



Colle de mathématiques n° 1  
MP\*1 & MP\*2  
Semaine du 25 au 30 septembre 2017

**Révision sur les fonctions numériques d'une variable réelle**

Continuité, dérivabilité, formules de Taylor.

**Fonctions convexes**

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

---

**a) Parties convexes d'un espace vectoriel réel**

---

Barycentre.

$\Leftrightarrow$  PC et SI : centre de masse (ou centre de gravité).

Partie convexe. Caractérisation à l'aide de barycentres à coefficients positifs.

---

**b) Fonctions convexes d'une variable réelle**

---

Une fonction  $f$  est convexe sur l'intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  si pour tout  $(x, y)$  de  $I^2$  et tout  $\lambda$  de  $[0, 1]$  :

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Pour  $f$  convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

où  $x_1, \dots, x_n$  sont des points de  $I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  des réels positifs de somme 1.

Caractérisations : convexité de l'épigraphe, inégalité des pentes.

Position relative du graphe et de ses cordes.

Fonction concave.

---

**c) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables**

---

Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur  $I$ , des fonctions convexes deux fois dérivables sur  $I$ .

Exemples d'inégalités de convexité.

Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.

---