# Colle de mathématiques n° 1
# MP*1 & MP*2
# Semaine du 16 au 21 septembre 2024

### Exercices sur les polynômes et les fractions rationnelles (révisions de première année)

### Structures algébriques usuelles (révisions de première année)

*Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.*
*Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.*

#### A - Espaces vectoriels

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Espaces vectoriels** | |
| | |
| **b) Sous-espaces vectoriels** | |
| | |
| **c) Familles libres, génératrices, bases** | |
| | |

#### B - Espaces de dimension finie

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Existence de bases** | |
| Théorème de la base extraite.<br>Théorème de la base incomplète. | |
| **b) Dimension d'un espace de dimension finie** | |
| | |
| **c) Sous-espaces et dimension** | |
| | |

#### C - Applications linéaires

| CONTENUS | CAPACITÉS & COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Généralités** | |

| Contenus | Capacités & Commentaires |
|---|---|
| **b) Endomorphismes** | |
| **c) Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.** | |
| **d) Théorème du rang** | |
| **e) Formes linéaires et hyperplans** | |
| Forme linéaire.<br>Hyperplan. | Formes coordonnées relativement à une base.<br>Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle.<br>Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie. |
| Si $H$ est un hyperplan de $E$, alors pour toute droite $D$ non contenue dans $H$, on a $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.<br>Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. | En dimension $n$, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$. |
| Si $E$ est un espace de dimension finie $n$, l'intersection de $m$ hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de $E$ de dimension $n-m$ est l'intersection de $m$ hyperplans. | Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.<br>L'étude de la dualité est hors programme. |

## Programme de deuxième année

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **f) Algèbres** | |
| Algèbre. | Les algèbres sont unitaires.<br>Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. |
| Sous-algèbre.<br>Morphisme d'algèbres. | |

| Contenus | Capacités & commentaires |
|---|---|
| **a) Compléments d'algèbre linéaire** | |
| Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.<br>Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $$\dim\Big(\sum_{i=1}^{p} F_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$$ avec égalité si et seulement si la somme est directe.<br>Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de $E$ tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout $i$, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\mid E_i} = u_i$ pour tout $i$. | Projecteurs associés à une décomposition de $E$ en somme directe.<br>Base adaptée à une décomposition en somme directe. |