Colle de mathématiques n° 1
MP*1 & MP*2
Semaine du 18 au 23 septembre 2023

Exercices sur les polynômes et les fractions rationnelles (révisions de première année)

Structures algébriques usuelles (révisions de première année)

Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en MPSI s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.
Les exercices proposés devront donc rester strictement dans ce cadre. La notion de caractéristique d'un corps est hors programme.

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
b) Sous-espaces vectoriels	
c) Familles libres, génératrices, bases	

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Théorème de la base extraite. Théorème de la base incomplète.	
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
c) Sous-espaces et dimension	

C - Applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	

Contenus	Capacités & Commentaires
b) Endomorphismes	
c) Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base.	
d) Théorème du rang	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan. Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

Programme de deuxième année

Contenus	Capacités & commentaires
f) Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre. Morphisme d'algèbres.	

Contenus	Capacités & commentaires
a) Compléments d'algèbre linéaire	
new Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels. Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, $\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$ avec égalité si et seulement si la somme est directe. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i, alors il existe une et une seule $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\vert E_i} = u_i$ pour tout i.	Projecteurs associés à une décomposition de E en somme directe. Base adaptée à une décomposition en somme directe.