $\mathbb{K}$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est dite convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$. Si tel est le cas, on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ cette limite. Linéarité de l'intégrale sur $[a,+\infty[$, positivité. Dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_x^{+\infty} f$ si f est continue.	Notations $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.
b) Intégrabilité sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Une fonction f est dite intégrable sur $[a,+\infty[$ si $\displaystyle\int_a^{+\infty} \lvert f\rvert$ converge.	On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,+\infty[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
Si f est intégrable sur $[a,+\infty[$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.	L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
c) Intégration des fonctions positives sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$	
Si f est positive sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ est majorée. Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ sur $[1,+\infty[$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Pour f et g deux fonctions réelles positives continues par morceaux sur $[a,+\infty[$: – si $0 \leqslant f \leqslant g$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(g(x)\big)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ implique celle de f ; – si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, l'intégrabilité de g sur $[a,+\infty[$ équivaut à celle de f.	

d) Intégration sur un intervalle quelconque

Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle semi-ouvert de $\mathbb{R}$.	Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a,b[$ », et « l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge absolument ».
Pour α dans $\mathbb{R}$, étude de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^\alpha}$ sur $]a,b]$, de l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{\lvert x-a\rvert^\alpha}$ sur $[b,a[$.	
Adaptation des paragraphes précédents aux fonctions définies sur un intervalle ouvert $]a,b[$ de $\mathbb{R}$, $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$.	Notations $\displaystyle\int_a^b f$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, linéarité et positivité de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_I f$ sur l'espace des fonctions de I dans $\mathbb{K}$ dont l'intégrale converge. Relation de Chasles. Espace des fonctions intégrables de I dans E. Inégalité triangulaire. Si f est continue et intégrable sur I, à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors f est identiquement nulle.	Notation $\displaystyle\int_I f$.
Changement de variable : étant données une fonction f continue sur $]a,b[$ et une fonction $\varphi : \ ]\alpha,\beta[\to]a,b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(u)\big)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature et égales en cas de convergence.	Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. Les étudiants peuvent appliquer ce résultat sans justification dans des cas de changements de variable simples (fonctions affines, puissances, exponentielle, logarithme).
Intégration par parties sur un intervalle quelconque : $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.	L'existence des limites du produit fg aux bornes de l'intervalle assure que les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature. Notation $\big[fg\big]_a^b$.